MEMORIAS

Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

17 al 19 de junio de 2026

Organiza

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

17 al 19 de junio de 2026

PATRICIA PERRY

EDITORA

ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES, 27

EDICIÓN

Patricia Perry

DIAGRAMACIÓN DE PORTADA Y PORTADILLAS

Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional

ISSN: 2346-0539

Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Calle 72 No. 11 86
Bogotá, Colombia

PRESENTACIÓN

El Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones es un evento académico de carácter internacional cuyo propósito es convocar a matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Las características de este evento propician: la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y profesores de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones; el estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas y otras disciplinas.

Estas Memorias corresponden a la vigésima séptima versión del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. Esta versión, al igual que todas las anteriores, ha sido organizada por la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) con el apoyo de otras instituciones. En esta ocasión se contó con el auspicio de la Universidad Nacional de Colombia y la Universidad de los Andes y el patrocinio de Belpapel Ltda. y Dinissan.

Gracias al selecto grupo de invitados nacionales y extranjeros se garantiza un alto nivel académico del evento que ofrece un espacio de muchos aprendizajes. En esta ocasión contamos con la participación de cuatro profesores de reconocida trayectoria académica a nivel internacional. En el campo de la Educación Matemática: Ivonne Sandoval (Universidad Pedagógica Nacional - México) y Víctor Larios (Universidad Autónoma de Querétaro – México. En el campo de las Matemáticas: Sylvie Paycha (Universidad de Potsdam, Alemania) y Lázaro "Coco" Recht - Instituto Argentino de Matemática "Alberto P. Calderón" (IAM-CONICET). A nivel nacional, participan con una conferencia o un cursillo, profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas: Colombia Aprendiendo, Universidad Antonio Nariño, Universidad Externado de Colombia, Universidad de los Andes, Universidad de Nariño, Universidad Industrial de Santander, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Universidad del Tolima y Universidad del Valle.

Perry, P. (ed.) (2026). *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Esta versión digital de las Memorias es una obra editada que incluye documentos presentados por algunos de los invitados y algunas ponencias que fueron sometidas a consideración del Comité Académico del Encuentro y evaluadas por pares académicos. Estas últimas pasaron por un proceso adicional de evaluación y de edición académica. Los escritos versan sobre las siguientes temáticas: geometría en la educación matemática, geometría e historia, geometría y otras ramas de la matemática, geometría y artes, geometría y tecnología, geometría e inclusión y temas de geometría.

Comité Organizador
Bogotá, junio de 2026

Organización del Encuentro

Comité organizador

Universidad Pedagógica Nacional

Claudia Vargas, Óscar Molina, Carmen Samper y Alejandro Mendoza

Comité de revisión académica

Universidad de Antioquia

Carlos Jaramillo, John Durango y Jorge Toro

Universidad de los Andes

Margot del Valle

Universidad de Nariño

Óscar Soto

Universidad de Valencia (España)

Camilo Sua

Universidad del Valle

Marisol Santacruz

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Claudia Castro y Olga León

Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Carlos Álvarez y Nora Rojas

Universidad Industrial de Santander

Jenny Acevedo, Jorge Fiallo y Luis Pérez

Universidad Nacional de Colombia

John Cruz y José Ramírez

Universidad Nacional de Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur

Carlos Pérez

Perry, P. (ed.) (2026). *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)

Alejandro Mendoza, Alejandro Sánchez, Alicia Guzmán, Andrea Ortiz, Carmen Samper, César Rendón, Claudia Orjuela, Claudia Vargas, Diego Guerrero, Édgar Guacaneme, Elizabeth Torres, Felipe Fernández, Ferley Ortiz, Leonardo Ángel, Leonor Camargo, Lyda Mora, Myriam Rodríguez, Natalia Morales, Nubia Soler, Óscar Molina, Tania Plazas y William Jiménez

Universidad Sergio Arboleda

Reinaldo Núñez

APOYO ADMINISTRATIVO

Instituto Pedagógico Nacional, Oficina de Relaciones Interinstitucionales Universidad Pedagógica Nacional y Colegio Reyes Católicos

ENTIDADES AUSPICIADORAS

Universidad de los Andes y Universidad Nacional de Colombia

ENTIDADES PATROCINADORAS

Belpapel Ltda., Dinissan

TABLA DE CONTENIDO

Perry, P. (ed.) (2026). *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

PÓSTERES

Encuentro de

GEOMETRÍA

y sus APLICACIONES

17 al 19 de junio de 2026

Conferencias

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: reflexiones sobre la atención a la diversidad en la enseñanza de la geometría

Jenny Acevedo-Rincón
Universidad Industrial de Santander
jepaceri@uis.edu.co

En este artículo se analizan, bajo el marco del modelo MTSK, estrategias pedagógicas y materiales didácticos empleados para la enseñanza de conceptos geométricos con atención a la diversidad. Para ello, se ejemplifican casos de atención a discapacidades (sensoriales). Se enfatiza en el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el uso de recursos táctiles como mediadores del pensamiento espacial. La metodología se centra en casos de estudio que evidencian la adaptación de materiales y discursos, la cual permite la construcción de nociones geométricas abstractas en entornos escolares y universitarios diversos.

Introducción

Es fundamental que la investigación en Educación Matemática no se quede en el plano de la abstracción. Vincular modelos teóricos con escenarios reales de aprendizaje permite transformar conceptos complejos en herramientas de diagnóstico y mejora para el aula. Estos marcos no solo sirven para describir la práctica, sino también para potenciarla, ofreciendo al docente una estructura sólida para tomar decisiones que impacten directamente en la comprensión de sus estudiantes.

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)

El modelo MTSK, desarrollado por Carrillo-Yáñez *et al.* (2018) en la Universidad de Huelva, propone que el conocimiento del profesor de matemáticas no es genérico, sino especializado. A diferencia de otros modelos del conocimiento del profesor, el MTSK sostiene que cada decisión que toma el docente en el aula está anclada en un tipo de conocimiento que es propio de su profesión. Este modelo se divide en dos dominios principales: *Mathematical Knowledge* (MK),

Acevedo-Rincón, J. (2026). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: reflexiones sobre la atención a la diversidad en la enseñanza de la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 3-7. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

referente al conocimiento de la matemática y *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) que considera el conocimiento del contenido pedagógico.

En este artículo nos enfocamos, por una parte, en el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas –en inglés, *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM)–, dominio que se encarga de entender cómo el estudiante interactúa con el objeto matemático; por otra, en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, subdominio del modelo MTSK, conocido como *Knowlege of Mathematics Teaching* (KMT).

Particularmente, desde KFLM se reconoce el conocimiento sobre las formas de aprendizaje (*e. g*., ¿cómo construye un estudiante la imagen mental de un poliedro?); las dificultades y errores (*e. g*., anticipar que un estudiante con discapacidad visual puede tener dificultades con la perspectiva, pero no con la propiedad de las aristas); y, las teorías de aprendizaje de las matemáticas, que son aplicables a las aulas diversas (*e. g*., aplicar marcos como el de van Hiele para identificar en qué nivel de razonamiento geométrico se encuentra el alumno).

Por otra parte, desde KMT se identifica el conocimiento de los recursos y materiales de enseñanza, el cual se refiere al repertorio de herramientas que provienen de la formación docente y que el profesor tiene a su disposición al abordar un escenario de enseñanza. No es solo saber que existe un material, sino conocer su potencial en la enseñanza de, por ejemplo, la geometría en los diferentes niveles educativos. Para este caso, el mencionado conocimiento incluye el reconocimiento de recursos físicos (*e. g*., geoplanos, regletas o modelos 3D táctiles); recursos digitales (*e. g*., *software* de geometría dinámica accesible); y, el planteamiento de tareas matemáticas, que permitan diseñar actividades que persigan los resultados de aprendizaje deseados en los estudiantes.

El conocimiento especializado en escenarios diversos

La selección de tareas geométricas para estudiantes con discapacidad visual no puede reducirse a una mera adaptación técnica; requiere una activación profunda del KFLM. Este conocimiento especializado permite al docente anticipar que el acceso a la geometría para un estudiante con alguna discapacidad (visual u otra) depende de la transición de la percepción háptica (tacto activo) a la formación de imágenes mentales espaciales. Al integrar materiales apropiados, el profesor demuestra un conocimiento sólido de los recursos (KMT), entendiendo que la mediación física es el vehículo para que el estudiante verbalice propiedades abstractas, como se observa en el protocolo de intervención utilizado en las clases con el estudiante, donde el relieve sustituye al trazo visual. En consecuencia, la inclusión efectiva respecto a la invidencia o a la sordera nace de la capacidad del docente para movilizar su conocimiento sobre cómo se "construye" el concepto geométrico en ausencia de la visión/audición, garantizando que la tarea no pierda su demanda cognitiva y promueva una autonomía real en el aprendizaje.

CONSIDERACIONES

A partir de la incorporación del modelo MTSK en las prácticas docentes, se pueden identificar relaciones precisas entre los subdominios y los escenarios reales. Para ello, se exponen a continuación algunas reflexiones suscitadas de estas aproximaciones.

Es posible mejorar la precisión de las necesidades de adaptaciones en la enseñanza, gracias al diagnóstico preciso provisto por el KFLM (tabla 1). La "atención a la diversidad" deja de ser una etiqueta general y una bandera que se ajusta a las minorías, para pasar a incorporarse como parte de las prácticas de enseñanza del profesor, al comprender específicamente los obstáculos cognitivos, sensoriales, que enfrentan sus estudiantes, para proponer estrategias y adaptaciones que, lejos de facilitar el camino, se orientan a una aproximación de una enseñanza individualizada que privilegia las capacidades por sobre las dificultades de los estudiantes.

Obstáculo anticipado	**Análisis desde el KFLM**	**Intervención inclusiva (KMT)**
Pérdida de la referencia espacial	El KFLM indica que el estudiante construye la figura por partes (arista por arista). Al explorar una figura grande, puede perder el "punto de inicio".	Uso de un punto de referencia táctil (una marca o textura distinta) en un vértice para que el estudiante siempre sepa dónde comenzó su exploración.
Dificultad con la bidimensionalidad	El concepto de "plano" es abstracto si no se puede ver. El KFLM sugiere que el estudiante puede confundir	Empleo de geoplanos con bandas elásticas de diferentes texturas para diferenciar

	una línea con un borde físico.	perímetros de áreas, permitiendo que el tacto perciba la "superficie" encerrada.
Confusión en la perspectiva	El KFLM anticipa que las representaciones 2D de objetos 3D (*e. g*., un dibujo de un cubo) carecen de sentido táctil, ya que las líneas de profundidad no corresponden a la realidad física.	Sustituir dibujos por cuerpos geométricos calados o de alambre que permitan meter las manos y percibir la tridimensionalidad real, no proyectada.
Fatiga por carga cognitiva	La exploración táctil requiere más tiempo y memoria de trabajo que la visual. El KFLM ayuda a entender que el estudiante debe "armar" la imagen en su mente paso a paso.	Fragmentar la tarea en micro objetivos: primero identificar vértices, luego contar aristas y finalmente nombrar la cara, evitando la saturación informativa.

Tabla 1: algunos ejemplos de situaciones

Otro aspecto crucial que el KFLM permite anticipar es el uso del lenguaje. Un docente con este conocimiento especializado sabe que frases como "mira aquí" o "esta línea va hacia allá" son vacías para el estudiante. En su lugar, el KFLM orienta al profesor a utilizar un lenguaje posicional preciso: "a las doce en punto de tu mano", "hacia tu hombro derecho" o "en sentido horario".

La inclusión no se limita a proveer el material (KMT), también entiende –a través del KFLM– que el estudiante está traduciendo movimientos manuales en conceptos geométricos. Sin este conocimiento, el material táctil es solo un juguete; con ese conocimiento, es un instrumento de aprendizaje. Así mismo, la mediación estratégica del docente, basada en KMT, permite que el docente no elija los materiales por su novedad, sino porque cubren necesidades para lograr la transposición didáctica del saber. En tal caso, lograr aproximaciones más cercanas entre la abstracción y la representación en los estudiantes, de manera que dicho recurso específico permita, por ejemplo, tocar las aristas y vértices, facilitando la construcción del concepto de volumen que el KFLM identificó como necesario.

Por último, existe una brecha marcada entre los aprendizajes de los estudiantes con características promedio y los que tienen dificultades sensoriales. La inclusión ocurre cuando el profesor moviliza estos conocimientos para que el estudiante con discapacidad no sea un espectador, sino que realice la misma actividad matemática que sus compañeros, pero a través de un canal de acceso diseñado profesionalmente.

Reflexiones

El análisis realizado permite afirmar que el docente que privilegia la inclusión en su aula va más allá de la "buena voluntad" o de la "disposición afectiva hacia la diversidad". Su verdadera identidad profesional en escenarios inclusivos se manifiesta en la movilización de un conocimiento especializado (MTSK) lo suficientemente robusto como para reconfigurar la enseñanza de la geometría. Esta capacidad de adaptación no implica una simplificación del contenido, sino una transformación didáctica donde KFLM y KMT actúan sinérgicamente para garantizar que el rigor matemático permanezca intacto mientras se eliminan las barreras de acceso a la información, desde un diseño universal del aprendizaje (CAST, 2018).

En definitiva, la inclusión efectiva en el aula de matemáticas no es un proceso accidental, sino el resultado de una toma de decisiones informada por modelos teóricos que permiten al profesor interpretar las formas particulares en que cada estudiante, especialmente quien tiene discapacidad visual, construye el pensamiento espacial. El MTSK se consolida así, como un motor de equidad, devolviendo al docente el papel de arquitecto de experiencias de aprendizaje donde la diversidad no es un obstáculo, sino el punto de partida para una práctica matemática genuinamente universal.

Referencias

Acevedo-Rincón, Jenny Patricia, Flórez-Pabón, Campo Elías y Lizarazo-Cárdenas, Ever Alberto (2023). Investigaciones sobre trastorno del espectro autista: un análisis de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, 87, 347-368. Epub enero 01, 2023.https://doi.org/10.17227/rce.num87-12116

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

CAST (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. http://udlguidelines.cast.org

La relación entre lo geométrico y lo aritmético en la constitución de $\mathbb{R}$

Édgar Guacaneme-Suárez, Analía Bergé, Alexandra Fregueiro, Viviana Salazar-Fino, Lyda Mora-Mendieta y César Rendón-Mayorga
Universidad Pedagógica Nacional, Université du Québec à Rimouski – Canadá, Consejo de Formación en Educación – Uruguay
guacaneme@pedagogica.edu.co, analia_berge@uqar.ca, suresmeralda@hotmail.com, dma.vsalazar@pedagogica.edu.co, lmendieta@pedagogica.edu.co, cgrendonm@upn.edu.co

El grupo de investigación RE-MATE junto a investigadoras de Canadá y Uruguay, desarrolló un estudio sobre la valoración de aprendizajes de números reales ($\mathbb{R}$) en la formación de profesores de matemáticas. El texto analiza la relación entre lo geométrico y lo aritmético en la constitución de $\mathbb{R}$, abordando el problema de la inconmensurabilidad, la vinculación entre la recta geométrica y la numérica, el funcionamiento de algoritmos operativos basados en René Descartes y las miradas sobre la continuidad y completitud de Richard Dedekind y George Cantor. Finalmente, se expone una propuesta innovadora de representación gráfica en el plano cartesiano para conjuntos numéricos que anteceden a $\mathbb{R}$. Esta alternativa semiótica permite visualizar operaciones como sumas, productos, relaciones de orden y sucesiones convergentes asociadas a números irracionales.

Introducción

Durante 2025 y 2026, en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) el grupo de investigación *Research on Mathematics Teacher Education* (RE-MATE), en conjunción con investigadoras de la Universidad de Quebec (Canadá) y del Consejo de Formación en Educación (Uruguay), desarrolló la investigación titulada «Valoración de aprendizajes sobre números reales logrados a través de la implementación de una tarea diseñada para la formación inicial de profesores de matemáticas - VA$\mathbb{R}$» (identificada institucionalmente por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica con el código DMA-710-25).

Establecer cuáles conocimientos matemáticos sobre el sistema de los números reales ($\mathbb{R}$) podrían llegar a ser parte de los conocimientos potencialmente aprendidos por los futuros profesores de matemáticas constituyó un asunto que se

Guacaneme-Suárez, É., Bergé, A., Fregueiro, A., Salazar-Fino, V., Mora-Mendieta, L. y Rendón-Mayorga, C. (2026). La relación entre lo geométrico y lo aritmético en la constitución de $\mathbb{R}$. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 9-19. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

enfrentó en la investigación. De la respuesta construida en esta, en la primera parte de este documento, se quieren tratar aspectos interconectados relativos a la relación entre lo geométrico y lo aritmético en la constitución de $\mathbb{R}$. Uno de estos aspectos refiere al problema de la inconmensurabilidad y a cómo este se resuelve a través de $\mathbb{R}$. Otro, alude a la relación entre recta geométrica y recta numérica. Uno más, refiere a una fundamentación geométrica para operar con números reales construibles. El último, aborda miradas en dos direcciones entre la continuidad de la recta y la completitud de $\mathbb{R}$.

En la segunda parte, se exhiben rasgos de una propuesta de innovación para la representación geométrica, o más específicamente en el plano cartesiano, de los elementos de los conjuntos numéricos y de algunas de sus operaciones y relaciones que, desde una perspectiva genética o constructiva, anteceden a $\mathbb{R}$. A través de un simple algoritmo sobre esta representación se logra también la ubicación de muchos números reales en la recta geométrica.

ASPECTOS RELATIVOS A LA RELACIÓN ENTRE LO GEOMÉTRICO Y LO ARITMÉTICO EN LA CONSTITUCIÓN DE $\mathbb{R}$

La inconmensurabilidad como manifestación de un conflicto geométrico-aritmético

En el tratamiento teórico de las magnitudes arquimedianas, particularmente en el de las magnitudes geométricas, existe el problema de la inconmensurabilidad, para el cual los números reales positivos constituyen la solución. Dos ejemplos, ampliamente conocidos, refieren a la inexistencia de dos números naturales cuya razón sea la misma que la razón que guardan la diagonal del cuadrado y su lado o la inexistencia de dos números naturales cuya razón sea la misma que la razón entre el perímetro y el diámetro de la circunferencia. Con el advenimiento de los números reales positivos, los números $\sqrt{2}$ y π participan de sendas soluciones; así, $\sqrt{2}$ y 1 son los dos números que guardan la misma relación (o razón) que la que guarda la diagonal de un cuadrado y su lado, en cuanto que π y 1 son los dos números que guardan la misma relación que el perímetro de la circunferencia y su diámetro. Con ello de base, y haciendo una generalización, se postulan los números reales positivos como solución al problema de la inconmensurabilidad (o, en otras palabras, se asume que con los números reales se puede expresar el tamaño de cualquier magnitud arquimediana o de cualquier cantidad numérica).

Ligado al problema de la inconmensurabilidad aparece la idea de *antanairesis* o *antifairesis* de dos magnitudes, conocida con el nombre anacrónico de «algoritmo de Euclides», aplicado fundamentalmente a los números (Knorr, 1975, 1978). Si se consideran, por ejemplo, la diagonal y el lado de un cuadrado, como resultado de la *antanairesis* se obtiene la cadena infinita de números $[1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$; esta cadena de números naturales se puede asumir entonces como la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado. Precisamente los números de la anterior cadena se encuentran en la siguiente fracción continua regular ~~siguiente~~:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}}$$

Las convergentes (o reductas) de esta fracción continua son los números racionales $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$ que constituyen una sucesión que converge precisamente a $\sqrt{2}$.

Otros ejemplos de cadenas infinitas de números asociadas a números reales son: $[1; 1, 1, 1, \ldots]$, $[3; 3, 6, 3, 6, \ldots]$ y $[4; 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, \ldots]$; estas corresponden a los números irracionales ϕ, $\sqrt{11}$, $\sqrt{19}$, respectivamente.

La relación entre recta geométrica y recta numérica

Las figuras geométricas y sus medidas constituyen un registro de representación de algunos números reales. En este es ampliamente conocido el triángulo rectángulo isósceles de catetos de medida 1 y, consecuentemente, de hipotenusa de medida $\sqrt{2}$ (véase imagen 1(a)); también es conocido el triángulo equilátero cuyos lados miden 1 y cuya altura mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (véase imagen 1(b)). Asimismo, es conocida la construcción sucesiva de triángulos rectángulos que parte del primero de los triángulos anteriores y va generando triángulos cuyas hipotenusas van midiendo sucesivamente $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots$ (véase imagen 1(c)).

Esas figuras geométricas ofrecen un ambiente para construir segmentos cuyas medidas se expresan a través de números no siempre racionales; desde este ambiente es entonces pertinente preguntarse por la posibilidad de construir geométricamente todos los números reales positivos, lo que puede convertirse en un cuestionamiento que, a modo de acicate, conduzca a la imposibilidad de construcción geométrica de algunos números reales positivos y a la consecuente subdivisión de los números irracionales positivos en construibles y no construibles geométricamente, es decir construible con regla y compás euclidianos (o en otras palabras, con rectas y circunferencias sin medidas).

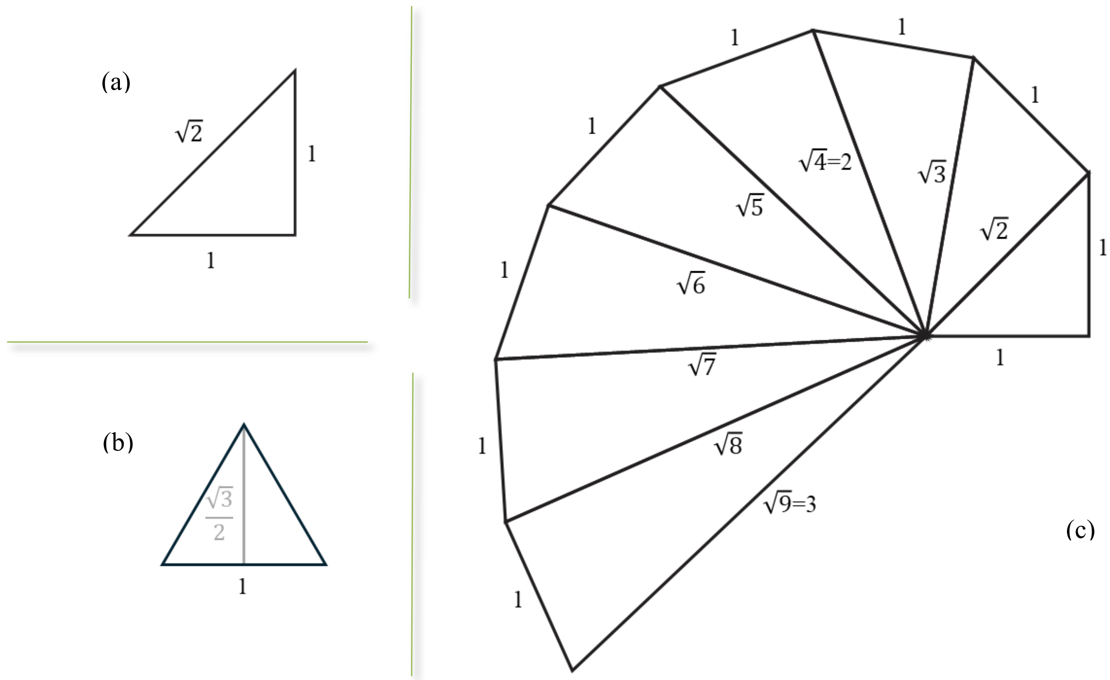


Imagen 1: figuras geométricas y sus medidas como medio de representación de algunos números reales.

El trabajo en el anterior registro de representación puede servir de base para abordar la representación de los números reales en una recta numérica. Este nuevo registro de representación asume como base una suposición aparentemente natural, pero no menos cuestionable: «la recta está compuesta de puntos»; además, supone la existencia de una biyección entre los puntos de la recta y los números reales. Con estas suposiciones de base, basta con ubicar dos puntos sobre la recta y asociarlos respectivamente a los números reales 0 y 1 para con ello –y un proceso de división en partes alícuotas de la unidad– «lograr ubicar» el punto que corresponda a cualquier número real racional y con ello representarlo. Los números reales irracionales construibles se pueden representar como puntos en la recta numérica a condición de que se considere el segmento unidad en la construcción geométrica respectiva. Surge entonces un cuestionamiento de respuesta profundamente compleja: ¿es posible representar en la recta numérica un número irracional no construible? o en otras palabras ¿es posible establecer sobre una recta el punto que represente un número real no construible (como por ejemplo π) o, a lo más, lo que se puede es identificar intervalos de puntos que contienen un punto que representa al número en cuestión? La respuesta a esta pregunta establece un halo de duda en relación con la correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta, con lo cual se cuestiona la recta como registro de representación idóneo. Este cuestionamiento es anodino si se acepta irreflexivamente que a cada número real le corresponde un punto de la recta y viceversa.

Operando con números reales construibles en el contexto geométrico

La asociación entre los números reales positivos y las magnitudes arquimedianas continuas absolutas –o si se prefiere, una relación entre lo aritmético y lo geométrico– encuentra en el tratamiento cartesiano de las magnitudes geométricas un nuevo ambiente operativo que sirve de acicate y referencia a la operatividad de los números reales.

Desde *La Géométrie* de René Descartes, algunas de las operaciones entre magnitudes, que no habían sido tratadas por Euclides en *Elementos* –como, por ejemplo, la multiplicación, la extracción de raíz cuadrada y la «unidimensionalización» de las magnitudes–, pueden interpretarse mediante construcciones geométricas sobre segmentos. Estas construcciones o algoritmos geométricos ofrecen entonces una vía para operar con números reales construibles en el contexto geométrico (véase imagen 2).

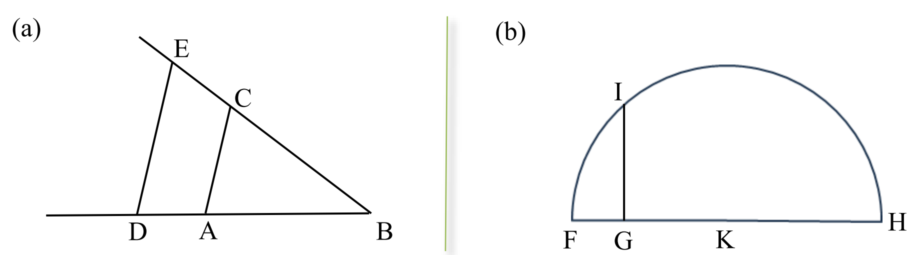


Imagen 2: figuras geométricas asociadas a la multiplicación de segmentos y la extracción de la raíz cuadrada

El análisis de estos algoritmos y la identificación de los elementos de su validez permiten reconocer tanto el lugar de algunas propiedades geométricas involucradas en las construcciones (tales como el paralelismo y la semejanza de triángulos) como el papel protagónico del segmento unidad. Ello abre la posibilidad de aproximación a las limitaciones de estos algoritmos geométricos, en particular, a la imposibilidad de representar todos los números reales mediante construcciones con regla y compás.

Este enfoque genera un ambiente propicio para la discusión en torno a las condiciones que permiten pensar estas construcciones en términos de una posible organización algebraica en el contexto geométrico.

Dos miradas sobre la relación entre la recta geométrica y $\mathbb{R}$

Basados en Bergé y Sessa (2003) se puede afirmar que con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, la relación entre la matemática y la realidad es interpelada y problematizada, pues a través de estas geometrías se reconoce la existencia de tres sistemas axiomáticos para la geometría, matemáticamente correctos, diferentes y no compatibles entre sí. Esto llevó a algunos matemáticos del siglo XIX, interesados en temas de cálculo y análisis, no solo a preguntarse sobre los alcances de la geometría euclídea como modelo del espacio físico, sino también a reconocer que muchas afirmaciones en el campo de lo numérico se apoyaban en una idea de recta (numérica) continua que no había sido explicitada. Entre ellos Richard Dedekind (1831-1916) y George Cantor (1845-1918) consideraron que la definición de un sistema numérico útil para el análisis matemático está necesariamente ligada a la definición de continuidad de la recta. Pero ¿cómo expresar esta característica de la recta?

Dedekind (1872) lo hace enunciando la siguiente propiedad:

> Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases de manera que todo punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de todo punto de la segunda, entonces existe un punto y solo uno que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, o sea, ese corte de la recta en dos porciones. (Dedekind, 1968, p. 121)

Él rápidamente afirma que suponer esta característica de la línea no es otra cosa que un axioma por el cual se atribuye continuidad a la recta. El sistema numérico que él construye integra esta idea a partir del sistema de números racionales, mediante la creación de números nuevos que satisfagan la misma característica que los puntos de la línea recta.

El proyecto de Cantor (1871) era construir un sistema numérico que incluyera a los racionales y en el que se verificase la propiedad de que toda sucesión fundamental de elementos del nuevo sistema numérico tuviera como límite un elemento de ese sistema. Básicamente Cantor *agregó* a los racionales un número por cada sucesión fundamental (salvo equivalencias) y extendió a este nuevo sistema numérico las cuatro operaciones aritméticas y la relación de orden conocida para los racionales. Esta asignación permite poner en correspondencia puntos de una recta con números del nuevo sistema, pero la asignación recíproca no está, en principio, garantizada. Requiere, como hace Cantor, introducir un axioma que asegure que a cada nuevo número corresponde un determinado punto de la recta.

Si bien tanto Cantor como Dedekind vieron la necesidad de expresar vía un axioma la continuidad de la recta, parece interesante destacar el papel diferente que este axioma jugó en ambas construcciones. Mientras que para Dedekind la propiedad de la recta constituyó el punto de partida de su construcción de los números reales, el proyecto de Cantor fue conseguir un sistema numérico completo (en el sentido de que toda sucesión fundamental tiene límite) y dotar finalmente a la recta de una propiedad análoga.

UNA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA INNOVADORA DE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Como parte de la formación matemática de los futuros profesores de matemáticas es usual incluir la construcción sucesiva de los conjuntos y sistemas numéricos (Muñoz Quevedo, 1983). Así, termina siendo familiar la sucesión de los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales, así como su relacionamiento como cadena de subconjuntos ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$). Esta aproximación normalmente prioriza la representación simbólica de los elementos de los diferentes conjuntos numéricos y usualmente no incluye una representación geométrica de estos que vaya más allá de la representación como puntos en la «recta numérica».

Ahora bien, la comprensión de los números enteros como clases de equivalencia del conjunto generado por el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o de los números racionales como clases de equivalencia del conjunto generado por el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, aunada a la representación gráfica de estas parejas en un sistema de coordenadas ofrece la posibilidad de interrogar tanto la forma de representar las clases de equivalencia y sus representantes, como la manera de realizar las operaciones y las relaciones entre estos números en el sistema de representación gráfica mencionado. Adicionalmente, surge la posibilidad de preguntarse sobre las construcciones geométricas que expresarían los procedimientos de asociación de cada pareja –o conjunto de parejas o del representante de la clase de equivalencia– con un punto sobre una misma recta numérica en la que se ubiquen todos y cada uno de los elementos de los conjuntos numéricos.

En desarrollo del proyecto de investigación citado al comienzo del artículo y auspiciado por la necesidad de comprender lo establecido en el párrafo inmediatamente anterior, se desarrolló un ejercicio de representación geométrica del conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ que se visualiza en la imagen 3 para el caso de las parejas de coordenadas positivas.

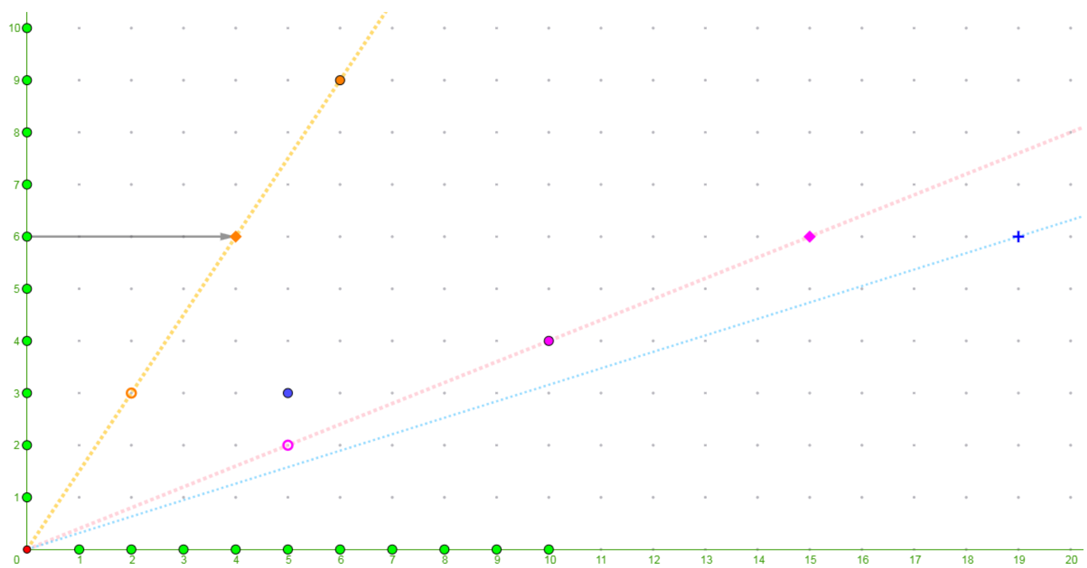


Imagen 3: representación gráfica de los racionales positivos y de la suma de dos de ellos

Particularmente, en la configuración de la imagen 3 se han representado varios «fraccionarios», a saber: $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{9}, \frac{10}{4}, \frac{15}{6}, \frac{19}{6}$. Algunos de ellos corresponden a los racionales (2,3), (5,2) y (19,6), entendidos como representantes de la clase de equivalencia, la cual se corresponde con la colinealidad de puntos que representan números fraccionarios. En la imagen 3 también se ha representado la suma de los racionales (2,3) y (5,2); esta se ha realizado a través de un algoritmo geométrico que incluye generar los elementos de las clases de equivalencia e identificar cuáles de ellos coinciden horizontalmente; una vez hecho esto, basta aplicar sobre la representación gráfica la suma usual entre segmentos para obtener el resultado (19,6).

De manera semejante, en la imagen 4 se ha representado el producto entre dos racionales (o puntos que los representan). En este caso se ha empleado la homotecia de cada uno de estos en relación con el punto (0,0) y tomando como factor de homotecia una de las coordenadas del otro; así, el producto de los racionales (2,3) y (5,2) se ha realizado mediante la homotecia de (2,3) con factor de homotecia la ordenada de (5,2) y mediante la homotecia de (5,2) con factor de homotecia la abscisa de (2,3). Luego, se han cruzado las rectas de proyección de estos puntos en relación con los ejes, para así obtener el punto que representa el producto. En términos generales, el punto obtenido pertenece a una clase de equivalencia representada por el punto más cercano al punto (0,0) colineal con estos.

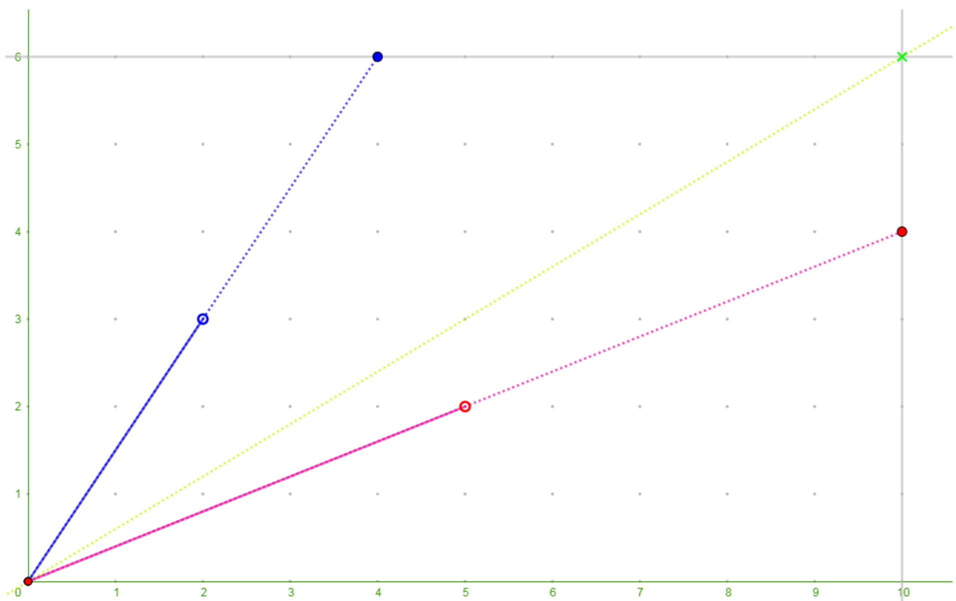


Imagen 4: representación gráfica de los racionales positivos y del producto de dos de ellos

Además de permitir la representación y ejecución de la suma y el producto, la representación en cuestión facilita visualizar la relación de orden –y sus propiedades–; este está asociado con la inclinación de las rectas que sugieren las clases de equivalencia. Así, los puntos ubicados en una recta con mayor pendiente que otra, serían menores que los colineales de la última.

Esta misma representación cartesiana del conjunto de los racionales ofrece una oportunidad para la intuición sobre los números irracionales y su relación con los números racionales. En efecto, representando sucesivamente las convergentes de las fracciones continuas (*i. e.*, los racionales) se puede ver que estas tienden a una recta. En la imagen 5 se ha representado las convergentes de $\sqrt{2}$.

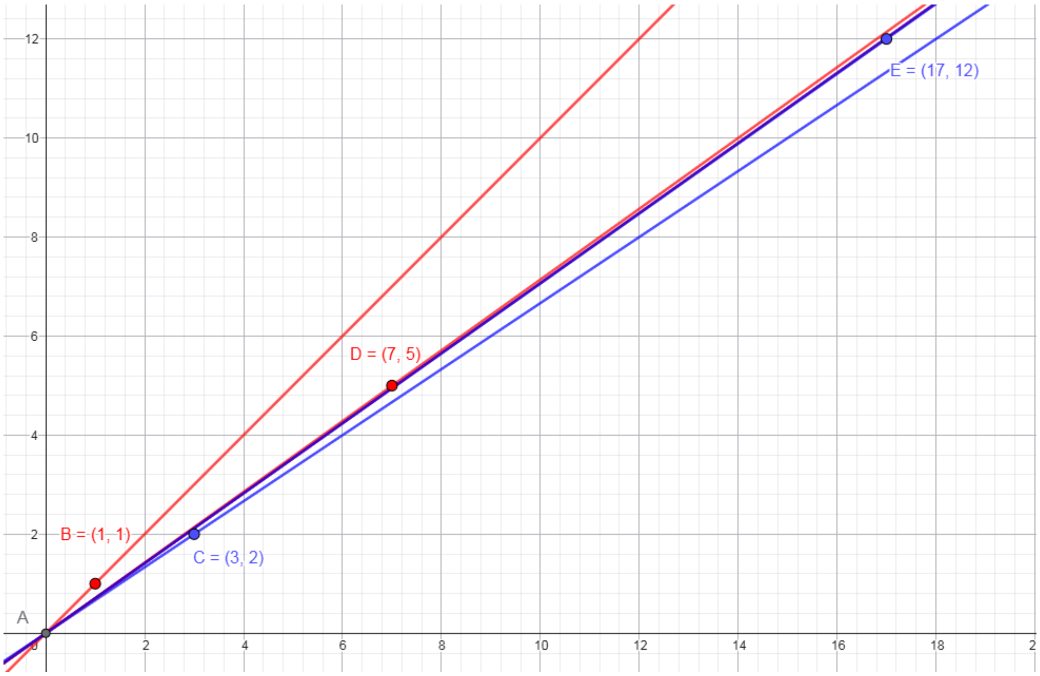


Imagen 5: representación gráfica de la sucesión de convergentes asociada a la fracción continua que representa a $\sqrt{2}$

Además, a través de esta representación se logra una aproximación a los irracionales como conjuntos de puntos colineales que no coinciden con ninguno de los puntos de la grilla de racionales. Esta imagen permite visualizar que es más probable que existan más irracionales que racionales, en razón a que hay más espacio entre dos puntos (racionales) cualesquiera, que puntos.

Por otra parte, no debe excluirse la posibilidad que esta representación brinda de ubicar sobre la recta horizontal (eje x) cualquier número racional o irracional ubicando el corte de la recta que contiene los puntos colineales con la recta horizontal que pasa por (1,0) y proyectar sobre el eje tal punto.

Para finalizar esta segunda parte es sensato reconocer que la apuesta acá hecha no va más allá del uso de un sistema de representación para ampliar la comprensión sobre la existencia de diferencias entre conjuntos numéricos, que residen en la naturaleza epistémica y ontológica de sus elementos.

A MODO DE CIERRE

La relación entre lo geométrico y lo aritmético trasciende lo representacional, aunque usualmente lo incorpora. Tal trascendencia se ha ilustrado a través del problema de la inconmensurabilidad y de la constitución de $\mathbb{R}$ por parte de Dedekind y Cantor, dignos representantes de la innovación matemática. Esto hace –o debería hacer– parte fundamental del conocimiento deseable del profesor de matemáticas.

Bajo la conciencia de que $\mathbb{R}$ es un sistema numérico altamente antiintuitivo se puede optar por dos vías. Una de ellas dirige su atención a los aspectos formales, rigurosos o teóricos; la otra, a identificar sistemas de representación semiótica que amplíen el marco de recursos disponibles para facilitar su comprensión. Naturalmente, la segunda parte de este documento se ubica en la segunda vía.

REFERENCIAS

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisada a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(3), 163-197.

Cantor, G. (1871). Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, *V*, 123-132.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Friedrich Vieweg und Sohn.

Dedekind, R. (1968). Números irracionales. En J. R. Newman (ed.), *Sigma. El mundo de las Matemáticas* (vol. 4, pp. 119-128). [Décima ed.]. Ediciones Grijalbo S. A.

Knorr, W. R. (1975). *The evolution of the Euclidean Elements. A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*. D. Reidel Publishing Company.

Knorr, W. R. (1978). Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory. *Archives internationales d'histoire des sciences*, *28*, 183-244.

Muñoz Quevedo, J. M. (1983). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

De la investigación al aula: experiencias en México para el desarrollo del pensamiento geométrico en primaria

Ivonne Sandoval
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco, Ciudad de México
isandoval@upn.mx

La geometría continúa relegada en los primeros grados de educación primaria, pese a su relevancia en el desarrollo del pensamiento matemático. Diversas investigaciones siguen reportando dificultades relacionadas con la visualización espacial, la interpretación de representaciones de formas bi- y tridimensionales, así como con el análisis de transformaciones geométricas. En este artículo presento experiencias desarrolladas en México orientadas a vincular resultados de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con el diseño de materiales accesibles para los primeros grados de primaria. A partir de estas experiencias, discuto posibilidades y tensiones vinculadas con la formación docente para favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico en los primeros grados.

Introducción

> La conexión entre la geometría y la realidad somos nosotros. Somos el puente entre ambas. Las matemáticas suceden en nuestras mentes, nuestras mentes son producto de nuestros cerebros, nuestros cerebros son parte de nuestros cuerpos y nuestros cuerpos están en la realidad [física]. (Lockhart, 2012, p. 158)

La geometría es una parte importante del pensamiento matemático, pues permite comprender y representar el espacio en el que vivimos y el que imaginamos. Sin embargo, no tenemos acceso directo a los objetos geométricos sino a sus representaciones dentro de un sistema geométrico (Duval, 1998). Entonces, debemos aprender a trabajar con objetos ideales a partir de representaciones materiales del mundo físico; diferenciando el objeto de sus representaciones.

El pensamiento geométrico puede entenderse como la capacidad de interpretar, representar y analizar relaciones espaciales y propiedades de formas 2D y 3D en diferentes sistemas geométricos, así como la capacidad de razonar sobre ellas a través de procesos como visualización, construcción y argumentación (Duval,

Sandoval, I. (2026). De la investigación al aula: experiencias en México para el desarrollo del pensamiento geométrico en primaria. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 21-36. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

1998; Johnson-Wilder y Mason, 2005). Su desarrollo permite ser capaz de identificar y transformar representaciones, identificar invariantes y establecer relaciones entre objetos geométricos, por ejemplo.

Desde investigaciones clásicas, como es el caso de la perspectiva genético-cognitiva, se reconoce que la construcción de nociones espaciales y geométricas se desarrolla progresivamente en interacción con el entorno (Piaget e Inhelder, 1948). Investigaciones posteriores han ampliado esta perspectiva, destacando que dicha comprensión no se construye de manera espontánea ni solo por maduración, sino a través de experiencias dirigidas y mediadas en contextos educativos (Sarama y Clements, 2009; Lowrie *et al.*, 2019).

A pesar de estos avances investigativos, la realidad en diversos salones de clase, particularmente, en los primeros grados de primaria, es que la geometría continúa ocupando un lugar secundario. Al acercarse para comprender estas realidades y dialogar con docentes no especialistas en matemáticas, aparecen expresiones como "lo geométrico no es prioridad enseñarlo porque las formas geométricas están por todos lados" (docente de segundo de primaria, 2021). Este tipo de afirmaciones evidencia una tensión reportada en la investigación desde hace décadas: aunque la geometría forma parte de la experiencia cotidiana, aprender a "a ver" y a "razonar" geométricamente resulta más complejo de lo que suele suponerse. Como lo señaló Freudenthal (1973), "Geometría es captar el espacio. […] Estamos tan acostumbrados a este espacio que no podemos imaginar cuán importante es para nosotros y para quienes educamos" (p. 403).

Si la geometría estudia patrones espaciales en los que se involucran formas, tamaños relativos, localizaciones y estructuras y si las representaciones de relaciones espaciales son una herramienta valiosa para pensar y comunicarse efectivamente con otras personas (Johnson-Wilder y Mason, 2005; Sinclair y Bruce, 2015), entonces *¿cómo transformar estas ideas a experiencias accesibles para las infancias y docentes que enseñan matemáticas en los primeros grados escolares, en contexto específicos?* Esta inquietud ha guiado mi trabajo investigativo y de colaboración con investigadores y docentes.

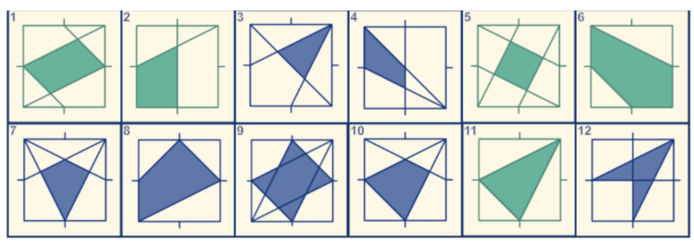
En este artículo presento ejemplos de materiales elaborados para salones de clase de educación primaria en México, y comentaré algunas posibilidades y tensiones que emergen, centrándome en la formación docente y el trabajo colaborativo.

POCA VISIBILIDAD DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

La geometría está presente en diversas áreas de las matemáticas y de otras ciencias, razón por la que es necesario que más niños, niñas, adolescentes y docentes no especialistas en matemáticas tengan oportunidades para desarrollar y expresar su pensamiento geométricamente. A continuación, retomaré tres tareas usuales de distintos niveles educativos con el propósito de mostrar cómo el pensamiento geométrico es una herramienta poderosa en la resolución de problemas, aunque frecuentemente poco explicitada.

El pensamiento geométrico y su relevancia para hacer matemáticas

Una primera tarea proviene de la aritmética de primaria. En la imagen 1 se muestra un recurso digital interactivo[1] en el que se pide relacionar la figura del área sombreada del cuadrado con una fracción numérica.



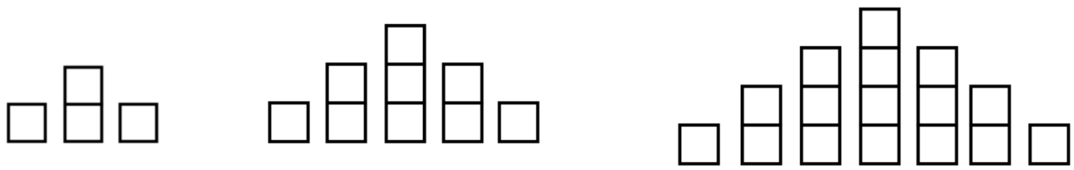
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{5}$

Imagen 1: pensamiento geométrico en una tarea aritmética

Para resolver exitosamente esa tarea, centrando la discusión en el proceso y no únicamente en el resultado, se requiere tanto el pensamiento numérico (interpretar la fracción dada como parte-todo) como el geométrico. Esto es, identificar figuras dentro de una figura compuesta o entre figuras sobrepuestas (identificación visual), reconocer figuras en distintas posiciones (conservación de la percepción), reconocer figuras congruentes en distintas posiciones (percepción de la posición en el espacio), trazar figuras (coordinación visomotora), entre otras habilidades espaciales documentadas por Del grande (1990) y Gutiérrez (1991) en investigaciones sobre visualización espacial.

[1] Véase https://henkreuling.nl/applets/Mini-loco_breuken_in_vierkant.html

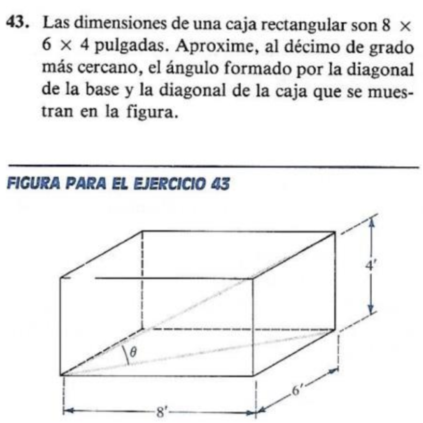
El segundo ejemplo corresponde a una tarea de secundaria (preálgebra) sobre sucesiones figurales para determinar la regla de construcción. Específicamente, se pide encontrar cuántos cuadrados hay en el paso 10 y cuál es la regla de construcción (véase imagen 2).



Paso 1 Paso 2 Paso 3

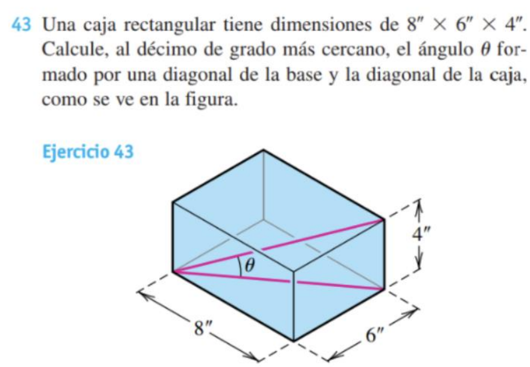
Imagen 2: ejemplo de una tarea de álgebra que requiere pensamiento geométrico

En esta tarea, el pensamiento geométrico se hace evidente en la manera en que el resolutor reconoce invariantes dentro del cambio, descompone y compone las configuraciones, en cómo imagina –predice– configuraciones sin necesidad de dibujarlas, y establece relaciones entre estas representaciones figurales y las relaciones numéricas identificadas. En este tipo de tarea, la discusión pocas veces se centra en cómo cada estudiante "imagina" el paso 10, y en la relación de esas "maneras de ver" con el proceso de construcción de la regla general. Es más frecuente que el énfasis esté en el resultado numérico y la expresión simbólica obtenida, lo que no consuena con Flores (1998), quien señaló que el pensamiento geométrico es un puente entre la aritmética y el álgebra porque dan sentido a los términos algebraicos.



43. Las dimensiones de una caja rectangular son 8 × 6 × 4 pulgadas. Aproxime, al décimo de grado más cercano, el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal de la caja que se muestran en la figura.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 43



43 Una caja rectangular tiene dimensiones de 8″ × 6″ × 4″. Calcule, al décimo de grado más cercano, el ángulo θ formado por una diagonal de la base y la diagonal de la caja, como se ve en la figura.

Ejercicio 43

Swokowski y Cole (1986, p. 68) Swokowski y Cole (2011, p. 411)

Imagen 3: ejemplo de una tarea de trigonometría que requiere cambios de dimensión

Un último ejemplo corresponde a un problema de trigonometría de bachillerato: dada una caja de base rectangular con ciertas dimensiones, encontrar la medida de cierto ángulo (imagen 3).

Para resolver la tarea, es necesario reconocer posiciones y relaciones espaciales, percepción figura-fondo, coordinar distintas perspectivas (vistas ortogonales) y hacer cambios de dimensión (3D-2D-1D), antes de usar el teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas básicas. En la imagen 3 se muestran cambios en las figuras que acompañan el enunciado y quizás intentan hacer más visibles ciertas relaciones espaciales. Ante esta tarea, una docente de matemáticas de bachillerato en Ciudad de México, con sólida formación disciplinar y cuyos estudiantes tienen alto desempeño académico, se preguntaba: "¿Por qué solo 10% logra resolver este ejercicio?". Ella comentó que:

> No reconocen el triángulo de la base, formado por las dos aristas de la caja que miden 8' y 6' respectivamente. A veces, ni siquiera consideran que se forme un triángulo rectángulo en el plano vertical porque no reconocen dónde se forma el ángulo recto.

Este tipo de dificultades ha sido ampliamente documentado en investigación sobre visualización y razonamiento espacial (Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1991) y el papel de las acciones para construir representaciones de los objetos. En este caso, se debe interpretar la información de la figura 2D antes de reconstruir el objeto tridimensional, pero la mencionada docente desconocía estos resultados útiles para su labor. Situaciones como estas evidencian cómo dificultades asociadas al pensamiento geométrico permanecen poco visibles en la enseñanza.

El pensamiento geométrico en el currículo y la investigación

Al revisar algunas políticas educativas materializadas en propuestas curriculares (Lozano *et al.*, 2019) y manuales o libros de texto, es posible identificar que usualmente los contenidos de geometría suelen aparecer después de los de aritmética y álgebra (UNESCO, 2020, imagen 4). Esta organización curricular comunica, explícita o implícitamente, cierta jerarquía y prioridad de los contenidos matemáticos, a los usuarios del currículo, entre ellos el profesorado y los diseñadores de materiales didácticos.

Algo similar sucede en investigación: los estudios sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría continúan siendo menos numerosos en comparación con otras áreas de las matemáticas y, más aun, en edades tempranas (Sandoval y Camargo, 2021; Sandoval y Ortiz, 2023). A lo largo de tres décadas de elaboración de estados de conocimiento sobre la investigación educativa en México, esta situación se ha mantenido sin grandes cambios:

> La geometría resulta la gran ausente en cuanto a los contenidos matemáticos abordados. […] la condición mostrada en el primer estado del conocimiento respecto de este contenido curricular no ha cambiado [...] Sin duda, tal situación ha limitado nuestra comprensión de los procesos de aprendizaje en esta rama de las matemáticas y, con ello, la creación de mejores propuestas para su enseñanza en el contexto mexicano. (Ávila *et al.*, 2013, pp. 119-120)

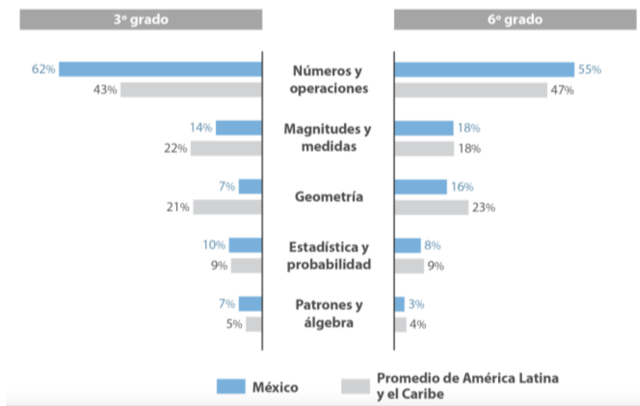


Imagen 4: un ejemplo de distribución de temas de geometría en México y su contraste con los de América Latina en educación primaria (Unesco, 2020, p. 16)

Lo anterior es coherente con observaciones en aula. Al investigar en un salón de clase, encuentro docentes comprometidos y entusiastas, con actitud abierta hacia la mejora de su práctica. En ocasiones, identifico tareas y estrategias didácticas poco favorables para el desarrollo del pensamiento geométrico; y, al mismo tiempo, expresan inquietudes sobre dificultades observadas en sus estudiantes y manifiestan interés genuino por explorar alternativas de enseñanza. Estas experiencias reafirman la necesidad de construir formas de trabajo más horizontales y colaborativas entre investigadores y docentes, como talleres, para lograr que resultados de investigaciones cuidadosamente diseñadas, de propuestas teóricas y metodológicas rigurosamente fundamentadas y validadas lleguen a las aulas a través de programas de formación del profesorado.

A continuación, presentaré, por una parte, ejemplos de libros de texto de matemáticas para estudiantes y profesores de los dos primeros grados de primaria, diseñados y distribuidos en México entre 2018 y 2024 y, por otra, retos para su implementación en aulas.

LIBROS DE TEXTO Y DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

Como se señaló en párrafos anteriores, en México tanto la investigación como el diseño de propuestas didácticas orientadas al fortalecimiento del pensamiento geométrico en primaria aún son limitados. Los resultados de evaluaciones nacionales siguen reportando dificultades relacionadas con la visualización espacial, la interpretación de representaciones de formas 2D y 3D, así como la anticipación y análisis de transformaciones geométricas. Estas problemáticas ya se han investigado desde hace décadas y hay propuestas didácticas para ello.

En 2017, a solicitud de la Secretaría de Educación Pública[2], se desarrolló un proyecto enfocado en el diseño de libros de texto para infancias de 1.° y 2.° de primaria. Participé en el equipo de matemáticas en la coordinación de contenidos de los ejes curriculares "forma, espacio y medida", junto con un colectivo de investigadores, docentes y autoridades educativas. Una de las decisiones centrales fue visibilizar los contenidos de este eje, distribuyéndolos de manera más equilibrada a lo largo del texto. Aproximadamente 40% fue para este eje. Además, se buscó acercar resultados de investigación a propuestas concretas y viables para aulas de educación primaria, a través del uso de recursos de bajo costo, y actividades centradas en la exploración, la argumentación y la comunicación. Cabe señalar que los libros dirigidos a las infancias requerían de enunciados cortos y claros y las imágenes usadas debían cumplir con fines didácticos. Por su parte, los textos para el profesorado incluían sugerencias sobre la implementación, materiales necesarios, posibles preguntas y dificultades esperadas, redactadas de manera breve y concreta, en un lenguaje accesible para no especialistas en matemáticas.

En el diseño de algunas tareas de este eje se incorporaron elementos de la Teoría de la variación del aprendizaje (Lo, 2012; Marton, 2015), particularmente patrones de variación e invarianza. Esta perspectiva ha orientado distintos proyectos de investigación en los que he participado (Sandoval y Camargo, 2021; Sandoval y Ortiz, 2023; Sandoval y Preciado, en prensa). A continuación, la describiré brevemente.

[2] Desde la década de 1960, la SEP garantiza que todas las infancias de educación básica cuenten con libros de texto gratuitos, para todas las asignaturas; y algunos de ellos se acompañan con sugerencias para el profesorado. Cada año, Conaliteg distribuyó cerca de 2 millones y medio de estos libros, que llegaron a estudiantes y docentes de estos dos niveles educativos (https://historico.conaliteg.gob.mx/).

Teoría de la variación del aprendizaje

Esta teoría, aunque no es exclusiva de la educación matemática, se ha consolidado como una herramienta teórico-metodológica relevante para investigar y diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluyendo geometría (Huang y Li, 2017; Kullberg *et al.*, 2017). En esta perspectiva, la variación es una condición necesaria para que quien aprende logre notar lo que es necesario aprender (Lo, 2012); aprender es definido como "un cambio en la forma en que algo es visto, experienciado o comprendido [...] la manera en que se experimenta es fundamental para aprender" (Runesson, 2005, p. 71). Se aprende "algo" cuando el aprendiz logra discernir elementos centrales (aspectos críticos) de ese "algo". Como lo señalamos en Camargo y Sandoval (2017), el discernimiento de un aspecto crítico se relaciona tanto con la riqueza como con la diversidad de experiencias de variación vividas por quien aprende, en las que dicho aspecto puede reconocerse como invariante.

Marton (2015) señala que para enfocar la atención es necesario experimentar la variación en ese aspecto crítico, pero no en otros. Así, si se pretende discriminar dos aspectos críticos, es necesario generar la diferencia entre ellos, variando uno mientras el otro permanece invariante, de manera que puedan distinguirse entre sí. Como lo señala Lo (2012), "no puede haber discernimiento sin experimentar diferencia, y no puede haber experimentado la diferencia sin una experiencia simultánea de al menos dos cosas diferentes" (p. 84).

A partir de lo anterior, esta teoría propone distintos patrones de variación e invarianza, entendidos como relaciones de igualdad y de diferencia experimentadas en las tareas de aprendizaje (Marton, 2015; Sandoval y Camargo, 2021; Sandoval y Preciado, en prensa). Uno de ellos es el ***contraste***, que implica la percepción de la diferencia. Esta experiencia de variación permite distinguir conceptos, 'entidades' o situaciones que presentan el aspecto crítico de interés frente a aquellas que no. Otro patrón es el de ***generalización***, que ocurre cuando el aspecto crítico se reconoce como invariante y necesario, incluso cuando otros aspectos varían; esto es, como distintivo de la entidad o situación en medio de la variación. Lo que interesa no es descubrir lo común entre distintos casos, sino reconocer cómo varía cada aspecto para "separar los aspectos opcionales de los necesarios" (Marton, 2015, p. 51). El último patrón es la ***fusión*** que ocurre cuando dos o más aspectos previamente generalizados se articulan a la vez en diferentes entidades o situaciones al enfocar la atención en ellos. Por tanto, cuando varios aspectos críticos de un objeto de aprendizaje han sido variados por separado mediante contraste o generalización, es fundamental que se experimenten conjuntamente mediante la fusión. Esta perspectiva resulta adecuada para el diseño de tareas geométricas, haciendo uso de las ideas ya descritas, para aprender a notar aquello que antes permanecía invisible.

En esta teoría, el papel de quien enseña también es esencial, pues es quien genera experiencias (actividades y preguntas) que orienten la atención hacia determinados aspectos críticos, considerando que aquello que resulta crítico se relaciona tanto con el objeto de aprendizaje como con quien aprende. En el siguiente apartado se ejemplifica el uso de esta teoría en el diseño de tres tareas.

Nombrar, definir y clasificar en primero de primaria

> Sin experimentar la diferencia es imposible discernir las similitudes. Además de mostrar ejemplos similares, los profesores también deben mostrar no-ejemplos (Lo, 2012, p. 85).

Definir y clasificar son prácticas matemáticas fundamentales que, en geometría, tienen un contexto rico para su desarrollo en educación básica. Para ello, es necesario identificar atributos que caracterizan al objeto geométrico y que son evocados al nombrarlos. En los primeros grados de primaria se transita entre la atención a atributos no geométricos (como el color, ubicación, etc.) hacia los geométricos tales como, por ejemplo, cantidad de lados y relaciones entre ellos (igualdad, paralelismo, perpendicularidad, etc.). Así mismo, se pasa progresivamente de enfocarse en un atributo a enfocarse en varios a la vez.

En primer grado de primaria, uno de los énfasis de la propuesta curricular se hizo en tareas de composición de configuraciones geométricas. Se promovió la exploración y experimentación a través de actividades de construcción en las que era necesario interpretar para construir y para generar representaciones geométricas. Cada lección fue diseñada para implementarse en una hora de clase. En los siguientes ejemplos se usó el tangram incluido como material recortable en el libro de texto.

En la imagen 5 se muestran dos tareas orientadas a la construcción de rectángulos a partir de otras formas geométricas. Estas tareas forman parte de una secuencia de cinco, en las que se promueve la composición de configuraciones geométricas. Además, de manera simultánea, se favorece el desarrollo de habilidades de visualización (Del Grande, 1990; Gutiérrez, 1991) como coordinación ojo-mano, percepción figura-fondo, percepción de relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Por ejemplo, en las tareas, los colores y tamaños de las piezas por construir pueden, o no, coincidir con las del tangram. Además, en algunos casos se muestran las divisiones internas de las configuraciones y en otras, no. Estas decisiones didácticas favorecen procesos de visualización, interpretación de representaciones y construcción de configuraciones.

Respecto a los patrones de variación, en la lección "2. Banderas" (imagen 5) se incorporó el uso del de *contraste* y el de *generalización* para promover el reconocimiento de la forma rectángulo. Los contrastes usados en el diseño fueron: 1) *el ancho no cambia, el largo sí*; 2) *la forma no cambia, la cantidad de piezas que lo componen sí;* 3) *la forma no cambia, la posición sí.*

En esta tarea permanece invariante el número de lados, la relación entre pares opuestos de lados (misma longitud) y la longitud de uno de los lados (la del más corto) del rectángulo. Lo que cambia es el tipo de piezas con que se forma cada rectángulo, la ubicación de las piezas que lo conforman, y el color de las banderas, que no corresponden con los del tangram. También varía la escala entre las configuraciones ilustradas en el libro de texto y las que se obtienen con el tangram. Sin embargo, en todos los casos de la primera parte de la tarea son visibles las divisiones que diferencian las formas que componen cada rectángulo; esto no ocurre en la segunda parte, denominada "Un paso más". El otro patrón es el de *generalización*, pues se espera que el estudiantado enfoque la atención en la forma "rectángulo", la cantidad de lados y la relación (pares opuestos de igual longitud), y pueda reconocer su composición a partir de otras formas geométricas. En las orientaciones para el profesorado se le indica averiguar si los estudiantes conocen e identifican los rectángulos, con preguntas como *¿qué forma tienen las banderas?* También se sugiere ampliar lo realizado en el libro, dando condiciones específicas para crear nuevos rectángulos. Con dos tangram, por ejemplo, construir rectángulos usando dos cuadrados, cuatro triángulos pequeños, cuatro triángulos grandes o los dos cuadrados y los cuatro triángulos pequeños (García *et al.*, 2018b, p. 81).

En el segundo ejemplo, lección "4. Con dos piezas", el énfasis está en reconocer la forma "cuadrado" contrastándola con la de otros polígonos conocidos a través de tareas de construcción usando dos piezas del tangram. El patrón contraste en términos de los aspectos críticos se usó para identificar 1) *misma cantidad de piezas para armar, diferentes formas construidas*; 2) *misma forma, diferente tamaño*; 3) *misma forma, diferente posición*. De manera implícita se inicia con la idea de diagonal, y que dos triángulos rectángulos congruentes forman un cuadrado. Además, estas acciones posibilitan enfocarse en nuevos atributos geométricos: de lados a ángulos, de manera implícita.

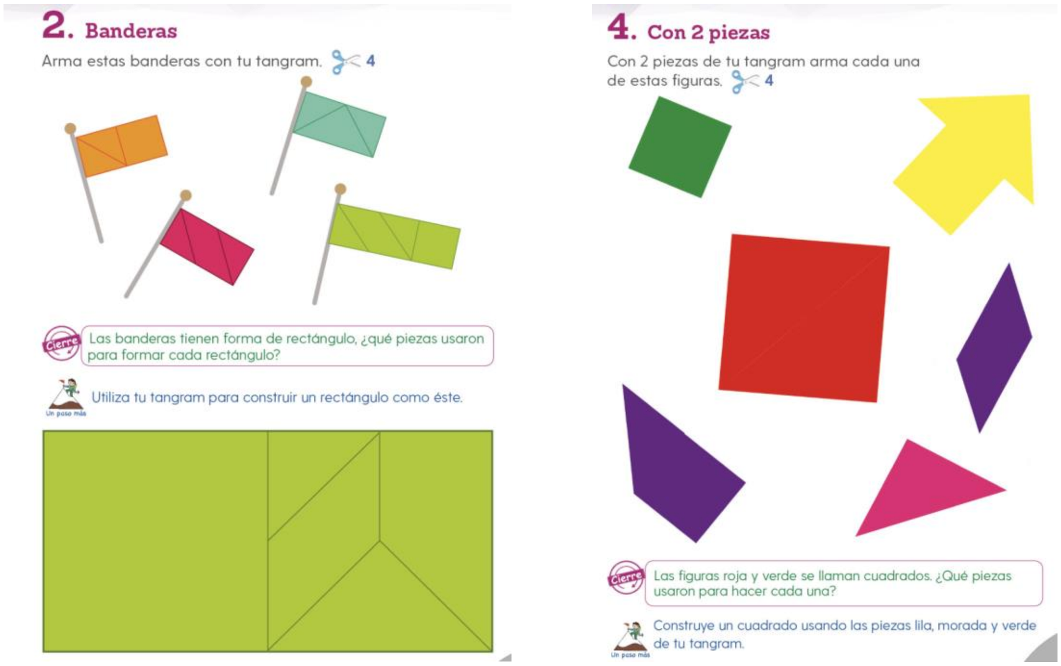


Imagen 5: componer, descomponer y nombrar (García *et al.*, 2018a, p. 51, p. 53)

El último ejemplo, de este mismo grado, es la tarea de la lección "5. Uno no es, ¿cuál es?" (p. 100) orientada a la construcción de definiciones (imagen 6). En particular, se consideró el patrón de *contraste* para promover la clasificación de polígonos a partir de algunos atributos geométricos. La tarea forma parte de una secuencia de cinco, en las que se promueven las prácticas de "definir" y "clasificar" polígonos. En ella se propone un tránsito desde el uso de atributos no geométricos (como el color) hacia atributos propiamente geométricos como características de sus lados –cantidad, relaciones entre lados de la misma figura como congruencia, paralelismo o perpendicularidad–, o de sus ángulos –cantidad, amplitud angular y relaciones de congruencia. Este tránsito se acompaña del uso de ejemplos y no-ejemplos, estrategia central en la teoría para hacer contrastes, que permite enfocar la atención del estudiantado en lo que sí pertenece a una categoría y lo que no. Cabe señalar que, en una secuencia previa a esta tarea, los educandos estudiaron rectángulos, triángulos y cuadrados (imagen 5), analizando atributos como "número de lados", "longitud de lados", "forma de lados rectos o curvos", "amplitud entre dos lados contiguos" en problemas de composición y descomposición de formas.

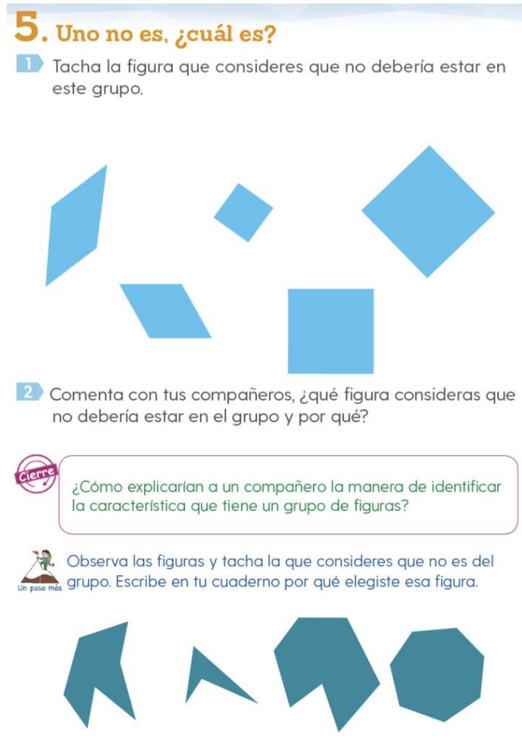


Imagen 6: uso de ejemplos y no-ejemplos para acercarse a la definición (García *et al.*, 2018a, p. 100)

En esta tarea (imagen 6), el color permanece invariante, mientras que se introducen variaciones en otros atributos geométricos. La primera parte de la tarea se enfoca en cuadriláteros; la segunda, que se plantea como "Un paso más", amplía el repertorio a otros polígonos a fin de atender dos dimensiones de variación en términos de "número de lados" y "amplitud de ángulos" de polígonos. Se fomenta el análisis de más de una respuesta correcta en función de la característica geométrica a la que el estudiantado ponga atención, en términos de los aspectos críticos. Estas aclaraciones se le comunican al profesorado para que sean consideradas durante la implementación, sugerencias de preguntas como "¿qué tienen en común las figuras del grupo?, ¿cómo podrían identificar si una figura no es de ese grupo?" o "cuando todos hayan elegido una figura, pregúnteles: ¿cuál no es?" (García *et al.*, 2018b, p. 113). Estas intervenciones buscan promover el contraste, entre lo que pertenece y lo que no pertenece a una clase (*e. g.*, cuadriláteros), como recurso para la formulación de generalizaciones a partir de similitudes y diferencias, pasando de enfocar la atención en rasgos perceptibles a características estructurales de las figuras.

Habilidades como componer y descomponer, analizar y predecir transformaciones, identificar las partes en el todo, imaginar trazos donde no los hay, todas ellas, son necesarias para los tres ejemplos de tareas de aritmética, álgebra y trigonometría. Los primeros acercamientos podemos iniciarlos desde edades tempranas con actividades como las que mostré en esta sección. Sin embargo, la implementación de estas propuestas en las aulas, requieren de inversiones en acompañamiento docente continuo, de intercambios y de investigaciones a mediano y largo plazo para valorar los impactos reales e incorporar adecuaciones necesarias. Todo libro de texto es siempre mejorable.

De las propuestas a los salones de clase: retos y oportunidades

La investigación con docentes de educación primaria señala que, aunque ellos reconocen la importancia de desarrollar el pensamiento geométrico para la resolución de problemas, existen limitaciones en su formación (*e. g*., Hourigan y Leavy, 2017) y en el uso de materiales didácticos pertinentes para sus aulas. Los libros de texto son un recurso para acercar resultados de investigación a más aulas, sin embargo, se requiere de programas de formación paralelos a la implementación de estos materiales. En Sánchez y Sandoval (2024) mostramos cómo un mismo docente implementa las mismas lecciones, antes y después de un trabajo de investigación-acción colaborativa; y los resultados son contrastantes. Lo mismo sucede en otros contextos en los que actualmente estamos analizando datos. Para acercar a las aulas estas ideas de enseñanza y aprendizaje de la geometría, el profesorado necesita vivenciar estas nuevas formas de enseñar y de aprender, esto es, tener un acompañamiento continuo para compartir experiencias, inquietudes y profundizar en sus conocimientos geométricos especializados. Así que, uno de los grandes retos sigue siendo la formación. Otro, es el seguimiento a la implementación de estas propuestas educativas, de manera longitudinal para valorar el impacto real en las aulas, en los diversos contextos educativos.

Retos y oportunidades en los contextos actuales

La geometría constituye una parte fundamental del pensamiento matemático y es transversal a otras áreas de las matemáticas y disciplinas. En los contextos educativos actuales, se está impulsando el trabajo interdisciplinario, a través de metodologías como aprendizaje por problemas o por proyectos. Desarrollar el pensamiento geométrico en estos contextos tiene nuevas oportunidades, pero también desafíos.

En las secciones anteriores mostré cómo varias de las dificultades identificadas en tareas de aritmética, preálgebra y precálculo involucran procesos geométricos que suelen permanecer poco visibles en el currículo y en las aulas. Por su parte, los ejemplos de un libro de texto analizados evidencian el potencial de este tipo de tareas para favorecer la visualización, la composición y descomposición de formas, así como la definición y clasificación de formas a través del reconocimiento de relaciones espaciales. Uno de los retos sigue siendo la construcción de puentes entre investigación, desarrollo curricular, formación docente y diseño de materiales para las aulas, de tal manera que la geometría sea reconocida como un componente importante del pensamiento matemático y no como un contenido aislado. Otro desafío se relaciona con los contextos interdisciplinarios que abren nuevas líneas de investigación para indagar sobre el desarrollo del pensamiento geométrico y el diseño de propuestas viables para las aulas. La invitación es a seguir fortaleciendo los trabajos colaborativos entre expertos de diversas áreas.

REFERENCIAS

Ávila, A., Carrasco, A., Gómez, A., Guerra, M., López, G. y Ramírez, J. (coords.) (2013). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México, 2002-2011: matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y lenguas extranjeras*. Anuies y Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Camargo, L. y Sandoval, I. (2017). Acceso equitativo al razonamiento científico mediante la tecnología. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 179-211. https://doi.org/10.17227/01203916.73rce177.209

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). McMillan Publishing Company.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Kluwer Academic Publishers.

Flores, A. (1999). Las representaciones geométricas como un medio para cerrar la brecha entre la aritmética y el álgebra. *Educación Matemática*, *11*(3), 69-78.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.

García, S., Lozano, M. D., Mendoza, T., Palmas, S., Sandoval, I. y Schulmaister, M. (2018a). *Matemáticas. Primer grado* (Lozano, M. D., coord.). Secretaría de Educación Pública.

García, S., Lozano, M. D., Mendoza, T., Palmas, S., Sandoval, I., y Schulmaister, M. (2018b). *Matemáticas. Libro para el maestro. Primer grado* (Lozano, M. D., coord.). Secretaría de Educación Pública.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En E. Filloy y L. Puig (eds.), *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 44-59). Cinvestav.

Hourigan, M. y Leavy, A. M. (2017). Preservice primary teachers' geometric thinking: Is pre-tertiary mathematics education building sufficiently strong foundations? *The Teacher Educator, 52*(4), 346-364.

Huang R. y Li, Y. (eds.) (2017). *Teaching and learning mathematics through variation: Confucian heritage meets Western*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-782-5

Johnston-Wilder, S. y Mason, J. (eds.) (2005). *Developing thinking in geometry*. Paul Chapman Educational Publishing.

Kullberg, A., Runesson Kempe, U. y Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM*, *49*, 559-569.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Acta Universitatas Gothenburgensis.

Lockhart, P. (2012). *Measurement.* Harvard University Press.

Lowrie, T., Harris, D., Logan, T. y Hegarty, M. (2019). The impact of a spatial intervention program on students' spatial reasoning and mathematics performance. *The Journal of Experimental Education, 89*(2), 259-277. doi:10.1080/00220973.2019.1684869

Lozano, M. D., Sandoval, I. y Coles, A. (2018). Re-imagining primary mathematics: Resources supporting National Reform efforts in Mexico and England. En Y. Shimizu y R. Vithal (eds.), *ICMI Study 24. School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities* (pp 376-380). ICMI.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1948). *La representación del espacio en el niño*. Morata.

Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: A critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of Education*, *35*(1), 69-87. https://doi.org/10.1080/0305764042000332506

Sánchez, S. y Sandoval, I. (2024). Hacia el fortalecimiento del conocimiento geométrico especializado. Una propuesta de desarrollo profesional basada en la reflexión y acción colaborativa para profesores de primaria. En J. García y R. Meníndez (coords.), *Investigación e incidencia socioeducativa por campos de formación en el posgrado de la UPN, 2018-2021* (pp. 331-353). México: Universidad Pedagógica Nacional.

Sandoval, I. y Camargo, L. (2021). Aprendizaje de equidistancia a través de la variación: un estudio con estudiantes de primaria. *Enseñanza de las Ciencias. Investigaciones didácticas, 39*(2), 63-81.

Sandoval, I. y Ortiz, A. (2023). Representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales y su relación con el desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas (6-8 años). *Perfiles Educativos, 45*(180), 71-90.

Sandoval, I. y Preciado A. (en prensa). Actividades de aprendizaje de las matemáticas en primaria: una mirada a través de la Teoría de la variación del aprendizaje. En F. Cordero, I. Sandoval y U. Xolocotzin (eds.), *50 años comprometidos con la Matemática Educativa en México. Perspectivas, investigaciones, experiencias y contribución social* (pp. 527-559). Editorial SOMIDEM.

Sarama, J. y Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM*, *47*(3), 319-329.

Swokowski, E. y Cole, J (1986, 2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Thompson.

UNESCO (2020). *Análisis curricular del estudio regional comparativo y explicativo* (ERCE 2019) México: documento nacional de resultados. REALC/UNESCO Santiago.

Encuentro de
GEOMETRÍA
y sus APLICACIONES

17 al 19 de junio de 2026

Cursillo

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: reflexiones sobre la atención a la diversidad en la enseñanza de la geometría

Jenny Acevedo-Rincón, Nayarith Vásquez, Víctor Durán, Brenda Ávila, Karla Molina
Universidad Industrial de Santander
jepaceri@uis.edu.co, nayarith2202864@correo.uis.edu.co, victor2230142@correo.uis.edu.co, brenda2201810@correo.uis.edu.co, Karla2231934@correo.uis.edu.co

El curso descrito en este documento presenta una formación especializada para docentes y profesionales de la educación superior, centrada en la didáctica de la geometría inclusiva. El programa rompe con la tradición "visual" en matemáticas para combatir el capacitismo sistémico que suele excluir a estudiantes con discapacidad visual de las carreras STEM. A través del marco DUA, se diseñan entornos de aprendizaje con múltiples formas de representación y acción. El componente disciplinar se aborda desde el modelo MTSK, profundizando en el conocimiento de los temas geométricos y su estructura pedagógica. Los participantes explorarán el uso de geometría sintética, analítica y descriptiva mediante el uso de recursos tiflotecnológicos, modelos 3D y lenguaje matemático accesible, garantizando que el rigor académico universitario se mantenga intacto mientras se eliminan las barreras de acceso.

Introducción

Es fundamental que la investigación en Educación Matemática no se quede en el plano de la abstracción. Vincular modelos teóricos con escenarios reales de aprendizaje permite transformar conceptos complejos en herramientas de diagnóstico y mejora para el aula. Estos marcos no solo sirven para describir la práctica, sino también para potenciarla, ofreciendo al docente una estructura sólida para tomar decisiones que impacten directamente en la comprensión de sus estudiantes

Objetivo general del curso

Desarrollar competencias docentes especializadas para la enseñanza de la geometría en educación superior, integrando los marcos del DUA y el MTSK bajo una perspectiva anticapacitista, que permita diseñar e implementar secuencias

Acevedo-Rincón, J., Vásquez, N., Durán, V., Ávila, B. y Molina, K. (2026). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: reflexiones sobre la atención a la diversidad en la enseñanza de la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 39-43. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

didácticas accesibles para estudiantes con discapacidad visual, las cuales promueven el pensamiento espacial y el razonamiento deductivo sin dependencia del canal visual.

Organización del curso

Perspectiva y sensibilización: "En los zapatos del otro"

Antes de enseñar, el docente debe entender la carga cognitiva de la ceguera (Acevedo-Rincón *et al.* 2023). No se trata de "tapar los ojos", sino de analizar el acceso a la información (tabla 1).

Actividad	Ejemplificación
Análisis del sesgo visual	Cómo el lenguaje docente (*e. g.*, "este punto", "aquí se ve") excluye al estudiante
Mapeo mental	Ejercicios de orientación espacial y construcción de mapas mentales sin referentes visuales
Capacitismo en la academia	Debate sobre las barreras infraestructurales y metodológicas en las facultades de ciencias

Tabla 1: actividades de sensibilización

Herramientas de registro: regleta y punzón en geometría

La regleta braille es el "cuaderno" del estudiante. En geometría universitaria, su uso es crítico para el desarrollo de la notación matemática y la tabulación de datos (tabla 2).

Actividad	Ejemplificación
Notación matemática	Manejo de la simbología braille para símbolos (*e. g.*, ángulos, segmentos y potencias)
Tabulación de datos	Registro de medidas obtenidas mediante herramientas táctiles para su posterior procesamiento
Capacitismo en la academia	Debate sobre las barreras infraestructurales y metodológicas en las facultades de ciencias

Tabla 2: actividades con herramienta de registro

Didáctica de la geometría plana (práctica de conceptos)

Aplicamos el marco MTSK (Carrillo-Yáñez *et al.*, 2018) (conocimiento especializado del contenido) para transformar conceptos visuales en experiencias hápticas (tabla 3).

Concepto	Recurso/actividad
Teorema de Pitágoras	Uso de rompecabezas de áreas (tipo puzle de Perigal) donde el estudiante compruebe físicamente que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos llena el cuadrado de la hipotenusa
Semejanza de triángulos	Exploración de figuras a escala con papel microencapsulado (figuras con relieve) Verificación de la proporcionalidad de lados mediante el uso de cintas métricas adaptadas
Círculo y elementos notables	Uso de compases adaptados y cuerdas Identificación física de la diferencia entre radio, cuerda, secante y tangente mediante el tacto en tableros de dibujo positivo

Tabla 3: conceptos de geometría euclidiana

El profesor universitario debe desarrollar un conocimiento de la estructura matemática que le permita describir una curva no por su forma (*e. g.*, "es como una U"), sino por su propiedad intrínseca (*e. g.*, como lugar geométrico) (Fernández-Alcaraz y Vázquez-Vílchez, 2021). Para ello, se mencionan a continuación algunos recursos didácticos frecuentemente utilizados (tabla 4).

Recurso	Objetivo
Geoplano circular y cuadrado	Permiten la construcción rápida de polígonos y redes de coordenadas.
Papel de dibujo positivo (Thermoform)	Permite que, al trazar con un bolígrafo, la línea suba en relieve instantáneamente.
Modelos 3D interseccionales	Sólidos que permiten entender secciones cónicas (elipses, parábolas) mediante el desensamble de piezas.
Navegación por teclado	Se pueden usar las flechas para moverse entre objetos. El *software* describe las propiedades (*e. g.*, "Punto A en la intersección de f y g").

GeoGebra dinámico, vía audio	Existe una función experimental de *sonificación* (es el proceso de convertir datos matemáticos en señales auditivas no verbales) (Sánchez y Flores, 2004; Meyer, Rose y Gordon, 2014). Al recorrer una función con el cursor, el tono del sonido sube o baja según el valor de la ordenada, permitiendo al estudiante "escuchar" la forma de una parábola o una sinusoide.
Producción táctil	Se utiliza una impresora 3D para sólidos o un horno fuser (papel microencapsulado) para gráficos 2D en relieve.

Tabla 4: recursos didácticos para la enseñanza de geometría plana

CONSIDERACIONES

Desde el marco del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), el docente no solo debe saber usar el *software*, sino entender cómo la sonificación afecta el conocimiento del estudiante: (i) conocimiento de los temas, donde el profesor debe ser capaz de diseñar funciones cuyas variaciones sonoras sean lo suficientemente claras para que el estudiante identifique propiedades como la periodicidad o la asimetría; y, (ii) conocimiento de la enseñanza, de manera que pueda elegir el momento adecuado para pasar del material táctil (geoplano) a la sonificación, lo que asegura que el estudiante ya tiene una noción espacial de lo que está escuchando.

REFLEXIONES

El curso no solo entrega herramientas técnicas; busca transformar la identidad profesional del docente. Esto se realizará dentro de tres ejes de reflexión: la tiranía de lo visual en el rigor matemático, el material didáctico como derecho, no como caridad, y la evolución del MTSK en la inclusión.

Al enseñar a un estudiante ciego, el docente descubre que el rigor matemático reside en la estructura lógica y la propiedad intrínseca, no en el dibujo. Esta reflexión ayuda al profesor a limpiar su propio conocimiento de "vicios visuales" y explicaciones vagas. Por lo tanto, la primera reflexión busca responder a la pregunta ¿es la "visión" una condición necesaria para la abstracción geométrica, o es simplemente el canal que hemos privilegiado históricamente?

Por otra parte, bajo el marco del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) (CAST, 2018), un gráfico en relieve o una sonificación no es un "favor" para el estudiante con discapacidad; es la garantía de su derecho a la autonomía intelectual. El curso debe cuestionar si la falta de recursos es un límite técnico o una barrera capacitista. De lo cual se deriva la pregunta ¿mis recursos táctiles están diseñados para que el estudiante "entienda lo que yo veo" o para que él "construya su propio conocimiento"?

Por último, el docente debe reconocer que el proceso de aprendizaje háptico tiene tiempos y secuencias distintas. La reflexión se centra en ajustar la gestión de la clase sin reducir la complejidad del contenido universitario. De manera que la pregunta orientadora estará enfocada bajo el cuestionamiento ¿cómo cambia mi conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas cuando el estudiante no utiliza el canal visual?

Referencias

Acevedo-Rincón, Jenny Patricia, Flórez-Pabón, Campo Elías y Lizarazo-Cárdenas, Ever Alberto (2023). Investigaciones sobre trastorno del espectro autista: un análisis de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, 87, 347-368. Epub enero 01, 2023.https://doi.org/10.17227/rce.num87-12116

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

CAST (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. http://udlguidelines.cast.org

Fernández-Alcaraz, J. J. y Vázquez-Vílchez, M. (2021). Enseñanza de la geometría para alumnos con discapacidad visual: una revisión sistemática. *Revista de Investigación en Educación Matemática*.

Meyer, A., Rose, D. H. y Gordon, D. (2014). Universal design for learning: Theory and practice. CAST Professional Publishing.

Sánchez, J. y Flores, H. (2004). Audio-based virtual environments for the blind. *Proceedings of the 6th international ACM SIGACCESS conference on Computers and accessibility*.

Encuentro de
GEOMETRÍA
y sus **APLICACIONES**

17 al 19 de junio de 2026

Comunicaciones

Las mochilas arhuacas: una propuesta para la enseñanza de transformaciones geométricas en grado sexto

Sofía Barrios, Lina Rubiano, Ana Suspes y Lina Ómbita
Universidad Pedagógica Nacional
sbarriosz@upn.edu.co, lmrubianoh@upn.edu.co, aksusupesh@upn.edu.co, lpombitap@upn.edu.co

La propuesta didáctica que se presenta en este documento está orientada a la enseñanza de transformaciones en el plano, específicamente la traslación y la reflexión, para estudiantes de grado sexto. La propuesta se estructura a partir de una secuencia de tareas, con enfoque etnomatemático, cuya base es la geometría presente en el tejido de las mochilas arhuacas. Se implementó en la clase de geometría de tres cursos de sexto grado en el Instituto Pedagógico Nacional, con alrededor de 32 estudiantes en cada curso. Es objetivo de la propuesta, por una parte, articular saberes culturales con contenidos matemáticos para promover aprendizajes significativos y contextualizados y, por otra, fomentar la comunicación matemática mediante el análisis de patrones figurales en los tejidos de las mochilas arhuacas.

Introducción

La enseñanza de la geometría en la educación básica colombiana enfrenta el desafío de trascender de la memorización de definiciones y procedimientos a tener experiencias significativas contextualizadas y cercanas a los estudiantes. Desde esta mirada, la propuesta, aquí presentada, surge como una alternativa para abordar transformaciones en el plano a través de una secuencia didáctica fundamentada en un enfoque etnomatemático. Con Aroca (2009) como referencia, en la propuesta se articulan los conocimientos matemáticos con los saberes culturales y ancestrales de la comunidad arhuaca, que se basan en los patrones geométricos presentes en el tejido de sus mochilas tradicionales.

Las actividades de la propuesta se desarrollaron en cuatro sesiones diseñadas para integrar momentos de aprendizaje conceptual, práctico y cultural. La primera aproximación de los estudiantes a la propuesta fue de carácter cultural, al contarles acerca de mitos sobre el tejido de las mochilas arhuacas. Posteriormente, por medio del *software* GeoGebra (de geometría dinámica), se realizó una exploración visual y manipulativa de las transformaciones geométricas, para favorecer una comprensión experimental de los conceptos. El seguimiento

Barrios, S., Rubiano, L., Suspes, A. y Ómbita, L. (2026). Las mochilas arhuacas: una propuesta para la enseñanza de transformaciones geométricas en grado sexto. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 47-53. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

de la exploración se hizo mediante un documento que integraba el contexto cultural de las mochilas arhuacas y la conceptualización de los invariantes de las transformaciones en el plano, descubiertas al explorar con GeoGebra.

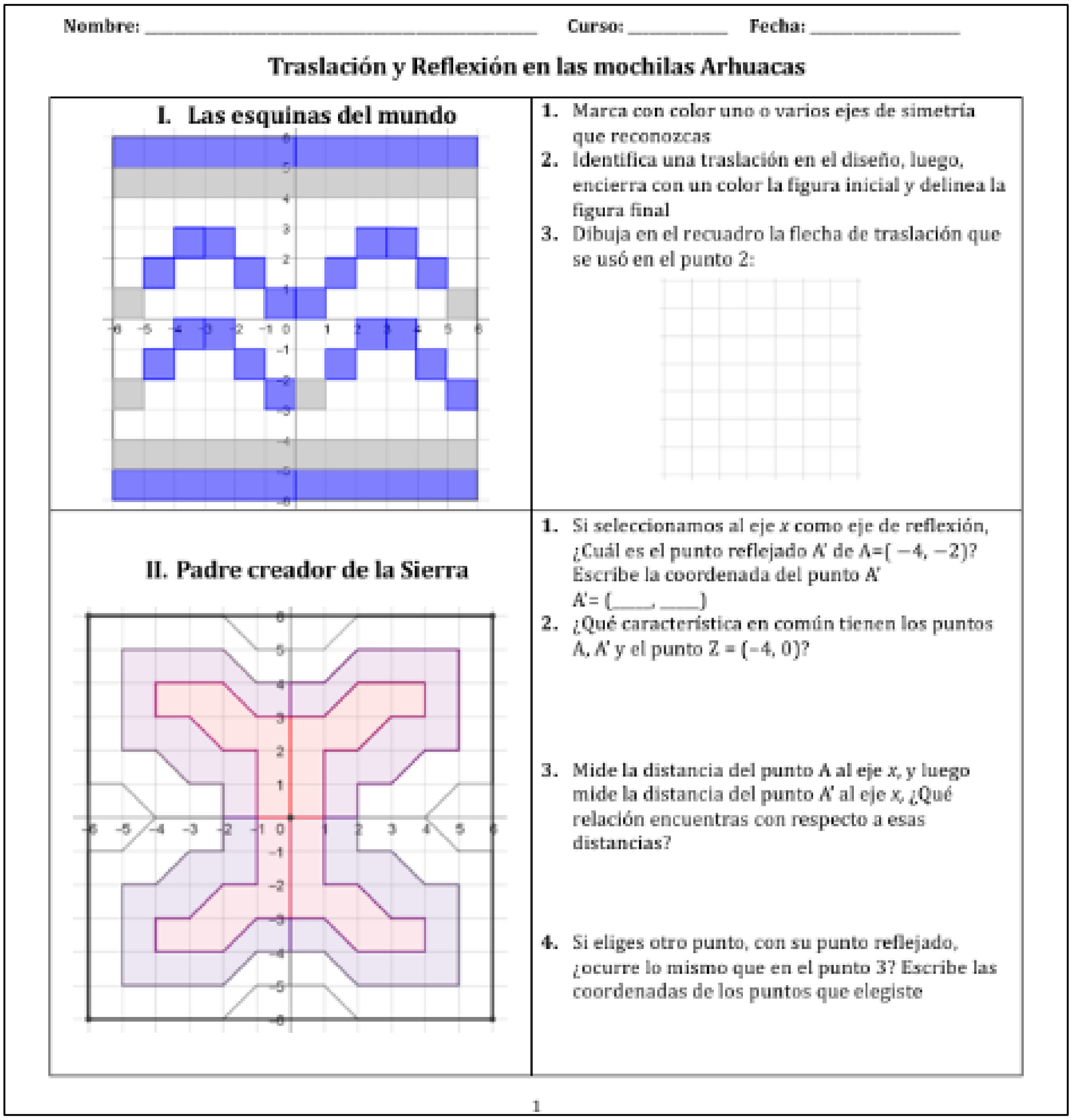
En el siguiente momento, los estudiantes elaboraron sus propios diseños, aplicando traslaciones y reflexiones, primero sobre una hoja milimetrada y luego mediante una representación concreta en malla plástica con hilos de colores. Esta experiencia práctica pretendía fortalecer no solo la comprensión geométrica sino también impulsar el desarrollo de habilidades motrices, de atención al detalle y del pensamiento espacial. Al final, para promover la comunicación matemática y la valoración del trabajo propio y colectivo, los estudiantes realizaron la socialización de los productos mediante la elaboración de pósteres.

La propuesta pretende enriquecer el aprendizaje geométrico ya que las actividades planteadas fueron diseñadas reconociendo distintos errores, dificultades y obstáculos comunes en el aprendizaje de las isometrías, presentados en Montes (2012) y Gutiérrez et al. (1996). Esto con el fin de que los estudiantes lograran caracterizar adecuadamente cada transformación, lo cual se evidenciaría principalmente a través la habilidad comunicativa que requiere el estudiante para el desarrollo del proyecto. Además, también se promueve el respeto por la diversidad cultural y la integración de saberes ancestrales en el aula. Se justifica esto en la necesidad de transformar las prácticas de enseñanza tradicionales, reconociendo que la matemática puede enseñarse desde contextos culturalmente significativos favoreciendo aprendizajes más profundos y contextualizados.

Descripción de la propuesta y su implementación

La propuesta se implementó en cuatro sesiones de clase, de 90 minutos cada una, en las que, en nuestro rol docente, actuamos como guías del proceso que esperábamos que siguieran los estudiantes.

Al inicio de la primera sesión, narramos la historia de los arhuacos. Presentamos los diseños que se utilizarían en clase y recreamos la forma en que los estudiantes podrían dibujarlos con ayuda del *software* GeoGebra. Luego, a la vez que íbamos presentando y explicando los cuatro diseños tomados de las mochilas arhuacas, los estudiantes iban resolviendo una guía de trabajo en parejas (figura 1).


Nombre: ______________________ Curso: __________ Fecha: ______________

Traslación y Reflexión en las mochilas Arhuacas

I. Las esquinas del mundo	1. Marca con color uno o varios ejes de simetría que reconozcas 2. Identifica una traslación en el diseño, luego, encierra con un color la figura inicial y delinea la figura final 3. Dibuja en el recuadro la flecha de traslación que se usó en el punto 2:
II. Padre creador de la Sierra	1. Si seleccionamos al eje *x* como eje de reflexión, ¿Cuál es el punto reflejado A' de A=(−4, −2)? Escribe la coordenada del punto A' A'= (____, ____) 2. ¿Qué característica en común tienen los puntos A, A' y el punto Z = (−4, 0)? 3. Mide la distancia del punto A al eje *x*, y luego mide la distancia del punto A' al eje *x*, ¿Qué relación encuentras con respecto a esas distancias? 4. Si eliges otro punto, con su punto reflejado, ¿ocurre lo mismo que en el punto 3? Escribe las coordenadas de los puntos que elegiste

1

Figura 1: ejemplo de ejercicios de la guía presentada a los estudiantes

La guía contiene preguntas centradas en la identificación de los invariantes de la reflexión y la traslación en los diseños. Una vez finalizada la presentación y resuelta la guía, cada estudiante inició, de manera individual, su propio diseño basado en los cuatro modelos presentados. En hoja milimetrada, dibujaron un cuadrado de $12\ \mathrm{cm} \times 12\ \mathrm{cm}$, realizaron el diseño aplicando reflexiones y traslaciones de los patrones. Para ello utilizaron entre dos y cuatro colores, teniendo en cuenta que el diseño posteriormente sería tejido.

En la segunda sesión, se realizó la revisión de los diseños. La coherencia conceptual de cada uno definía el inicio de su realización en una malla de $12 \text{ unidades } \times 12 \text{ unidades}$ (material entregado por nosotras), utilizando lana de los colores correspondientes. En ese momento, brindamos una explicación práctica sobre el proceso de tejido y dimos las instrucciones para la siguiente sesión (figura 2).

Figura 2: ejemplos de ~~algunos~~ diseños en papel milimetrado y el respectivo tejido realizado por estudiantes

Cada estudiante, de manera individual, elaboró una cartelera que recogía su trabajo de las dos primeras sesiones. La cartelera debía incluir título, diseño en hoja milimetrada, tejido, dibujo de los patrones figurales utilizados, nombres de las mochilas arhuacas tomadas como referencia y listado de las transformaciones aplicadas en el tejido (figura 3).

Figura 3: ejemplos de carteleras finales entregadas por los estudiantes

Finalmente, en la cuarta sesión, cada estudiante presentó su diseño y tejido, apoyándose en la cartelera elaborada. Durante la exposición, nombraron los diseños de mochilas arhuacas que sirvieron como inspiración y explicaron los invariantes de la reflexión (eje de simetría, colinealidad y equidistancia) y de la traslación (directriz de traslación) que aplicaron en la construcción del tejido. Para ello, utilizaron los convenios de comunicación acordados en las sesiones anteriores, con lo cual evidenciaron apropiación tanto del contenido matemático como del contexto cultural trabajado.

Dificultades de los estudiantes

Una de las mayores dificultades observadas en los estudiantes fue la verbalización de ideas; es decir, si bien los estudiantes comprendieron la forma operativa o procedimental de los conceptos, se les dificultó explicar lo que hacían, lo cual afectó directamente la comunicación efectiva de las ideas.

Dificultades del rol docente

Fue desafiante dar coherencia a las nociones que surgen naturalmente en los estudiantes al introducir las transformaciones. En el caso de la reflexión, por ejemplo, los estudiantes tienden a interpretarlo como un movimiento que se sale del plano. Como profesores puede ser problemático utilizar este tipo de acercamiento~~s~~ a conceptos. Por ello, termina siendo necesario encontrar diferentes estrategias que faciliten el paso entre estas nociones del estudiante útiles en un principio, pero que pueden convertirse en obstáculos para ideas más precisas para la conceptualización (invariantes).

Aprendizajes de los estudiantes

Finalmente, los estudiantes realizaron traslaciones y reflexiones para crear las diferentes figuras tradicionales que luego representaron en sus tejidos. Por medio de la exposición pública realizada, se evidenció la apropiación del contexto cultural y del contenido matemático abordados.

Evaluación

La evaluación se llevó a cabo mediante rúbricas adaptadas del Sistema Institucional de Evaluación de los Estudiantes (SIEE), centradas en el objeto matemático trabajado en las cuatro sesiones. Se evaluaron tres actividades: la guía de transformaciones, el diseño en hoja milimetrada y tejido, y la exposición (cartel y comunicación oral). Las dos primeras fueron evaluadas a través de heteroevaluación; la última, mediante coevaluación, heteroevaluación y autoevaluación.

Conclusiones

Tras realizar la aplicación de la unidad didáctica llegamos a las siguientes conclusiones.

Incluir un contexto etnomatemático y emplear material concreto favoreció la motivación y el interés de los estudiantes, pues promovió la comprensión de los conceptos geométricos y su participación. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el uso de material concreto (hoja milimetrada, lanas, mallas) abre paso a la posibilidad de que los estudiantes no puedan participar adecuadamente en el desarrollo de las actividades debido a que no disponen del mismo. Por ello, es recomendable tener material extra para evitar estas situaciones. También es necesario tener en cuenta que el exceso de actividades planeadas para una sola sesión de clase hace que el tiempo destinado a cada una se vea afectado. Es necesario distribuir mejor el tiempo para cada tarea, partiendo de la claridad de lo que se quiere lograr para cada sesión.

Por otro lado, el uso de preguntas orientadoras jugó un papel esencial en el aula, pues nos permitió: primero, evitar que los estudiantes al tejer perdieran de vista los objetos matemáticos (transformaciones en el plano) que estábamos abordando; segundo, afianzar y evidenciar la apropiación de conceptos en los estudiantes, pues les exigía verbalizar las ideas que tenían en mente.

Siguiendo esta línea, concluimos que la verbalización de los conocimientos es una herramienta clave para la evaluación, pues permite evidenciar la apropiación efectiva de los saberes, facilita la estructuración del pensamiento y la expresión clara de los conceptos adquiridos. Además, el uso de la rúbrica también tuvo un papel fundamental para orientar el aprendizaje y la evaluación de manera clara y estructurada, pues nos permitió verificar que los objetivos que queríamos alcanzar se estuvieran cumpliendo con cada entrega. Además, facilitó a los estudiantes la comprensión de los criterios de desempeño esperados, facilitando la autoevaluación y la coevaluación.

Para terminar, uno de los mayores desafíos que enfrentamos fue el proceso de transposición didáctica; es decir, lograr crear un equilibrio entre las nociones intuitivas de los estudiantes sobre los objetos matemáticos y la precisión conceptual necesaria para evitar el surgimiento de obstáculos en el aprendizaje, esto sin perder de vista el interés de ellos y el nivel conceptual exigido para el grado escolar. Nuestra propuesta partió de un objetivo matemático escolar; procuramos no reducir el saber ancestral a una simple herramienta pedagógica, sino reconocerlo como una forma legítima de conocimiento, con sentido propio dentro de su cosmovisión.

REFERENCIAS

Aroca, A. (2009). *Geometría en las mochilas arhuacas: por una enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva cultural*. Universidad del Valle.
Recuperado de: https://doi.org/10.25100/peu.553

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Editorial Síntesis, España.

Montes, S. (2012) *Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego Pac-Man*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/10559/sergioandresmontesalarcon.2012.pdf

MATERIAL MANIPULATIVO PARA FAVORECER EL ESTUDIO DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DE SIMETRÍA Y TRASLACIÓN EN ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL

Andrea Caicedo y Andrés Chaves
Universidad de Nariño
Aacaicedo27@gmail.com, Ancbel@yahoo.es

Se presentan apartes de un proyecto de semilleros de investigación avalado por la Vicerrectoría de Investigaciones y de Interacción Social de la Universidad de Nariño. El proyecto trata del diseño de un material manipulativo accesible para enseñar transformaciones geométricas a estudiantes con discapacidad visual, remplazando la mediación visual tradicional. Diversos estudios evidencian que estudiantes con discapacidad visual enfrentan dificultades en el aprendizaje de geometría debido al enfoque visual predominante y a la falta de recursos adaptados. Esta situación limita su comprensión de conceptos relativos al espacio y su participación en el aula. Por ello, el proyecto busca desarrollar una herramienta táctil que facilite el aprendizaje de manera inclusiva. La propuesta pretende responder a distintas formas de percepción sensorial, promoviendo el acceso al conocimiento. Además, se busca fortalecer la autonomía, la motivación y la equidad educativa. Para ello, se realizará una revisión bibliográfica y se diseñará un material manipulativo funcional y pertinente para contextos escolares.

JUSTIFICACIÓN

En un curso universitario de braille y de ábaco, tomado por uno de los presentadores de esta propuesta, que ofrece la Universidad de Nariño, se pudo observar algunas dificultades que enfrentan los estudiantes con discapacidad visual para realizar operaciones aritméticas básicas. Esa experiencia ha llevado a cuestionar cómo se enseña la geometría, ya que esta área depende en gran parte de la visualización, lo que representa un reto para estudiantes con discapacidad visual. Posteriormente en un curso denominado Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas, de la Universidad de Nariño, se pudo identificar que existen muy pocas investigaciones y materiales adecuados para la enseñanza de la geometría en este contexto.

Caicedo, A. y Chaves, A. (2026). Material manipulativo para favorecer el estudio de las transformaciones geométricas de simetría y traslación en estudiantes con discapacidad visual. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 55-60. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

De otro lado, aunque la Ley 1618 de 2013 y el Decreto 1421 de 2017 establecen la obligación de garantizar una educación inclusiva para estudiantes con discapacidad, en la práctica aún existen limitaciones para su cumplimiento efectivo. También es pertinente tener en cuenta que, en el área de geometría, los métodos tradicionales de enseñanza dificultan el aprendizaje de estudiantes con discapacidad visual, debido a la ausencia de materiales didácticos adaptados que permitan el acceso a los conceptos de manera adecuada.

A partir de lo anterior surgió la idea de crear un material manipulativo que facilite el aprendizaje de las transformaciones geométricas, específicamente simetría y traslación, en estudiantes con discapacidad visual.

Propósito

Desarrollar un material manipulativo inclusivo que facilite la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas de simetría y traslación en estudiantes con discapacidad visual de tercer grado de primaria.

Metodología

En la primera etapa se propone realizar un estado del arte a partir de revistas iberoamericanas de educación matemática sobre la enseñanza de la geometría a estudiantes con discapacidad visual, en los últimos 15 años. En la segunda etapa se plantea analizar los artículos seleccionados con el fin de identificar sus aportes y limitaciones en la enseñanza de la geometría. En la tercera etapa se contempla el diseño de un prototipo de material manipulativo orientado a la enseñanza de la simetría y la traslación en estudiantes de tercer grado de primaria. Finalmente, en la cuarta etapa se propone validar el prototipo con expertos en educación especial, con el objetivo de identificar posibles mejoras.

Estado del arte

El estado del arte se realizó a partir de la revisión de artículos, tesis y documentos relacionados con la enseñanza de la geometría en contextos de educación inclusiva. Este análisis permitió identificar cómo se ha abordado la discapacidad visual y el uso de materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas.

En relación con la discapacidad visual, diferentes estudios destacan que el aprendizaje de estos estudiantes depende en gran medida de canales sensoriales alternativos como el tacto y la audición, lo que hace necesario adaptar los recursos educativos (Núñez, 2001).

Por otra parte, en el campo de la educación inclusiva, se reconoce la importancia de implementar estrategias pedagógicas que respondan a la diversidad del aula, como el uso de material manipulativo, el aprendizaje cooperativo y las adaptaciones curriculares (Infante, 2010).

En cuanto a la enseñanza de la geometría, se ha encontrado que el uso de material manipulativo favorece la comprensión de conceptos relativos al espacio, ya que permite a los estudiantes interactuar de manera directa con los objetos de estudio (Flores *et al.*, 2013).

Sin embargo, a pesar de estos aportes, se evidencia una falta de propuestas que integren la enseñanza de las transformaciones geométricas con materiales accesibles para estudiantes con discapacidad visual (Alape Rodríguez, 2013).

HALLAZGOS DEL ESTADO DEL ARTE

Como principales hallazgos, en primer lugar, se encontró que existe bastante investigación sobre discapacidad visual y educación inclusiva, pero estas se enfocan más en aspectos generales que en contenidos específicos como la geometría (Núñez, 2001; Infante, 2010).

En segundo lugar, se identificó que el material manipulativo es considerado una herramienta importante para el aprendizaje, especialmente en estudiantes con discapacidad visual, ya que facilita la comprensión a través del tacto (Flores *et al.*, 2013).

En tercer lugar, se evidenció que las transformaciones geométricas sí han sido estudiadas, pero no se han trabajado de manera específica en contextos de educación inclusiva.

Finalmente, se encontró un vacío importante en las investigaciones, ya que hay pocos estudios que integren discapacidad visual, material manipulativo y enseñanza de la geometría, lo que justifica el desarrollo de este proyecto (Miyauchi, 2020).

Diseño del material

El material manipulativo diseñado consiste en un tablero táctil acompañado de piezas móviles en relieve, cuyo propósito es facilitar la comprensión de las transformaciones geométricas, específicamente la simetría y la traslación. Este recurso permite a los estudiantes con discapacidad visual interactuar a través del tacto, favoreciendo la representación de figuras geométricas y la realización de transformaciones de manera concreta y significativa.

El proceso de diseño partió de la construcción de un plano que sirvió de base inicial, en el sentido de que permitió identificar aspectos funcionales y posibles mejoras. A partir de este, se realizaron ajustes orientados a optimizar la accesibilidad, la estabilidad y la percepción táctil del material, lo que dio lugar al desarrollo de dos versiones finales: una elaborada en MDF (Fibropanel de Densidad Media) y otra mediante impresión 3D, como se muestra en la figura 1.

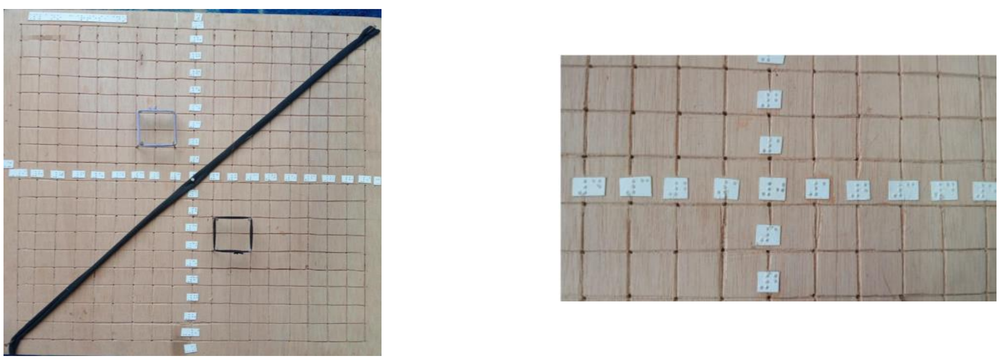


Figura 1: dos imágenes del material manipulativo (plano con cuadrícula, braille y figuras simétricas; detalle de la cuadrícula y el braille)

Prototipo 1: plano cartesiano adaptado en MDF

El primer prototipo es un tablero elaborado en MDF con una cuadrícula en relieve que permite la exploración táctil. Tiene dimensiones de 48 cm por 48 cm y un grosor de 1 cm, lo que mejora su estabilidad y manipulación.

En cada intersección de la cuadrícula hay orificios donde se insertan palitos cilíndricos, los cuales permiten representar puntos y construir figuras. Además, los ejes están diferenciados táctilmente con mayor grosor, y la numeración se presenta en braille mediante semiesferas de acero, lo que mejora la lectura táctil.

El material incluye también piezas geométricas en relieve como cuadrados, triángulos y pentágonos en diferentes tamaños, que pueden manipularse para representar transformaciones. Este diseño (véase figura 2) permite una experiencia táctil clara, segura y duradera.

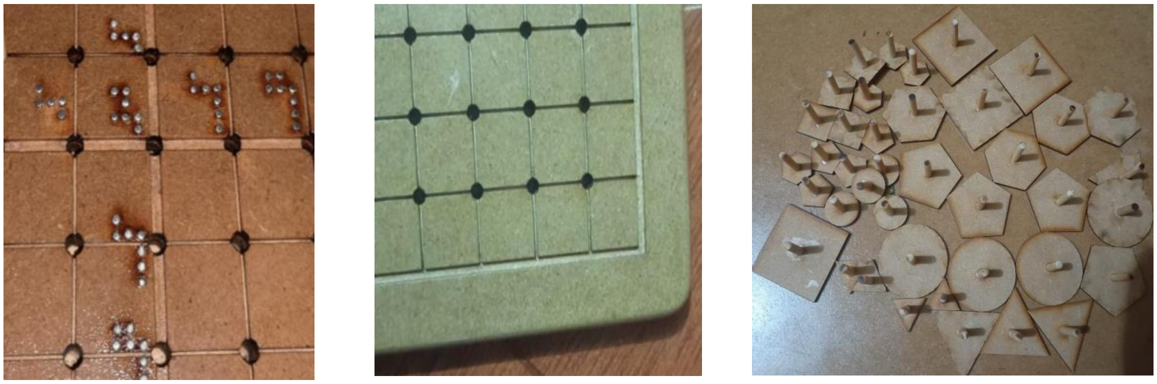


Figura 2: tres imágenes del material manipulativo (numeración en braille en el plano cartesiano; esquina redondeada del tablero; figuras geométricas en relieve)

Prototipo 2: plano cartesiano adaptado mediante impresión 3D

El segundo prototipo mantiene el mismo diseño del tablero en MDF, pero es elaborado mediante impresión 3D (figura 3), lo que permite mayor precisión en los relieves y facilidad de reproducción.

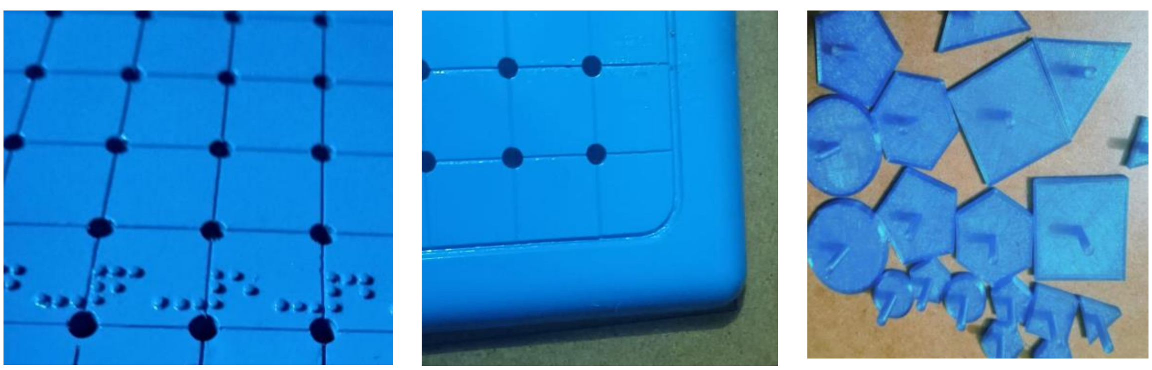


Figura 3: tres imágenes del material manipulativo elaborado mediante impresión 3D

Este tablero conserva las mismas dimensiones, cuadrícula táctil, orificios y diferenciación de los ejes. Sin embargo, inicialmente se presentaron dificultades con el braille, ya que la impresión generaba una textura áspera que dificultaba la lectura.

Por esta razón, se realizó una mejora en el material del braille, utilizando elementos que permitieran un relieve más definido y una mejor percepción táctil.

Al igual que el prototipo en MDF, incluye piezas geométricas manipulables que permiten representar transformaciones de manera clara.

REFERENCIAS

Alape Rodríguez, A. L. (2013). *Hacia una didáctica de la geometría sobre la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas rígidas en el plano en grado cuarto en un aula de inclusión por medio del juego de ALAR*. Tesis de licenciatura, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Flores, C., Vilar, M. L. y Zappalá, D. (2013). *Producción de materiales didácticos para estudiantes con discapacidad visual*. Presidencia de la Nación.

Infante, M. (2010). Desafíos a la formación docente: inclusión educativa. *Estudios Pedagógicos, 36*(1), 287-297. https://doi.org/10.4067/S0718-07052010000100016

Miyauchi, H. (2020). A systematic review on inclusive education of students with visual impairment. *Education Sciences, 10*(11), 346. https://doi.org/10.3390/educsci10110346

Núñez, M. Á. (2001). La deficiencia visual. En *Memorias del III Congreso "La atención a la diversidad en el sistema educativo"* (pp. 1-15). Instituto Universitario de Integración en la Comunidad, Universidad de Salamanca.

El cubo Soma como recurso lúdico para el pensamiento espacial en la experiencia del MUTGYM

Yehuidi Cano, Alex Rodríguez y Steven Quesada
Universidad Nacional, Costa Rica
yehuidi.cano.sanchez@est.una.ac.cr, alex.rodriguez.briones@est.una.ac.cr, steven.quesada.segura@una.cr

El presente reporte de experiencia significativa expone el uso del Cubo Soma como recurso lúdico para la exploración del pensamiento espacial en el Museo de Teatro, Gamificación y Matemáticas (MUTGYM) de la Universidad Nacional de Costa Rica. La experiencia se desarrolló en un espacio educativo no formal, mediante estaciones interactivas en las que estudiantes de educación básica y media participaron en la resolución de retos geométricos a partir de la manipulación directa de las piezas del Cubo Soma. Mediante la observación de la experiencia, se identificaron estrategias vinculadas con la visualización espacial, la rotación mental, la composición y descomposición de figuras, el reconocimiento de vacíos y la reorganización progresiva de estructuras tridimensionales. El reporte permite evidenciar que el Cubo Soma puede funcionar como un mediador pedagógico para acercar la geometría al estudiantado desde el juego, la exploración y la acción concreta sobre objetos. En este sentido, la experiencia destaca el valor de los espacios educativos no formales para resignificar el aprendizaje de la geometría y promover una relación más accesible, participativa y significativa con las matemáticas.

Introducción

La experiencia sobre la que se reporta en este documento, más que comprobar el desarrollo del pensamiento espacial, buscaba sistematizar y reflexionar sobre las posibilidades pedagógicas que ofrece el Cubo Soma para favorecer procesos de visualización, rotación mental, composición y descomposición de figuras tridimensionales.

El pensamiento espacial constituye un pilar fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, pues involucra procesos cognitivos relacionados con la conceptualización, la representación y la interpretación de relaciones geométricas. Según Molano (2019), el pensamiento espacial se origina en la manera en que los seres humanos construyen relaciones espaciales en su mente y desarrollan niveles de conocimiento, tanto de conceptos geométricos como de relaciones espaciales entre objetos, a partir de su interacción con el entorno. En esta

Cano, Y., Rodríguez, A. y Quesada, S. (2026). El cubo Soma como recurso lúdico para el pensamiento espacial en la experiencia del MUTGYM. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 61-68. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

misma línea, Bishop (1983) define el pensamiento espacial como la capacidad de utilizar el espacio como marco de referencia para comprender, explorar e interpretar el mundo, favoreciendo aproximaciones en dimensiones físicas, cognitivas y conductuales.

No obstante el posible reconocimiento de la importancia de desarrollar el pensamiento espacial en la escuela, la enseñanza tradicional de la geometría ha tendido a privilegiar procedimientos algorítmicos y reproductivos por encima de la exploración activa, lo que limita el desarrollo de habilidades de visualización, manipulación y razonamiento tridimensional. Frente a este panorama, el juego emerge como un mediador potente del aprendizaje, al propiciar escenarios en los que el error forma parte del proceso y la curiosidad orienta la construcción del conocimiento. En este sentido, experiencias recientes, como la reportada por Barbosa y Plazas (2022), evidencian que recursos lúdicos pueden favorecer la orientación y la visualización espacial en estudiantes.

En este marco se sitúa el Museo de Teatro, Gamificación y Matemáticas (MUTGYM), un proyecto de extensión de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, que propone una mediación pedagógica innovadora basada en experiencias lúdicas, teatrales y gamificadas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Su dinámica se organiza en estaciones interactivas en las que el estudiantado participa activamente en juegos diseñados para abordar diversos contenidos matemáticos, favoreciendo la exploración, la experimentación y la construcción de significados.

Como parte de la experiencia MUTGYM, el Cubo Soma adquiere especial relevancia como recurso manipulativo para la geometría, ya que posibilita procesos de composición y descomposición de figuras, rotación mental, visualización espacial y reconocimiento de estructuras tridimensionales. A partir de ello surge el siguiente interrogante: ¿De qué manera el uso del Cubo Soma, en el contexto del MUTGYM, propicia la exploración de procesos vinculados con el pensamiento espacial? Esta pregunta cobra importancia al constatar que muchos estudiantes presentan dificultades para representar, manipular y transformar objetos en el espacio tridimensional, lo cual repercute directamente en su desempeño matemático. En consecuencia, se vuelve necesario identificar y sistematizar experiencias que permitan vincular el juego concreto con el desarrollo de competencias espaciales, especialmente en contextos no formales de aprendizaje, como un museo de matemáticas.

Marco teórico

En el programa de estudio de Matemáticas de Costa Rica, el pensamiento espacial puede comprenderse desde el área de Geometría, la cual se orienta al estudio de las características de las figuras geométricas, las relaciones entre ellas, la modelización geométrica y la visualización espacial. Estos elementos permiten potenciar procesos como la visualización, la clasificación, la construcción y la argumentación, además de favorecer el análisis del movimiento de las formas geométricas y la comprensión dinámica de los objetos geométricos (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Entre los aspectos fundamentales de estudio del pensamiento espacial destacan la exploración activa del espacio tridimensional, tanto en la realidad externa como en la imaginación; la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio; y la comprensión de sus transformaciones (Sánchez-Barrera y Peña-Garzón, 2023).

El pensamiento espacial supera el reconocimiento de formas al integrar procesos propios del pensamiento visual, como la visualización, la orientación, la rotación mental, la composición y la descomposición de estructuras. Estos procesos favorecen el aprendizaje de la geometría al fortalecer la comprensión de relaciones, transformaciones y representaciones espaciales. En este sentido, el pensamiento visual, como componente del pensamiento espacial, constituye un proceso cognitivo clave en la actividad matemática (Sánchez, 2024).

Diversos aportes teóricos destacan la importancia del juego como actividad que favorece el desarrollo del pensamiento espacial, al propiciar la exploración libre, la toma de decisiones y la construcción de significados a partir de la experiencia directa con objetos concretos (Bishop, 1983).

El Cubo Soma puede comprenderse como un rompecabezas manipulativo con alto potencial para el desarrollo del pensamiento espacial, dado que su resolución involucra procesos de visualización, rotación mental, análisis de configuraciones tridimensionales y establecimiento de relaciones entre las partes y el todo. La interacción de un sujeto con este recurso favorece la exploración activa de estructuras geométricas, así como la formulación de estrategias no convencionales basadas en la experimentación, la anticipación y la verificación.

En este sentido, experiencias que se desarrollan en contacto multisensorial con objetos geométricos activan procesos de comprensión que trascienden la instrucción directa, convirtiendo el artefacto manipulativo en un puente entre la exploración sensoriomotriz y el pensamiento abstracto (Aldana, Rodríguez y Plazas, 2024).

La historia de la resolución del Cubo Soma como rompecabezas destaca la labor manual de los matemáticos John Conway y M. J. T. Guy, quienes en 1961 lograron la primera enumeración completa de las 240 soluciones. Investigaciones contemporáneas han validado estas cifras mediante algoritmos de computación que clasifican las soluciones en 11 ramas o clases principales. Cada una de estas ramas admite, como mínimo, 14 soluciones distintas.

En términos didácticos, el uso del Cubo Soma trasciende la lógica del entretenimiento, pues posibilita la construcción de significados geométricos a partir de la acción concreta sobre los objetos. Al exigir la composición y descomposición de figuras, la identificación de simetrías y la comprensión de relaciones espaciales, el Cubo Soma promueve habilidades fundamentales para la comprensión de la geometría tridimensional.

En el contexto del MUTGYM, el Cubo Soma adquiere especial relevancia como mediador entre la actividad lúdica y el razonamiento geométrico, al propiciar experiencias situadas que fortalecen la comprensión espacial y resignifican la geometría como una práctica accesible, dinámica y significativa.

Metodología

La experiencia significativa se desarrolló en el MUTGYM de la Universidad Nacional de Costa Rica, en el marco de sus actividades de extensión y mediación matemática. El MUTGYM se organiza mediante estaciones lúdicas, teatrales y manipulativas, en las cuales el estudiantado interactúa con distintos recursos matemáticos a partir del juego, la exploración y la resolución de retos.

En esta experiencia, el Cubo Soma fue utilizado como recurso manipulativo para propiciar la exploración de relaciones espaciales y estructuras tridimensionales. La actividad consistió en invitar a los participantes a construir el cubo a partir de sus siete piezas, permitiendo que cada estudiante o grupo pequeño buscara sus propias estrategias de resolución. La mediación de los estudiantes monitores se centró en orientar la exploración mediante preguntas, sugerencias y acompañamiento, sin ofrecer directamente la solución.

La población participante estuvo conformada por estudiantes de educación básica y media que asistieron a actividades del MUTGYM en espacios de mediación matemática. Los participantes fueron niñas, niños y adolescentes cuyas edades estaban entre 9 y 17 años. Al tratarse de una experiencia significativa en un contexto educativo no formal, no se trabajó con una muestra estadística ni con un grupo de control, sino con participantes propios de las dinámicas de visita y exploración del MUTGYM. Por ello, los resultados deben comprenderse como observaciones situadas que permiten reflexionar sobre el potencial pedagógico del recurso, y no como generalizaciones sobre el desarrollo del pensamiento espacial.

La sistematización de la experiencia se realizó a partir de observaciones de los monitores, notas de campo, registros fotográficos y fichas de seguimiento de las soluciones. Estos registros permitieron identificar estrategias recurrentes, dificultades frecuentes y acciones asociadas al pensamiento espacial, tales como la visualización, la rotación mental, la composición y descomposición de figuras, el reconocimiento de vacíos y el ajuste progresivo de configuraciones tridimensionales.

RESULTADOS

La experiencia permitió reconocer que el Cubo Soma genera un escenario propicio para la exploración del pensamiento espacial, debido a que exige al participante observar, comparar, rotar, ajustar y reorganizar piezas tridimensionales. Durante la resolución del reto, se identificaron estrategias diversas que evidencian formas intuitivas de razonamiento geométrico.

Uno de los aspectos observados fue la visualización espacial, anticipación y reconocimiento de vacíos durante la resolución del rompecabezas. Desde el punto de vista de los investigadores, en varios casos, la construcción inicia con piezas planas para definir una cara del cubo, lo que permite identificar vacíos y ajustar posteriormente las demás piezas. Esta estrategia tiene subyacente o implícita una forma de organización espacial en la que los estudiantes establecen una estructura inicial de referencia para luego completar el volumen total, actividad que implica procesos de análisis de configuraciones tridimensionales, relaciones parte-todo y ajuste progresivo de la solución.

La figura 1 permite observar el momento inicial de mediación, en el cual se presentan las reglas del reto y se orienta al participante sin ofrecerle una solución directa. Esta mediación resulta importante porque favorece que el estudiantado explore sus propias estrategias, tome decisiones sobre la ubicación de las piezas y active procesos de anticipación espacial.

Figura 1: momento en que el estudiante monitor da las instrucciones del Cubo Soma

Se identificaron diferencias en las estrategias de resolución según las características de los participantes. En particular, algunos participantes más pequeños colocaron primero las piezas más comunes como aristas y dejaron para el final las piezas planas con forma de L y T. Esta tendencia evidencia una aproximación basada en configuraciones regulares y perceptiblemente estables, al priorizar piezas de ubicación más evidente y postergar aquellas que requieren mayor rotación y reorganización espacial.

La figura 2 evidencia la interacción directa del estudiantado con las piezas del Cubo Soma. En el momento registrado se observan acciones de prueba, rotación, comparación y ajuste de configuraciones parciales, las cuales se relacionan con procesos de visualización espacial, composición y descomposición de figuras tridimensionales.

Figura 2: momento en el que los estudiantes resuelven el Cubo Soma

En tercer lugar, la experiencia mostró que el Cubo Soma actúa como un mediador pedagógico que favorece la construcción de significados geométricos a partir de la actividad lúdica. Esta afirmación se sustenta en evidencias obtenidas durante la resolución del reto, tales como el registro del número de pasos realizados por cada estudiante, las reorganizaciones sucesivas de las piezas y las estrategias empleadas para completar la figura. La manipulación concreta promovió la exploración activa, la formulación de hipótesis sobre el espacio y el fortalecimiento de habilidades relacionadas con la composición y descomposición de figuras, la rotación mental y la comprensión de relaciones tridimensionales.

CONCLUSIONES

La experiencia significativa que se llevó a cabo en el MUTGYM permite reconocer el potencial del Cubo Soma como recurso lúdico para la exploración de procesos asociados al pensamiento espacial. La manipulación directa de sus piezas favoreció que el estudiantado pusiera en práctica acciones relacionadas con la visualización, la rotación mental, la composición y descomposición de figuras, el reconocimiento de vacíos y la reorganización progresiva de estructuras tridimensionales.

Uno de los principales aprendizajes de la experiencia es que el Cubo Soma puede emplearse como mediador pedagógico para acercar la geometría al estudiantado desde la acción concreta. Durante la construcción del cubo, los participantes formularon hipótesis, probaron soluciones parciales y ajustaron sus estrategias, evidenciando una aproximación activa al razonamiento geométrico.

Finalmente, la experiencia muestra la importancia de los espacios educativos no formales para ampliar las posibilidades de aprendizaje matemático. En el contexto del MUTGYM, el juego se convierte en una vía para resignificar la geometría, pues permite que el estudiantado se acerque a conceptos sobre el espacio sin partir necesariamente de definiciones formales, sino desde la exploración, la curiosidad y la manipulación de objetos.

REFERENCIAS

Aldana, S., Rodríguez, S. y Plazas, T. (2024). El poder de mis manos, una experiencia multisensorial con la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 26* (pp. 107-113). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Barbosa, S. y Plazas, T. (2022). Ajedrown: orientación y visualización espacial, el caso de Mariana y Mayerly. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 25* (pp. 125-131). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Bishop, A. J. (1983). *Space and geometry*. En R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). Academic Press.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de Matemáticas: I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. San José, Costa Rica: MEP.

Molano, C. (2019). *La visualización en el pensamiento espacial a partir del cálculo de volúmenes*. Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Sánchez, Á. (2024). Avances en la caracterización del pensamiento visual en el contexto de un curso inicial en educación superior. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 26* (pp. 217-224). Universidad Pedagógica Nacional.

Sánchez-Barrera, Y. y Peña-Garzón, L. G. (2023). Tipos de actividad cognitiva y grado de pensamiento espacial en estudiantes de grado noveno al representar poliedros. *Praxis, 19*(1).

INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y MODELACIÓN GEOMÉTRICA EN CONTEXTOS INDÍGENAS: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES DE TELESECUNDARIA

Adrián Gómez-Árciga, Gricelda Mendivil-Rosas, Leidy Hernández-Mesa, Mario García-Salazar y Daniela Lozano-Velazco
Universidad Autónoma de Baja California, México
adrian.arciga@uabc.edu.mx, gmendivil@uabc.edu.mx, leidyhm@uabc.edu.mx, mariogs@uabc.edu.mx, lozano.daniela@uabc.edu.mx

Se analiza cómo estudiantes, de telesecundaria de una comunidad indígena, modelan geométricamente un refugio tradicional en forma de cono para estimar su área lateral que es cubierta con ramas de cachanilla. Mediante una intervención cualitativa, se articularon actividades de construcción, medición con tecnología digital y uso de inteligencia artificial para formalizar el cálculo. Los resultados muestran que la integración de contexto cultural, herramientas digitales e inteligencia artificial favorece la comprensión geométrica, al vincular conceptos matemáticos con problemáticas reales. Se concluye que estas mediaciones permiten aproximarse a soluciones con sentido, aunque requieren una orientación docente que promueva la interpretación crítica y la validación de resultados.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la educación matemática ha enfrentado el desafío de transitar de enfoques centrados en la transmisión de contenidos hacia perspectivas que reconozcan el carácter situado, cultural y dinámico del conocimiento matemático (Guevara-Bermúdez *et al.*, 2025).

En contextos culturalmente diversos, como el de Mexicali, Baja California (ciudad fronteriza entre México y EE. UU.), esta problemática se intensifica. La presencia de comunidades indígenas, como la Cucapáh, pone en evidencia la existencia de prácticas matemáticas propias que emergen de actividades cotidianas –como la pesca y la construcción– y que, sin embargo, suelen permanecer al margen del currículo escolar. Esta desconexión entre los saberes culturales y las matemáticas escolares limita las oportunidades de generar aprendizajes significativos y de fortalecer la identidad de los estudiantes en relación con el conocimiento matemático.

Gómez-Árciga, A., Mendivil-Rosas, G., Hernández-Mesa, L., García-Salazar, M. y Lozano-Velazco, D. (2026). Inteligencia artificial y modelación geométrica en contextos indígenas: un estudio con estudiantes de telesecundaria. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 69-76. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

D'Ambrosio (2008) plantea que no existe una única matemática, sino múltiples formas de saber y hacer matemáticas, vinculadas a prácticas sociales específicas. Este enfoque permite reconocer que las prácticas matemáticas no son homogéneas, sino que responden a necesidades, significados y formas de razonamiento propias de cada comunidad.

De manera paralela, el desarrollo de tecnologías digitales ha abierto nuevas posibilidades para la enseñanza de las matemáticas, particularmente en el ámbito geométrico. Herramientas como GeoGebra favorecen la exploración dinámica de objetos, la manipulación de representaciones y la formulación de conjeturas, promoviendo procesos de visualización y razonamiento matemático (Santos-Trigo, 2016). Asimismo, el uso de inteligencia artificial (IA), como ChatGPT, introduce formas emergentes de interacción con el conocimiento matemático, al posibilitar retroalimentación inmediata, generación de explicaciones y análisis de procedimientos, aunque su uso exige una postura crítica frente a posibles imprecisiones (Taani y Alabidi, 2025).

En este escenario, el estudio que se presenta aquí tiene como propósito analizar cómo la integración de tecnología digital y el uso de inteligencia artificial pueden mediar la construcción de conceptos geométricos en estudiantes de una telesecundaria indígena, al articular los contenidos escolares con sus prácticas culturales. Para ello, se desarrolló una intervención educativa de corte cualitativo, basada en el diseño de tareas que promueven la exploración, la resolución de problemas y la reflexión, mediante el uso de herramientas digitales.

Marco teórico

La comprensión de la geometría en el ámbito escolar suele verse limitada cuando los conceptos se presentan de forma descontextualizada, particularmente en temas como el cálculo de áreas de sólidos. Frente a ello, es necesario promover procesos que articulen la experiencia concreta, la representación y la formalización matemática. En este sentido, Duval (1999) señala que el aprendizaje matemático depende de la coordinación entre distintos registros.

Desde la perspectiva de la etnomatemática, las matemáticas se comprenden como una construcción cultural que emerge de prácticas situadas y socialmente compartidas. D'Ambrosio (2008) señala que actividades como la construcción, la medición o la organización del espacio dentro de las comunidades constituyen formas legítimas de conocimiento matemático. Bajo esta mirada, modelar geométricamente un refugio tradicional con forma de cono permite que los estudiantes articulen los conceptos escolares con prácticas propias de su contexto cultural. De esta manera, nociones como el área lateral adquieren significado al relacionarse con una necesidad concreta de la comunidad, como la estimación de la cantidad de material requerida para cubrir la estructura.

En este proceso, la resolución de problemas implica identificar información relevante, establecer relaciones entre los datos y validar resultados obtenidos (Pólya, 1945). En este sentido, la tecnología digital favorece dichas acciones al permitir la obtención de medidas, la representación dinámica de situaciones y la exploración de distintos escenarios, transformando así la actividad matemática (Santos-Trigo, 2016). En el caso de la inteligencia artificial, como ChatGPT, la tecnología digital facilita el acceso a procedimientos y ejemplos, aunque exige interpretación y adaptación por parte de los estudiantes. Desde esta perspectiva, el error adquiere un valor didáctico, al convertirse en un punto de partida para el análisis, la validación y la argumentación (Slobodsky y Durcheva, 2025).

En este sentido, el uso de la inteligencia artificial requiere procesos de interpretación y adaptación por parte de los estudiantes, quienes deben analizar la información proporcionada, contrastarla con sus propios datos y ajustarla a la situación que enfrentan. Este proceso favorece el desarrollo de habilidades metacognitivas y de validación, en la medida en que los estudiantes no solo aplican un procedimiento, sino que reflexionan sobre su pertinencia.

METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló bajo un enfoque cualitativo, orientado a comprender cómo estudiantes construyen significado matemático al resolver una situación contextualizada mediante el uso de tecnología digital e inteligencia artificial. Este enfoque permite analizar la actividad matemática en su contexto natural, considerando las interpretaciones, decisiones y estrategias que emergen durante el proceso (Hernández-Sampieri *et al.*, 2014).

La estrategia metodológica utilizada fue un experimento de enseñanza, entendido como una intervención diseñada para analizar cómo los estudiantes desarrollan ideas matemáticas en interacción con determinadas tareas, herramientas y formas de mediación. Este tipo de estrategia permite observar procesos de construcción de conocimiento mientras los participantes enfrentan situaciones problemáticas en contextos reales de aprendizaje.

La investigación se llevó a cabo en una telesecundaria –modalidad de educación básica diseñada para llevar educación a comunidades rurales, alejadas o marginadas donde no existen escuelas técnicas o generales– de la comunidad indígena Cucapáh, en Mexicali, Baja California. Participaron ocho estudiantes de un grupo multigrado. Se contó con iPads M2 para cada estudiante y una antena starlink con internet. La intervención se centró en la resolución de un problema situado: estimar la cantidad de ramas de cachanilla[1] necesarias para cubrir un refugio tradicional de la comunidad, modelado como un cono.

El diseño de la intervención se estructuró en tres momentos articulados. En el primero, los estudiantes realizaron una actividad de recorte y ensamblaje de una plantilla para construir un cono, con el propósito de identificar sus elementos geométricos y favorecer la comprensión de su estructura. Este momento permitió transitar de una percepción global del objeto hacia su modelación geométrica.

En el segundo momento, se realizó una salida de campo para observar el refugio real. Los estudiantes estimaron sus dimensiones y posteriormente utilizaron tabletas digitales (iPad) para obtener medidas aproximadas de la altura y el diámetro de la base. Este proceso permitió vincular la experiencia empírica con la modelación matemática, identificando los datos necesarios para resolver el problema.

En el tercer momento, los estudiantes utilizaron ChatGPT como apoyo para determinar el procedimiento para calcular el área lateral del cono. A partir de la interacción con la herramienta, identificaron la fórmula correspondiente y analizaron ejemplos, lo que implicó interpretar la información y adaptarla a los datos obtenidos en el contexto.

Para la recolección de datos se emplearon grabaciones de pantalla de las tabletas, registros de audio, producciones digitales de los estudiantes y un diario de campo. Estos instrumentos permitieron documentar las interacciones con la tecnología, las estrategias de resolución y los procesos de argumentación.

[1] Arbusto nativo del desierto de Sonora y zonas húmedas del río Colorado.

El análisis se realizó mediante categorización interpretativa, centrada en tres aspectos: la comprensión geométrica del modelo, la articulación entre medición y modelación, y el uso de la inteligencia artificial en la formalización del procedimiento. Este enfoque permitió identificar cómo los estudiantes construyen significado al integrar contexto cultural, experiencia empírica y herramientas tecnológicas en la resolución del problema.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El análisis se centró en cómo los estudiantes se aproximaron a la determinación del área lateral del refugio de invierno, modelado como un cono, con el propósito de estimar la cantidad de ramas de cachanilla necesarias para cubrir su superficie. Este proceso se desarrolló en tres momentos: comprensión de la figura, medición en contexto real y uso de inteligencia artificial para formalizar el cálculo.

En el primer momento, la comprensión del refugio se favoreció mediante una actividad de recorte y armado de una plantilla que permitió construir un cono (véase figura 1). A partir de esta experiencia, los estudiantes identificaron elementos como la base y la superficie lateral, diferenciando progresivamente entre volumen y área.

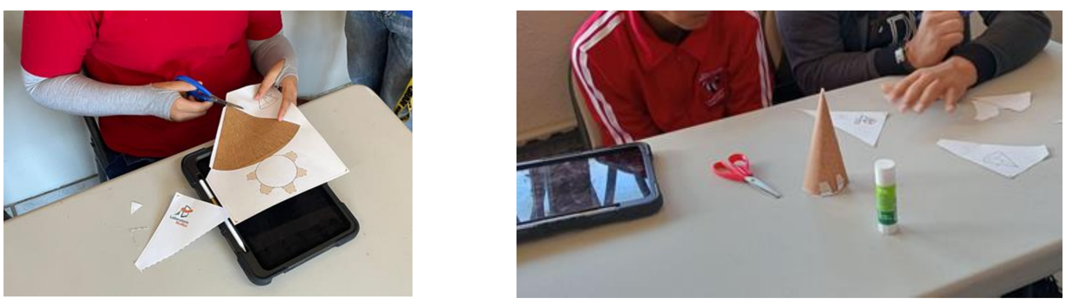


Figura 1: plantilla recortable usada por los estudiantes para construir el modelo de cono

Este tránsito evidenció un paso de una percepción global a una interpretación más estructurada de la figura, en línea con procesos de coordinación de representaciones (Duval, 1999).

En el segundo momento, los estudiantes realizaron una salida de campo para observar el refugio real y estimar sus dimensiones (véase figura 2). Posteriormente, utilizaron iPad para obtener medidas aproximadas de la altura y el diámetro de la base.

Figura 2: estudiantes realizando mediciones del refugio con iPad

Este proceso permitió vincular la experiencia empírica con la modelación matemática, al reconocer la necesidad de datos para resolver el problema. La tecnología digital actuó como mediadora, facilitando la obtención de información relevante y orientando la toma de decisiones sobre qué medir.

En el tercer momento, los estudiantes utilizaron ChatGPT para identificar la fórmula del área lateral del cono. La herramienta proporcionó la expresión matemática acompañada de un ejemplo con datos distintos (véanse figuras 3 y 4).

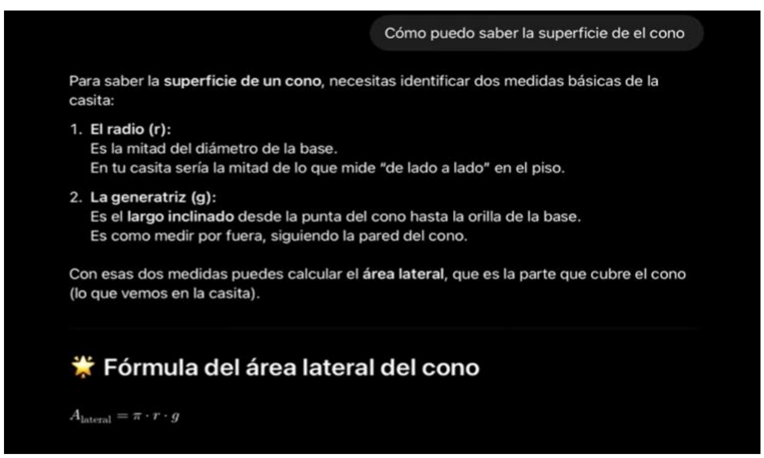


Figura 3: interacción de un estudiante con ChatGPT para obtener la fórmula del área lateral del cono

A partir de ello, los estudiantes interpretaron el procedimiento y adaptaron el ejemplo a sus propias mediciones.

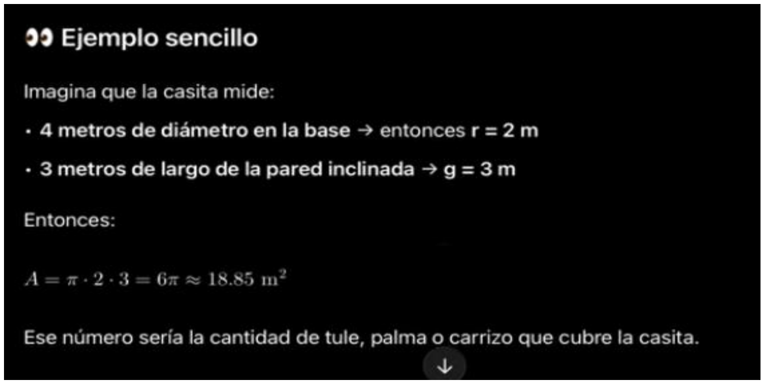


Figura 4: ejemplo proporcionado por la IA con datos distintos y adaptación realizada por el estudiante

Este proceso evidenció que la IA funcionó como apoyo para estructurar el cálculo, más que como una fuente directa de respuestas. En algunos casos, la información requirió ser interpretada y ajustada, lo que promovió la reflexión y validación de resultados.

En conjunto, los resultados muestran que la articulación entre contexto cultural, tecnología digital e inteligencia artificial favorece la resolución de problemas con sentido. La medición permitió aproximarse al objeto real, mientras que la IA facilitó la formalización del procedimiento. Sin embargo, estos procesos requirieron mediación para interpretar la información y validar resultados, evidenciando que la tecnología amplifica el razonamiento cuando se integra en actividades contextualizadas.

Conclusiones

Los resultados permiten sostener que la articulación entre tecnología digital, inteligencia artificial y contexto cultural favorece la resolución de problemas matemáticos con sentido para los estudiantes. En este caso, la determinación del área lateral del cono no se abordó como un ejercicio abstracto, sino como una necesidad concreta: estimar la cantidad de material (ramas de cachanilla) requerido para la construcción del refugio.

Desde esta perspectiva, la tecnología digital permitió aproximarse al problema mediante la obtención de datos y la representación de la situación, mientras que la inteligencia artificial facilitó el acceso a herramientas conceptuales para resolverlo. Esta combinación generó un entorno en el que los estudiantes pudieron transitar desde la exploración empírica hacia la formalización matemática.

En términos más amplios, estos hallazgos sugieren que el uso de tecnología e inteligencia artificial puede contribuir a la construcción de conocimiento matemático cuando se orienta hacia la resolución de problemáticas situadas. Es decir, no se trata únicamente de incorporar herramientas digitales, sino de diseñar experiencias en las que estas permitan responder a preguntas relevantes para los estudiantes y su comunidad.

Sin embargo, también se evidencia que estos procesos requieren una mediación docente intencionada, ya que la interpretación de la información, la validación de resultados y la toma de decisiones no ocurre de modo automático. En este sentido, la tecnología y la inteligencia artificial no sustituyen el razonamiento matemático, sino que lo amplifican cuando se integran en un diseño didáctico pertinente.

REFERENCIAS

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemáticas. Entre las tradiciones y la modernidad*. Limusa.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt y M. Santos (eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26).

Guevara-Bermúdez, G., Castillo, P., Vargas, R. y Otaíza, P. (2025). Educación matemática y ciudadanía: perspectivas de los docentes de matemáticas. *Educación y educadores*, *28*(2), 4.

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C. y Baptista-Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* [6.ª ed.]. McGraw-Hill.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematics education: An evolving field. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(7), 1-15.

Slobodsky, N. y Durcheva, M. (2025). Errors as learning opportunities in AI-supported mathematics environments. *Journal of Mathematics Education and Technology*, *12*(1), 55-70.

Taani, O. y Alabidi, S. (2025). ChatGPT in education: Benefits and challenges of ChatGPT for mathematics and science teaching practices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *56*(9), 1748–1777. https://libcon.rec.uabc.mx:2106/10.1080/0020739X.2024.2357341

Geometría para ciegos: enseñanza de la reflexión en el plano, mediante el Kit Meso

Melany González, Sofía Rueda y Tania Plazas
Universidad Pedagógica Nacional
mdgonzalezg@upn.edu.co, sruedag@upn.edu.co, tplazas@pedagogica.edu.co

Este artículo expone una propuesta elaborada en el desarrollo del trabajo de grado de dos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), para obtener su título. La propuesta se centra en el diseño de un material didáctico manipulable junto con un conjunto de tareas para su implementación, con el fin de favorecer la enseñanza y el aprendizaje de estudiantes con discapacidad visual, del concepto de reflexión como transformación en el plano.

Introducción

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017), la educación inclusiva no pretende igualar a los estudiantes con discapacidad con los demás, sino reconocer sus particularidades y responder a sus necesidades específicas. Sin embargo, en la práctica, no siempre se dispone de los recursos necesarios para garantizar una inclusión efectiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, el Kit Meso se plantea como una alternativa que ofrece un material didáctico manipulable orientado a la enseñanza del movimiento de reflexión en el plano, especialmente pensado para estudiantes con discapacidad visual.

A continuación, se aborda la definición de reflexión como transformación en el plano, se describe el material diseñado y se exponen los objetivos de las tareas planteadas para el uso de tal material. La propuesta se fundamenta en los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), que permite que cada estudiante avance de acuerdo con sus características (Maldonado, 2020).

Finalmente, se incluyen algunas consideraciones derivadas de la aplicación de una prueba piloto, en las que se hace una reflexión sobre el proceso de implementación del recurso.

González, M., Rueda, S. y Plazas, T. (2026). Geometría para ciegos: enseñanza de la reflexión en el plano, mediante el Kit Meso. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 77-82. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Movimiento de reflexión en el plano

El elemento matemático central de la propuesta es la reflexión, concebida como una transformación rígida en el plano. De acuerdo con lo propuesto por Samper (2008, p. 60):

> Una reflexión respecto a una recta m, denominada eje de reflexión, es el movimiento que a cada punto A del plano le asigna otro punto A' del mismo plano tal que el segmento AA' es perpendicular a la recta m, y A' está a la misma distancia de m como lo está A.

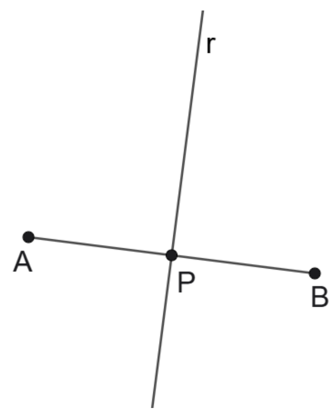


Figura 1: representación de la reflexión del punto A respecto a la recta r

Proceso de definir

En educación matemática, las definiciones no deben asumirse como enunciados acabados, sino como el resultado de un proceso llamado definir que cobra especial relevancia en el aprendizaje. Este proceso puede darse de dos maneras, descriptiva o constructiva, como lo mencionan Aya y Echeverry (2009), permitiendo al estudiante participar activamente en la construcción del concepto mediante la exploración, el cuestionamiento y la identificación de propiedades necesarias y suficientes. Definir implica seleccionar características que no tengan redundancias, sino que sean esenciales, Además, se reconoce la relación entre el concepto formal y la imagen conceptual que el estudiante construye, la cual puede ser parcial o incorrecta. En este sentido, se buscó abordar y potenciar este proceso, promoviendo una comprensión más profunda, significativa y reflexiva del conocimiento matemático.

Material didáctico

Prieto (2014) afirma que el material didáctico es el conjunto de recursos que median y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje, permitiendo suscitar preguntas, representar conceptos y materializar ideas abstractas. Su importancia se centra en la capacidad de activar los sentidos, despertar el interés y favorecer la comprensión del objeto trabajado, al poner al estudiante en contacto directo o indirecto con él.

En el ámbito de las matemáticas, el uso de materiales ha sido fundamental en la construcción del conocimiento, evolucionando desde objetos concretos hasta herramientas más estructuradas como el ábaco. Desde una perspectiva pedagógica, estos recursos no solo facilitan la comprensión, sino que también promueven el desarrollo de habilidades cognitivas, la imaginación y la participación de los estudiantes.

DUA

El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) constituyó un eje central en la elaboración del material didáctico manipulable, al brindar fundamentos que favorecen la equidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, como plantea Maldonado (2020), el DUA posibilita que cada estudiante progrese a partir de sus propias capacidades y características, puesto que, este enfoque se sustenta en tres principios fundamentales: múltiples formas de representación, múltiples formas de acción y expresión, y múltiples formas de implicación, los cuales promueven entornos de aprendizaje flexibles que favorecen la participación y el progreso de todos los estudiantes.

DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL Y TAREAS

Kit Meso

El material didáctico propuesto se denomina Kit Meso, cuyo nombre surge de la combinación de los nombres de las autoras del proyecto. Durante el proceso de construcción del recurso manipulativo se desarrollaron cuatro prototipos, en los cuales se exploraron diferentes configuraciones de tablero, ejes y sistemas de medición, que llevaron progresivamente al diseño final del material.

Kit Meso está conformado por 24 elementos, entre los que se incluyen un tablero con una regla fija incorporada, herramientas de medición (regla y transportador), representaciones de rectas que se intersecan, polígonos, segmentos, punzones, un elemento de fijación y cinco moldes (véase figura 2). Todos estos componentes fueron diseñados con marcas en braille y escritura convencional, así como con relieves y texturas que facilitan la exploración táctil.

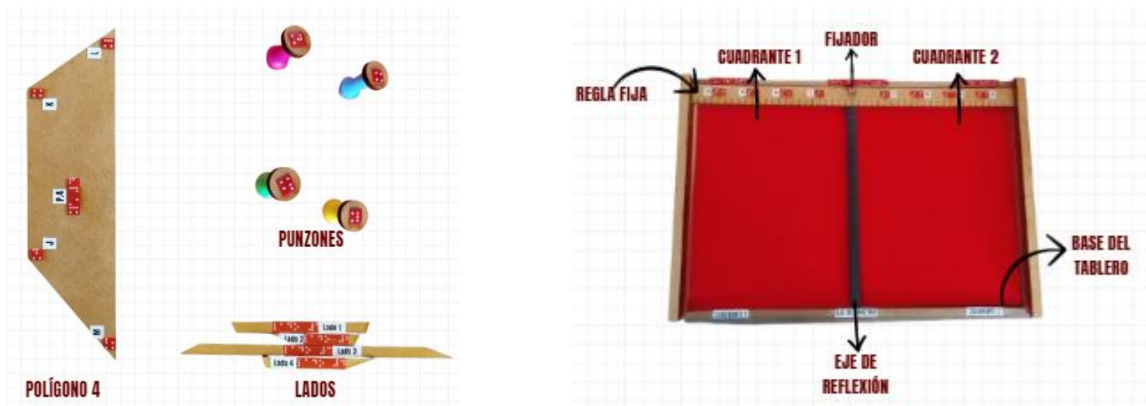


Figura 2: Kit Meso

Los componentes del kit se articulan con tres tareas organizadas secuencialmente que buscan guiar progresivamente la comprensión del movimiento de reflexión. A continuación, se presentan las tareas y sus propósitos,

Tarea 1. Preconceptos

La tarea se orienta hacia el reconocimiento de ángulos, tipos de ángulos y perpendicularidad mediante el uso de herramientas de medición.

Sus propósitos son:

- Conocer definiciones tales como ángulos, tipos de ángulos y perpendicularidad junto con sus respectivas representaciones.
- Usar el transportador para medir ángulos dados y construir ángulos dada una medida.

Tarea 2. Caracterización del movimiento

Esta tarea se enfoca en la identificación de las propiedades de la reflexión a partir de ejemplos y no ejemplos.

Los propósitos asociados a esta tarea son:

- Identificar las propiedades que componen el movimiento de la reflexión.

- Reconocer ejemplos y no ejemplos de la reflexión.

Tarea 3. Ejemplificación del movimiento

En esta tarea, los estudiantes construyen la imagen reflejada de un polígono utilizando el tablero y el sistema de medición del kit.

Su propósito es construir la imagen de un polígono bajo reflexión.

PRUEBA PILOTO

La prueba piloto relativa al material se llevó a cabo con dos estudiantes del Colegio Gran Yomasa, institución educativa oficial ubicada en la localidad de Usme, en Bogotá, que desde 1995 ha incorporado estudiantes con discapacidad visual y cuenta con el apoyo de docentes de educación especial y el acompañamiento de entidades como el Instituto Nacional para Ciegos (INCI) y el Centro de Rehabilitación para Adultos Ciegos (CRAC).

Los participantes fueron dos estudiantes que presentan diferentes niveles de discapacidad visual. El primero es un estudiante de 15 años que cursa grado noveno y tiene diagnóstico de ceguera parcial, con percepción mínima de luz. El segundo es un estudiante de 9 años, de grado cuarto con diagnóstico de ceguera total, sin percepción de luz.

La implementación de la prueba piloto permitió constatar que tanto el material como las actividades diseñadas respondieron a los objetivos propuestos. No obstante, a partir del análisis realizado, se identificaron algunas oportunidades de mejora, como la necesidad de realizar ciertos ajustes en las piezas del material para favorecer una manipulación más adecuada.

Durante la experiencia, el material favoreció la exploración táctil de los conceptos geométricos involucrados. Inicialmente, los estudiantes lograron reconocer distintos tipos de ángulos y la perpendicularidad entre rectas mediante el uso del transportador adaptado, estableciendo así los preconceptos necesarios para abordar el movimiento de reflexión. Posteriormente, a través del uso del tablero y las herramientas de medición, identificaron propiedades fundamentales de este movimiento, como la congruencia entre las figuras, la perpendicularidad respecto al eje y la equidistancia de los puntos correspondientes.

Finalmente, ambos estudiantes lograron construir la imagen reflejada de un polígono respecto a un eje y verificar sus propiedades mediante mediciones y comparación de las figuras. Estos resultados evidencian el potencial del Kit Meso como recurso didáctico para representar y explorar táctilmente el movimiento de reflexión, aportando una alternativa para la enseñanza de transformaciones geométricas en contextos de educación inclusiva.

REFLEXIONES FINALES

El material didáctico es una herramienta útil en especial con población con discapacidad visual, ya que facilita el acceso, pues como lo establece el DUA, se utilizan diversas formas de representación de acuerdo con las necesidades específicas del estudiante.

Elaborar material didáctico, en especial para una población tan específica, representa desafíos para los educadores matemáticos, pues materializar una idea que funcione para esta población y para otras como estudiantes sin esta discapacidad se constituye en un ejercicio que requiere de mucho tiempo y dedicación. Contar con materiales ya construidos por otro que pueden ser replicados es un avance para la inclusión en el aula de matemáticas.

REFERENCIAS

Aya, O. y Echeverry, A. (2009). *Geometría dinámica en el proceso de definir.* Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Maldonado, E. (2020). Inclusión educativa en Colombia: un abordaje conceptual desde las metodologías de Diseño Universal de Aprendizajes (DUA) y Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR). *EDUCA*, *1*(1),

MEN (2017). *Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad en el marco de la educación inclusiva*. MEN: Bogotá, Colombia.

Prieto. B. (2014). *Materiales manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.* Trabajo de pregrado, Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Samper, C. (2008). *Geometría*. Editorial Norma.

Aprendizaje por adaptación del Teorema Fundamental de la Proporcionalidad en un entorno de geometría dinámica

Yani González, Luis Pérez y Jenny Acevedo-Rincón
Universidad Industrial de Santander
yani2258069@correo.uis.edu.co, laperezf@uis.edu.co, jepaceri@uis.edu.co

Esta presentación se fundamenta, por una parte, en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, que concibe el aprendizaje como resultado de la interacción del estudiante con un medio y, por otra, en el modelo de demanda cognitiva de Stein y Smith, que clasifica el tipo de razonamiento requerido en la resolución de tareas. Este documento pretende mostrar avances sobre la complementariedad de las dos teorías como fundamento para la planeación de tareas geométricas sobre el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad en DGPad-Colombia; en particular, para identificar situaciones que favorecen el aprendizaje por adaptación de estudiantes de grado noveno. Las teorías permiten establecer la pertinencia matemática y el nivel de demanda cognitiva de las tareas, destacando el potencial de DGPad-Colombia para diseñar tareas que promuevan el aprendizaje por adaptación.

Introducción

En la enseñanza actual de la geometría, los estudiantes suelen tener un conocimiento limitado de los conceptos geométricos, ya que se privilegia la geometría procedimental por encima de la comprensión de las relaciones figurales. Esta situación se explica, en parte, por el uso predominante de representaciones planas rígidas. Si bien los *Softwares* de Geometría Dinámica (SGD) ofrecen posibilidades para superar estas limitaciones, son pocos los docentes que se atreven a incorporarlos en sus clases (Riascos y Cubeira, 2018).

En el caso de la proporcionalidad, en su naturaleza geométrica, se encuentra la necesidad de proponer tareas en entornos de geometría dinámica que promuevan los hechos geométricos vinculados al Teorema Fundamental de la Proporcionalidad (TFP). Estos se encuentran vinculados a conceptos como la semejanza de triángulos, la homotecia, el teorema de Tales, entre otros (González, 2024; Restrepo *et al.*, 2023). En algunas investigaciones hay avances en los que se proponen tareas en entornos de geometría dinámica que permiten explorar, visualizar e interactuar con las propiedades invariantes presentes en las

González, Y., Pérez, L. y Acevedo-Rincón, J. (2026). Aprendizaje por adaptación del Teorema Fundamental de la Proporcionalidad en un entorno de geometría dinámica. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 83-90. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

construcciones, todo lo cual promueve la autonomía del estudiante, al decidir qué estrategias adoptar o descartar en la solución de las tareas. De acuerdo con los resultados del diseño de tareas de González (2024) para la solución del problema de dividir un segmento en parte iguales usando el TFP, surgen dos dificultades, que son objeto de análisis en la investigación que se reporta en este artículo: (i) el uso de un SGD, por sí solo, no garantiza que las tareas cumplan su propósito de enseñanza; y (ii) es necesario reconocer que no todas las tareas promueven el mismo nivel de pensamiento, aunque sí deben articularse en una continuidad cognitiva que asegure la progresión del aprendizaje.

REFERENTES TEÓRICOS

A continuación, se presenta la complementariedad entre la TSD y el modelo de demanda cognitiva. La TSD establece las condiciones necesarias para que los estudiantes obtengan un aprendizaje por adaptación por medio de DGPad-Colombia, mientras que el modelo de demanda cognitiva posibilita caracterizar los niveles de pensamiento que deben emplear los estudiantes en la secuencia didáctica para el desarrollo de los hechos geométricos propios del TFP en cada una de las tareas.

Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas, propuesta por Brousseau (1986), concibe el aprendizaje matemático como un proceso que ocurre a través de la interacción entre el estudiante, un medio (problemas, recursos, materiales) y el profesor. El conocimiento se construye cuando el alumno se enfrenta a una situación diseñada por el profesor, para provocar la necesidad de producir estrategias, conjeturas o soluciones. El medio debe ser fuente de retroacciones que permitan al estudiante validar o refutar sus acciones, favoreciendo la construcción autónoma del conocimiento.

En la interacción entre profesor, estudiante y medio, se distinguen las situaciones didácticas y adidácticas. En las primeras, el profesor guía y organiza la actividad; en las segundas, los estudiantes actúan de manera más autónoma, interactuando directamente con el medio sin intervención directa del profesor (Margolinas, 1993/2009). El conocimiento de los estudiantes puede consolidarse como un saber matemático mediante el proceso de institucionalización, donde “el profesor retoma necesariamente su posición con relación al saber, ya que cuando oficializa una noción, relacionándola con el saber cultural, lo hace como sabio" (Margolinas, 1993/2009, p. 177).

Demanda cognitiva

Stein y Smith (1998) reportan que los profesores tienen dificultades para categorizar las tareas como pertinentes porque los docentes tienden a basarse en características superficiales de las tareas, sin analizar a profundidad qué tipo de pensamiento promueven. Por ejemplo, se fijan únicamente en lo expuesto explícitamente en el enunciado. Por ello se propusieron establecer un modelo que funcione a manera de herramienta para el análisis de tareas que se proponen en clase. Uno de los aspectos para categorizarlas es el nivel cognitivo que los estudiantes emplean para realizarla, ya que no todas las tareas promueven el mismo nivel de razonamiento: algunas exigen memorización, procedimientos sin conexiones, mientras que otras implican procesos de procedimientos con conexiones o hacer matemáticas (Stein y Smith, 1998). De este modo, el modelo se centra en el análisis del tipo de pensamiento que requieren las tareas matemáticas propuestas en el aula.

Los autores establecen que una buena tarea corresponde a aquella que involucra a los estudiantes en un pensamiento de alto nivel, cuando realizan procedimientos con conexiones o hacen matemáticas. Algunos factores que caracterizan estas tareas son (Stein y Smith, 1998):

- El profesor proporciona apoyo temporal para ayudar al pensamiento y razonamiento del estudiante.
- Las tareas se construyen con base en el conocimiento previo de los estudiantes, mediante la exploración.
- El profesor establece conexiones conceptuales y los estudiantes pueden validar su progreso.
- El profesor busca obtener explicaciones y justificaciones por parte del estudiante a través de preguntas y retroalimentaciones.

Sin embargo, las tareas de baja demanda cognitiva también son necesarias para consolidar conocimientos, procedimientos, estrategias. Además, pueden emplearse para el desarrollo de conocimientos más fuertes. Así, es necesario que los docentes reflexionen sobre la gestión de actividades para que no haya una sobrecarga cognitiva en los estudiantes y se logre llegar al aprendizaje por adaptación. De esta manera, el modelo no solo ofrece una herramienta para analizar tareas, sino también para comprender cómo se fomenta (o limita) el desarrollo del pensamiento matemático en el aula.

Pertinencia de la complementariedad

La complementariedad de ambos modelos teóricos se fundamenta en la necesidad de gestionar y ajustar tareas propuestas en SGD para el desarrollo de los hechos geométricos propios del TFP. Para esto el modelo de demanda cognitiva será empleado en el análisis cognitivo, como parte de la fase de análisis preliminar de la ingeniería didáctica. Así, es necesario tener en cuenta que los niveles de demanda cognitiva (memorístico, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones y hacer matemáticas) como instrumento de análisis, consideran los indicadores de: procedimiento de resolución, nivel de esfuerzo, contenidos implícitos, explicaciones (Benedicto, 2018). Para el análisis se decide agregar un nuevo indicador denominado “autonomía del estudiante”, puesto que las tareas por analizar son diseñadas bajo situaciones adidácticas. A continuación, se muestran, a modo de ejemplo, las descripciones de estos indicadores para el nivel de hacer matemáticas.

- Procedimientos de resolución. No existe un enfoque predecible o explícito en el enunciado de la tarea, pero el estudiante puede anticipar posibles caminos de solución a partir de razonamientos geométricos deductivos.
- Nivel de esfuerzo. El estudiante requiere de una exploración y comprensión profunda de la naturaleza de los conceptos, procesos y relaciones geométricas.
- Contenidos implícitos. El estudiante aplica los hechos geométricos en situaciones que implican el uso del TFP.
- Explicaciones. El estudiante profundiza en argumentos geométricos para realizar las justificaciones de sus construcciones.
- Autonomía del estudiante. El estudiante no depende de intervenciones o juicios del profesor.

La complementariedad de ambas teorías posibilita un análisis más completo: mientras la TSD centra la atención en los procesos didácticos que emergen en la interacción estudiante–medio, el modelo de demanda cognitiva permite dotar de continuidad cognitiva las tareas diseñadas. De esta manera, se logra no solo describir el desarrollo de las situaciones propuestas, sino también valorar su potencial para promover el aprendizaje por adaptación del TFP en tareas desarrolladas en geometría dinámica.

Metodología

Este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo, bajo la metodología de ingeniería didáctica de Artigue (1995). El punto de partida es el diseño de González (2024), el cual será intervenido para crear una nueva secuencia de tareas en DGPad-Colombia. La pertinencia de este rediseño surge del objetivo de caracterizar y ajustar la actividad cognitiva que promueve la secuencia base, enfocando la atención en lo que respecta al desarrollo de hechos geométricos propios del TFP.

La secuencia se desarrollará en la educación básica secundaria, grado noveno, articulada a través de las dimensiones del análisis preliminar. En la dimensión epistemológica, se profundiza en el papel de la razón y la proporción en el desarrollo de TFP. En la dimensión cognitiva, se toma la secuencia de González (2024), caracterizándola bajo los niveles de demanda cognitiva, donde se identifica que si bien se movilizaron hechos geométricos asociados al TFP, estos no fueron institucionalizados, así se proyecta un ajuste que trascienda el uso como herramienta hacia su formalización. Por último, la dimensión didáctica examina el predominio de las configuraciones aritméticas sobre las geométricas en la enseñanza del TFP.

Para realizar el análisis de la secuencia, es necesario tener en cuenta que estas tareas están orientadas hacia la construcción en SGD, además, llevan en sí mismas retroacciones que le permiten al estudiante relacionarse y aprender de la actividad. En la figura 1, se visualiza una de las tareas que se toma como base para este trabajo, donde el botón *Verificar* desencadena retroacciones que dependen de las acciones que haya llevado a cabo el alumno, enriqueciendo la interacción con el medio.

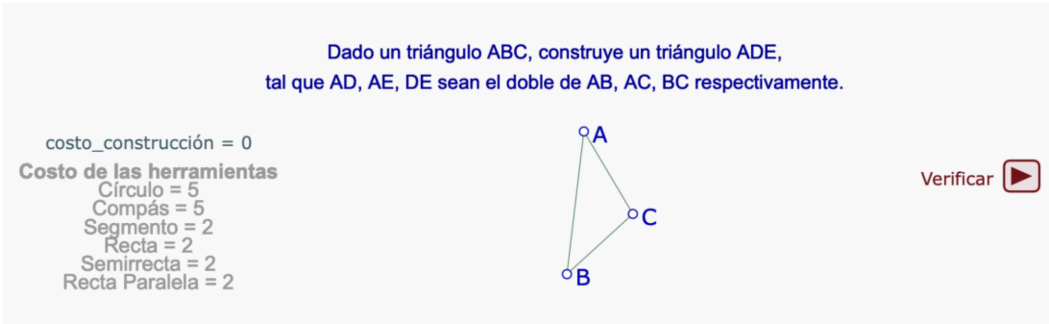


Figura 1: tercera tarea de González (2024)

AVANCES DE LA INVESTIGACIÓN (ANÁLISIS PRELIMINAR)

En el marco de la Ingeniería didáctica, se presentan a continuación algunos resultados derivados del análisis preliminar, organizados en tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica.

A nivel epistemológico se encuentra que históricamente existen evidencias sobre el uso del TFP en las operaciones con segmentos (Klein, 1936/1992; Laguerre, 2005). Esto es, el uso del teorema en cuestión, en la actividad de dividir un segmento en partes iguales no es un hecho aislado, sino que se encuentra en una tradición epistemológica donde el paralelismo juega un papel protagónico.

Desde esta dimensión, dividir un segmento no se reduce a la marcación sobre él de distancias equidistantes mediante reiteración aditiva, sino a construir previamente una razón en una unidad auxiliar (segmento) y trasladarla al segmento dado por medio de paralelas. En esta acción existen hechos geométricos importantes que es necesario que el estudiante valide para obtener conocimiento operativo, relativo a las proporciones.

En el plano cognitivo se hace una revisión de cada tarea diseñada en González (2024), identificando sus objetivos, las acciones requeridas por el estudiante y las posibles estrategias de solución, para determinar en qué casos es necesario agregar, quitar o modificar tareas. Cada tarea fue clasificada según el nivel de demanda cognitiva predominante, permitiendo establecer tendencias en el conjunto de la propuesta. Esto con el propósito de lograr una continuidad cognitiva entre las tareas y que estas se ajusten al nivel de pensamiento de estudiantes de noveno grado. Por ejemplo, al analizar la tarea de la figura 1 se encontró que la consigna no favorece el indicador de explicaciones, porque allí una de las retroacciones de la tarea es preguntar sobre el paralelismo entre los segmentos BC y DE que resulta de realizar la construcción, pero la tarea no le da herramientas al estudiante para que entienda el porqué de esta propiedad que se presenta allí. Además, para lograr resolver esta tarea el estudiante puede necesitar la presencia del profesor puesto que el enunciado no da paso a una posible estrategia.

En el aspecto didáctico, se encuentra que para los estudiantes no es sencillo describir la proporcionalidad sin recurrir a valores numéricos específicos, lo cual revela la fuerza del paradigma aritmético en la organización del pensamiento matemático escolar (Guacaneme, 2001). Además, desde la TSD el saber matemático no se introduce enunciando este proceso de división al estudiante, sino como respuesta a los desequilibrios que le genere resolver ciertos problemas o actividades. Así, el entorno dinámico DGPad-Colombia permite la interacción del estudiante con el saber mismo, pero allí el teorema no es inicialmente objeto de demostración ni de memorización, sino de construcción.

Conclusiones

En este artículo, enmarcado en la TSD y el modelo de demanda cognitiva, se analiza el diseño de tareas mediadas por un entorno de geometría dinámica orientadas a la construcción del Teorema Fundamental de la Proporcionalidad, destacando la importancia del análisis preliminar como herramienta para anticipar el tipo de actividad matemática que dichas tareas promueven en la ingeniería didáctica.

En el análisis preliminar refinado y enriquecido con el modelo de demanda cognitiva, se encuentran evidentes dificultades que existen en los estudiantes para expresar relaciones de proporcionalidad sin recurrir a valores numéricos específicos, lo que pone de manifiesto la persistencia del paradigma aritmético en la enseñanza de las matemáticas. Este hallazgo refuerza la necesidad de diseñar situaciones que favorezcan una comprensión más estructural y relacional de la proporcionalidad.

Finalmente, este trabajo aporta elementos para la reflexión sobre el diseño de tareas en entornos de geometría dinámica, destacando que la integración de herramientas digitales en la enseñanza de la geometría debe ir acompañada de un análisis riguroso que permita potenciar su uso más allá del uso instrumental.

Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria: el caso de las altas capacidades matemáticas*. Tesis doctoral, Universitat de València, Valencia España.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

González, Y. (2024). *Diseño de tareas autónomas en DGPad para la división de un segmento en partes iguales usando el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad*. Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. Tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origins of algebra* (E. Brann, trad.). The Massachusetts Institute of Technology. (Trabajo original publicado en 1936)

Laguerre, E. (2005). *Une ingenierie didactique pour l'apprentissage du theoreme de Thales au college*. Université Paris – Diderot - París VII. https://theses.hal.science/tel-00337891

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas* (M. Acosta y J. Fiallo, trads.). Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1993)

Restrepo-Ochoa, J., Guadrón-Pinto, E. y Ávila-Ascanio, L. (2023). Improving the learning of geometric proportionality using van Hiele's model, mathematical visualization, and GeoGebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(9).

Riascos, Y. y Curbeira, D. (2018). La enseñanza de la geometría en Colombia desde la perspectiva de ciencia, tecnología y sociedad. *Revista Metropolitana de Ciencias Aplicadas*, *1*(2), 53-61.

Stein, M. y Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

VERONESE Y PEIRCE. ENCUENTROS Y DESENCUENTROS

José Guevara
Universidad Nacional de Colombia
joguevarar@unal.edu.co

Se presenta un barrido histórico-matemático que parte de tensiones presentes en los *Elementos* de Euclides, pasa por algunas de las hipótesis fundamentales de los *Fondamenti di Geometria* de Giuseppe Veronese y recorre la evolución del concepto de continuo en Peirce según Jérome Havenel, con el propósito de evidenciar el vínculo que Fernando Zalamea identifica entre el continuo no-arquimediano de Veronese y el sinequismo peirceano. Se finaliza con la mención de un trabajo reciente que ofrece un marco matemático que atestigua la consistencia de las propiedades que Peirce atribuía al continuo.

LOS NÚMEROS REALES DE CANTOR-DEDEKIND, ¿ÚNICO CONTINUO?

Es usual al cursar una carrera de matemáticas que nos ilustren sobre los números reales como conjuntos bien formalizados. Sin embargo, este constructo es el resultado de un largo proceso histórico que tiene dos raíces distintas: el conteo, actividad primitiva presente en todas las culturas humanas desde sus orígenes, y la medida, que surge con mayor sofisticación ligada a la geometría práctica y que los griegos elevaron a su forma abstracta (Luque Arias *et al.*, 2013; Luque Arias *et al.*, 2014). Los números reales son la respuesta matemática moderna a la segunda de estas raíces: el intento de capturar con rigor la continuidad de la magnitud.

Pero esta historia no es la única posible. La Noción Común 5 de los *Elementos* ("el todo es mayor que la parte", Euclides, 1991, p. 15) es el principio de finitud intuitiva que Dedekind subvierte al definir la infinitud: un conjunto es infinito cuando existe una biyección entre él y una parte propia suya. La recta real de Cantor-Dedekind rompe así la Noción Común 5. Esta ruptura abre la pregunta por la constitución de la recta: ¿de qué están hechas sus partes y qué papel juegan los puntos? Aristóteles señalaba que los continuos son todos previos a sus partes (Sattler, 2021) y que las líneas no están hechas de puntos: estos solo marcan extremos y cortes (Jones, 1987).

Guevara, J. (2026). Veronese y Peirce. Encuentros y desencuentros. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 91-98. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Los *Elementos* ofrecen además otra ruptura, esta vez desde la medida de magnitudes. La Proposición 16 del Libro III (Euclides, 1991) exhibe el llamado ángulo corneado (el ángulo entre una tangente y la circunferencia) que es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo, pero distinto de cero. Como muestran Rodríguez y Guacaneme (2022), este objeto geométrico viola el axioma de Eudoxio-Arquímedes y ha generado debates sobre la naturaleza del ángulo a lo largo de la historia de la geometría.

El axioma de Eudoxio-Arquímedes[1] establece: si x e y son números positivos, existe un número natural n tal que $nx > y$ (Takahashi Orosco, 1976, pp. 14-15). La imposibilidad de acumular múltiplos finitos del ángulo corneado para superar cualquier ángulo rectilíneo no es una paradoja sino una señal: existen magnitudes geométricas que no obedecen este principio[2], lo que abre la posibilidad de una geometría donde el axioma de Arquímedes no rige.[3] Es precisamente en ese espacio donde Veronese construirá su continuo.

La pregunta por la constitución del continuo (¿de qué están hechas sus partes y cuál es el papel de los puntos?) es la que Veronese y Peirce retomarán. Ambos llegarán desde ella a admitir magnitudes no-arquimedianas: Veronese, como objetos geométricos de las Hipótesis III y IV; Peirce, porque ninguna colección de puntos agota el continuo. Como señala Zalamea (2001), Veronese presentó

---

1 El nombre "Eudoxio-Arquímedes" es una elaboración propia a partir de la lectura de Klein (1939), quien señala que la condición que hoy se llama axioma de Arquímedes es en realidad el prerrequisito para la teoría de proporciones del Libro V de los *Elementos*, atribuida a Eudoxio: dos magnitudes tienen razón entre sí, solo si sus múltiplos pueden superarse mutuamente. Klein observa, además, que ese nombre "está completamente en desacuerdo con la historia, pues Euclides lo tenía antes que Arquímedes, y es probable que Eudoxo lo conociera", y señala que hoy gana terreno la denominación "axioma de Eudoxo" (Klein, 1939, p. 203).

2 El primer antecedente histórico de magnitudes que no obedecen este principio es anterior a Euclides: la escuela pitagórica, en su intento por salvar la tesis "todo es número" frente al problema de la inconmensurabilidad, concibió la idea de un segmento más pequeño que cualquier segmento dado (véase Rodríguez Delgado (2023, pp. 9-10)).

3 Hilbert cita los *Fondamenti* en sus *Fundamentos de la Geometría* precisamente para demostrar la independencia del axioma de Arquímedes respecto de los demás grupos de axiomas, usando la geometría de Veronese como modelo donde todos los axiomas se satisfacen excepto ese (Hilbert, 1996).

una visión alternativa cercana a la de Peirce. El barrido que sigue hace visible esa cercanía y sus límites.

VERONESE Y EL CONTINUO NO-ARQUIMEDIANO

Giuseppe Veronese (1854 - 1917), en sus *Fondamenti di Geometria* (1891), construye la geometría de forma completamente independiente del continuo numérico. Define la *forma fundamental* como un sistema unidimensional homogéneo: para cualquier segmento dado existen dos segmentos idénticos a él con extremos en cualquier elemento del sistema (Veronese, 1891, §68). Como señala Ehrlich (1994), lo singular de Veronese es hacerlo por medios sintético-geométricos constructivos, sin presuponer ninguna métrica.

En el §55 de los *Fondamenti*, Veronese plantea la pregunta central: buscar una definición abstracta del continuo en la cual no entre como elemento necesario la intuición, de modo que sirva con pleno rigor lógico para deducir las propiedades del continuo intuitivo (Fisher, 1994).

Sobre esta forma fundamental, Veronese (1891, §80) introduce la noción de escala: a partir de un origen A y una unidad (AB), se genera la serie ilimitada de segmentos consecutivos e iguales $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ El campo de escala es el segmento ilimitado de la forma fundamental determinado por todos esos segmentos consecutivos. Este campo es el análogo geométrico de los números naturales marcados sobre la recta.

La Hipótesis III (Veronese, 1891, §82) es el momento decisivo: en un sentido de la forma fundamental existe al menos un elemento fuera del campo de la escala respecto a cada segmento limitado como unidad. Es decir, hay puntos de la recta que ningún múltiplo finito de la unidad puede alcanzar (los infinitos actuales de Veronese: segmentos infinitos en sentido pleno, no como límite de un proceso sino como objetos geométricos dados), lo que constituye el primer modelo coherente de geometría no arquimediana (Guevara Rodríguez y Rodríguez Delgado, 2025).

La Hipótesis IV estructura los órdenes de infinitud: en el campo al infinito existe un elemento X tal que (AX) y (XA^{∞}) son puros infinitos respecto a la unidad original, y existe A_1^{∞} tal que todo segmento (AX) es finito respecto de (AA_1^{∞}). Esto genera una jerarquía de órdenes de infinito e infinitesimal. Como señala Ehrlich (1994), la motivación de Veronese era precisamente proveer una teoría detallada del infinitamente grande y el infinitamente pequeño mediante medios sintético-geométricos constructivos, sin dejar tales cuestiones a los algebristas del orden.

Ehrlich (1994) reconstruye la genealogía: el concepto de infinitesimal que Robinson empleó en el análisis no estándar remonta a Veronese; fue Levi-Civita quien, a pedido de Veronese, construyó, en los años 1890, una representación analítica del continuo veronesiano; Hahn generalizó ese trabajo en 1907 con la teoría de los cuerpos ordenados que hoy llevan su nombre; Robinson, en los años 1960, formalizó lógicamente ese mismo concepto. Pero la diferencia estructural persiste: Robinson *amplía* los reales; Veronese *construye* su recta desde cero, geométricamente, lo que lo acerca más a Peirce que al análisis no estándar.

Veronese señala, además, en una nota al §55, traducida al inglés por Fisher (1994), que:

> El continuo rectilíneo no está nunca compuesto por sus puntos, sino por los segmentos que los unen de dos en dos y que son, por ello mismo, continuos. De este modo, el misterio de la continuidad queda desplazado desde una porción dada y fija de la recta hacia una porción indeterminada, tan pequeña como se quiera, que, sin embargo, siempre continúa (p. 143, traducción del autor de este artículo).

Esta tesis, según la cual el continuo es anterior a sus puntos, es el primer encuentro profundo con Peirce.

PEIRCE Y EL SINEQUISMO

Charles Sanders Peirce (1839 - 1914) desarrolló a lo largo de su vida una doctrina filosófica sobre la continuidad que denominó *sinequismo*: la tesis de que la continuidad es la categoría fundamental de la realidad. Ya en 1868, en sus escritos sobre la cognición, afirmó que "la cognición surge mediante un proceso continuo" (citado en McNabb, 2018, p. 236).

La evolución del concepto de continuo en Peirce atraviesa cinco períodos (Havenel, 2008). En el anti-nominalista (1868-1884) sostiene que las partes se construyen a partir del continuo, posición que comparte con Veronese. En el cantoriano (1884-1892) reconoce la definición de Cantor, pero señala que gira en torno a consideraciones métricas, mientras que la distinción entre lo continuo y lo discontinuo es manifiestamente no-métrica (como se citó en McNabb, 2018, p. 238).

Es en el período infinitesimal (1892-1897) donde aparece el encuentro más nítido con Veronese: Peirce afirma que, en una extensión continua, digamos una línea continua, hay líneas continuas infinitamente cortas, y que toda la línea está compuesta de tales partes infinitesimales (Havenel, 2008). Como señala Havenel (2008), este continuo, contrario al de Cantor, pero similar al de Veronese, no es arquimediano.

El período supermultitudinario (1897-1907) radicaliza la posición: una continuidad verdadera es supermultitudinaria y en ella los puntos han perdido su identidad individual para convertirse en una unidad continua de pura potencialidad (Havenel, 2008). En la lectura de McNabb (2018), esto significa que la línea es ontológicamente anterior a sus puntos: la línea tiene un ser propio, y los puntos no son entidades autónomas que la compongan, sino posibilidades latentes en ella, cuyo ser deriva del ser previo de la línea. Aquí aparece el desencuentro fundamental con Veronese: el continuo de Peirce no puede construirse a partir de puntos.

El quinto período, el topológico (1908-1913), es el momento en que Peirce abandona la supermultitudinariedad como criterio central y busca definir la continuidad mediante relaciones topológicas entre las partes (Havenel, 2008). Hasta diciembre de 1913 seguía buscando una alternativa a Cantor-Dedekind. A lo largo de todos sus períodos mantiene la tesis de la potencialidad de los puntos, que lo separa irrevocablemente de Veronese.

CONCLUSIÓN: ENCUENTROS Y DESENCUENTROS

El diálogo entre Veronese y Peirce no fue explícito (no hay evidencia de que se leyeran el uno al otro), pero es filosóficamente real. Zalamea (2001, 2012) lo identifica con precisión: ambos autores reaccionan contra el mismo adversario, el continuo de Cantor-Dedekind, y esa reacción compartida genera los encuentros. Al mismo tiempo, las diferencias en el punto de partida y en el propósito de cada uno generan los desencuentros.

En cuanto a los encuentros, Zalamea (2012) señala que tanto Veronese como Peirce rechazan que el continuo pueda reducirse a puntos discretos. El dibujo del §55 de los *Fondamenti* lo ilustra geométricamente: suprimir un punto intermedio de la secuencia a, b, c, d desconecta el continuo, pues el punto actúa como marca de separación, no como componente del todo (Fisher, 1994). Peirce sostendrá lo mismo filosóficamente: un punto actual es una discontinuidad porque su presencia como individuo rompe la continuidad (Havenel, 2008). De esta pregunta compartida (¿de qué está hecho el continuo y cuál es el papel de los puntos?) emerge la coincidencia en los infinitesimales: Veronese los genera como objetos geométricos dados; Peirce llega a ellos al insistir en que ninguna colección de puntos agota el continuo. El continuo peirceano del período infinitesimal, como el de Veronese, no es arquimediano (Havenel, 2008). El encuentro está en la pregunta, no en la teoría.

En cuanto a los desencuentros, el continuo de Veronese es geométrico y constructivo: parte de hipótesis explícitas, genera objetos con identidad precisa y es formalizable, como documenta Ehrlich (1994). El continuo de Peirce es semiótico y modal: sus puntos son potenciales y no pueden individualizarse sin romper la continuidad misma. Como apunta Havenel (2008), para Robinson y la mayoría de las teorías del análisis no estándar, el continuo está construido desde puntos, lo que es profundamente incompatible con la concepción de Peirce, y lo mismo vale, en sentido inverso, para Veronese.

En ese sentido, y siguiendo a Zalamea (2012), el continuo de Veronese representa un encuentro matemático con el de Peirce (comparten la estructura no-arquimediana y el rechazo a la discretización) pero un desencuentro filosófico: uno piensa el continuo como objeto geométrico construible desde hipótesis; el otro, como modo de ser de lo real, irreductible a ninguna construcción axiomática finita.

VISIONES AL FUTURO: EL GESTO DE VARGAS Y LA VIGENCIA DEL PROBLEMA

El capítulo de Vargas (2022) en el volumen *Advances in Peircean Mathematics: The Colombian School*, editado por Zalamea, construye un modelo del continuo peirceano dentro de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos. Lo notable del resultado radica precisamente en ello: las cuatro propiedades que Peirce atribuía al continuo –supermultitud, reflexividad, inextensibilidad y modalidad– se obtienen simultáneamente con las herramientas matemáticas más comunes y aceptadas. Como reconoce Zalamea (2018), este resultado contradijo lo que los especialistas habían sostenido durante décadas, a saber, que era imposible reunir esas cuatro propiedades en un mismo modelo.

El gesto de Vargas combina iterar copias de la recta real a lo largo de todos los ordinales e invertir el orden de la contención conjuntista (relación E, Vargas, 2022, §2.2): de ahí emerge que cada mónada local es isomorfa al modelo global, la supermultitudinariedad resulta como consecuencia, y al ser el modelo no bien fundado los puntos son concebibles solo como límites ideales, en el sentido peirceano (Vargas, 2022).

Este modelo abre un puente entre la tradición geométrica de Veronese y la tradición semiótica de Peirce. Lo que ambos pensaron por separado comienza a articularse en el siglo XXI como un programa matemático coherente (Zalamea, 2022).

REFERENCIAS

Ehrlich, P. (ed.) (1994). *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Springer Netherlands.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV* (M. L. Puertas Castaños, trad.; vol. 1). Madrid: Editorial Gredos.

Fisher, G. (1994). Veronese's non-Archimedean linear continuum. En P. Ehrlich (ed.), *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua* (pp. 107-145). Springer Netherlands.

Guevara Rodríguez, J. L. y Rodríguez Delgado, H. E. (2025). ¿Fue Veronese el instaurador de la primera geometría no arquimediana? En *Memorias del XXIV Congreso Colombiano de Matemáticas*. Sociedad Colombiana de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira.

Havenel, J. (2008). Peirce's clarifications of continuity. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, *44*(1), 86-133.

Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría* (F. Cebrián, trad.) [2.ª ed.]. España: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Jones, C. (1987). La influencia de Aristóteles en el fundamento de los *Elementos* de Euclides. *Mathesis*, *3*(1), 375-389.

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry* (E. R. Hedrick y C. A. Noble, trads.). Nueva York: Macmillan.

Luque Arias, C. J., Mora Mendieta, L. C. y Páez Ortegón, J. E. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir* [2.ª ed.]. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque Arias, C. J., Mora Mendieta, L. C. y Torres Díaz, J. A. (2014). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: clasificar, medir e invertir* [2.ª ed.]. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

McNabb, D. (2018). *Hombre, signo y cosmos: la filosofía de Charles S. Peirce*. México: FCE.

Rodríguez Delgado, H. E. (2023). *El infinitesimal, una noción de múltiples rostros*. Trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Colombia.

Rodríguez, H. y Guacaneme, É. (2022). ¿Infidelidades geométricas?: Aventuras del ángulo corneado. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 25* (pp. 187-194). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Sattler, B. M. (2021). The concept of motion in ancient Greek thought. En S. Shapiro y G. Hellman (eds.), *The history of continua: Philosophical and mathematical perspectives* (pp. 1-31). Oxford University Press.

Takahashi Orosco, A. (1976). *Del análisis a la topología*. México: Editorial Limusa.

Vargas, F. (2022). A full model for Peirce's continuum. En F. Zalamea (ed.), *Advances in Peircean mathematics: The Colombian school* (pp. 54-101). Berlin/Boston: De Gruyter.

Veronese, G. (1891). *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*. Padova: Tipografia del Seminario.

Zalamea, F. (2001). *El continuo peirceano*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Zalamea, F. (2012). *Peirce's logic of continuity. A conceptual and mathematical approach*. Boston: Docent Press.

Zalamea, F. (2018). Las nuevas generaciones (2012-hoy). En J. F. Trujillo Amaya (ed.), *El pragmaticismo de C. S. Peirce: comunidad, realismo y verdad* (pp. 53-54). Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Zalamea, F. (ed.) (2022). *Advances in Peircean mathematics: The Colombian school*. Berlin/Boston: De Gruyter.

Cronotopía y lógica del descubrimiento matemático: un análisis histórico-filosófico de la fórmula de Euler en Pólya y Lakatos

Óscar Jaramillo y Evelio Bedoya
Universidad del Valle
oscar.pineda@correounivalle.edu.co, evelio.bedoya@correounivalle.edu.co

En este artículo se analiza, desde un enfoque histórico-filosófico, con propósitos formativo docente y didáctico, la articulación entre la lógica del descubrimiento matemático, reconstruida por Pólya y Lakatos, y el programa Cronotopía de Carlos Eduardo Vasco, en el caso de la fórmula de Euler para poliedros. Se asume el programa Cronotopía como *teoría explicativa* y los métodos de inducción y de pruebas y refutaciones como *teorías interpretativas* que suministran los hechos del caso. Mediante un estudio de caso, se reconstruyen las etapas de *problema-conjetura* y de *prueba-refutación*, codificándolas en términos de **grafías**, **logías**, **metrías** y **nomías**. Los resultados evidencian la presencia sistemática de estas fases y la conservación de su orden evolutivo en la heurística del descubrimiento. A partir de este análisis, se propone una lectura didáctica que orienta el diseño de unidades didácticas para la enseñanza de la geometría y la formación de profesores, en las que los objetos matemáticos se introducen mediante procesos de visualización, verbalización, cuantificación y formalización progresiva.

Introducción

La discusión contemporánea sobre la naturaleza de las matemáticas ha cuestionado la imagen formalista de la disciplina como un sistema cerrado de "verdades necesarias y casi absolutas" (Ernest, 1991; Hersh, 1997). En contraste, enfoques como el cuasiempirismo y el constructivismo social han destacado el carácter falible, revisable e históricamente situado del conocimiento matemático, así como el papel de la argumentación y la crítica en la constitución de las teorías matemáticas (Hersh, 1997; Lakatos, 1976).

En este horizonte se sitúa la reconstrucción de la lógica del descubrimiento matemático formulada por Pólya y desarrollada críticamente por Lakatos. Mientras Pólya describe la emergencia de conjeturas plausibles a partir de la observación de patrones y cuasiexperimentos (Pólya, 1966), Lakatos analiza cómo las pruebas se refinan mediante contraejemplos, reformulaciones y nuevas distinciones

Jaramillo, Ó. y Bedoya, E. (2026). Cronotopía y lógica del descubrimiento matemático: un análisis histórico-filosófico de la fórmula de Euler en Pólya y Lakatos. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 99-106. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

conceptuales, tomando como caso emblemático la fórmula de Euler para poliedros (Lakatos, 1976).

Paralelamente, el programa Cronotopía de Carlos Eduardo Vasco propone una hipótesis evolutiva según la cual las ciencias pueden reconstruirse desde cuatro formas de comunicación humana –grafías, logías, metrías y nomías– entendidas como registros semióticos y modos de organización del conocimiento (Aroca, 2021; Vasco, 2001, 2006, 2013, 2019).

El problema de investigación que orienta el trabajo que aquí se presenta surge de la ausencia de estudios que articulen explícitamente ambas perspectivas en un caso geométrico concreto. En consecuencia, la pregunta es: *¿cómo se articulan las fases grafías, logías, metrías y nomías del programa Cronotopía con la heurística del descubrimiento matemático reconstruida por Pólya y Lakatos en el caso de la fórmula de Euler para poliedros?* El objetivo general consiste en reconstruir y analizar ese proceso con el fin de contrastarlo con la hipótesis de Vasco sobre la evolución de las formas de comunicación matemática. La hipótesis de trabajo sostiene que las cuatro fases del *programa Cronotopía* se manifiestan de manera ordenada en las etapas de *problema-conjetura* y *prueba-refutación*, ofreciendo un fundamento evolutivo para comprender la lógica del descubrimiento matemático como transformación de registros semióticos.

Este estudio no se limita a un análisis histórico-filosófico. Su interés radica en que la lógica del descubrimiento matemático –caracterizada por el tránsito desde visualizaciones y verbalizaciones hacia cuantificaciones y formalizaciones– ofrece criterios para la formación de profesores de matemáticas. En particular, permite orientar decisiones de diseño curricular y la construcción de unidades didácticas que repliquen, en el ámbito escolar, esta dinámica evolutiva del conocimiento geométrico.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El marco teórico se apoya en la metodología de los programas de investigación, concepción que distingue entre teorías explicativas de los hechos y teorías interpretativas que suministran los hechos (Díez y Moulines, 1999; Lakatos, 1989). Esta distinción permite asumir el programa Cronotopía como núcleo explicativo sometido a contraste y, al mismo tiempo, usar el método inductivo de Pólya y el método de pruebas y refutaciones de Lakatos como categorías de reconstrucción del caso.

En esta investigación, el programa Cronotopía formula la hipótesis de que la evolución de una disciplina puede reconstruirse mediante cuatro fases (Vasco, 2019). Las grafías remiten a representaciones visuales; las logías, a descripciones y argumentaciones en lengua natural; las metrías, a prácticas de conteo, medida y cálculo; y las nomías, a enunciados con forma de ley, definición, axioma o teorema. Estas fases no son excluyentes, pero conservan un orden evolutivo general en el que las grafías y las logías anteceden y sostienen a las metrías y las nomías.

Este enfoque resulta especialmente pertinente para el estudio de la geometría, porque permite analizar el descubrimiento y la justificación como procesos de transformación entre registros de representación. En esa dirección, la reconstrucción pólyana-lakatosiana aporta la descripción fina de los momentos heurísticos –problema, conjetura, prueba, contraejemplo, reformulación– sobre los cuales se examina la hipótesis del programa Cronotopía.

Metodología

La investigación se inscribe en un enfoque histórico-filosófico de la actividad matemática y adopta un diseño de estudio de caso centrado en la reconstrucción del descubrimiento y desarrollo de la fórmula de Euler para poliedros en Pólya (1966) y Lakatos (1976). El corpus está constituido por los fragmentos en los que se describen la formulación del problema, los cuasiexperimentos, la emergencia de conjeturas, la construcción y revisión de pruebas, la aparición de contraejemplos y la introducción de nuevas distinciones conceptuales.

Desde esta perspectiva, la distinción entre *teorías explicativas* y *teorías interpretativas* se incorpora aquí como criterio metodológico de análisis. En consecuencia, el programa Cronotopía se asume como teoría explicativa cuyo contenido empírico se contrasta, mientras que el método inductivo de Pólya y el método de pruebas y refutaciones de Lakatos se toman como teorías interpretativas que describen la heurística de la actividad matemática y suministran las categorías con las que se reconstruye el episodio histórico.

El análisis se realiza en dos niveles. Primero, se reconstruye paso a paso la heurística del caso, distinguiendo una etapa de problema y conjetura y una etapa de prueba y refutación. Segundo, se codifica cada paso en términos de grafías, logías, metrías y nomías, identificando los elementos visuales, verbales, cuantitativos y nómicos que intervienen. Finalmente, ambas reconstrucciones se comparan para establecer si la secuencia general $grafías \rightarrow logías \rightarrow metrías \rightarrow nomías$ se conserva en el proceso de descubrimiento y si ello aporta evidencia a favor de la hipótesis de Vasco.

ANÁLISIS HISTÓRICO-FILOSÓFICO

Etapa de problema y conjetura: el método de la inducción (Pólya, 1966)

La primera etapa del caso corresponde a la formulación del problema y a la emergencia de una conjetura inicial sobre la relación entre los números de caras, de vértices y de aristas de los poliedros. Siguiendo a Pólya, el punto de partida no es una demostración formal, sino un cuasiexperimento en el que se examinan ejemplos particulares como el cubo y el prisma triangular, junto con otros poliedros representados en la Imagen 1, contando en cada caso el número de caras (C), vértices (V) y aristas (A), cuyos valores se organizan en la Tabla 1. En esta fase predominan las grafías y las logías: el trabajo matemático se apoya en las figuras de los poliedros y en las descripciones verbales de vértices, aristas y caras, lo que permite fijar qué se considera objeto de conteo antes de cualquier formalización.

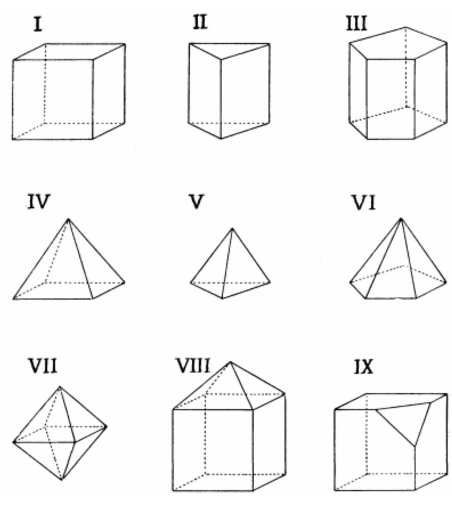


Imagen 1: ejemplos de poliedros utilizados en el cuasiexperimento de Pólya (Pólya, 1966)

Sobre esta base se introducen las metrías, al sistematizar los resultados del "cuasiexperimento" en la Tabla 1 y comparar los valores de C, V y A para cada poliedro. El examen conjunto de la Imagen 1 y de la Tabla 1 conduce a "observar" una regularidad persistente, expresada en la relación $C + V = A + 2$, que se verifica en todos los ejemplos considerados, incluidos el icosaedro y el dodecaedro. Desde la perspectiva del programa Cronotopía, este tránsito muestra el paso de grafías y logías hacia metrías y nomías: las representaciones visuales y los enunciados descriptivos permiten organizar observaciones; las operaciones de conteo producen relaciones cuantitativas; y la regularidad descubierta se formula como una conjetura general que funciona como enunciado nómico sobre los poliedros.

	Poliedros	*C*	*V*	*A*
I.	Cubo	6	8	12
II.	Prisma triangular	5	6	9
III.	Prisma pentagonal	7	10	15
IV.	Pirámide cuadrada	5	5	8
V.	Pirámide triangular.	4	4	6
VI.	Pirámide pentagonal	6	6	10
VII.	Octaedro	8	6	12
VIII.	«Torre».	9	9	16
IX.	«Cubo truncado».	7	10	15

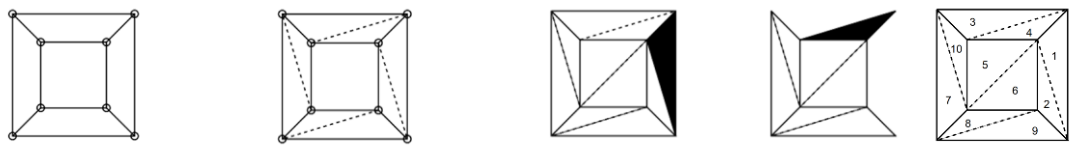
Tabla 1: datos del cuasiexperimento sobre el número de caras (C), vértices (V) y aristas (A) en poliedros (Pólya, 1966)

Esta etapa puede sintetizarse como un proceso en el que la realización de un cuasiexperimento de visualización, apoyado en grafías (Imagen 1) y logías, hace posible la abstracción de ciertas propiedades de los poliedros mediante metrías (Tabla 1) y culmina en la formulación de una conjetura primitiva que expresa una nomía todavía no demostrada. Dicha conjetura constituye la materia prima para la siguiente etapa, en la que se intentará probarla y someterla a crítica.

Etapa de probar: el método de pruebas y refutaciones (Lakatos, 1976)

La segunda etapa corresponde al paso desde la conjetura ingenua hacia una prueba sometida a refutaciones locales y sucesivas reformulaciones. En la reconstrucción de Lakatos, se busca demostrar que para todo poliedro se cumple $V - A + C = 2$ mediante un “experimento mental” dividido en tres pasos: i) recortar una cara del poliedro y aplanar la superficie restante como red plana (Imagen 2a), ii) triangular esa red añadiendo diagonales (Imagen 2b) y iii) eliminar luego los triángulos uno a uno, según los patrones mostrados en la Imagen 2c, controlando en cada operación el valor del invariante $V - A + C$. En esta prueba reaparecen de manera articulada las cuatro fases del programa

Cronotopía: grafías, en las redes planas trianguladas representadas en las Imagen 2a-c; logías, en los conceptos de prueba, lema, teorema, red triangular; metrías, en el conteo de vértices, aristas y caras en cada transformación; y nomías, en la exigencia de conservar el valor de $V - A + C$ a lo largo del procedimiento.



(a) (b) (c) (d)

Imagen 2: etapas de la prueba y refutación de la fórmula de Euler
(a) red plana del poliedro, (b) triangulación, (c) eliminación de triángulos, (d) contraejemplo local al tercer lema (Pólya, 1966)

El rasgo central de esta etapa es que la prueba no se presenta como un argumento definitivo, sino como un proceso sometido a críticas de los estudiantes, que introducen contraejemplos locales al tercer lema. El contraejemplo construido a partir de la red plana del cubo, representado en la Imagen 2d, muestra que no cualquier triángulo puede ser eliminado sin alterar el valor del invariante y obliga a refinar la prueba, primero restringiendo la eliminación a triángulos fronterizos y luego introduciendo una formulación más precisa sobre el orden en que se eliminan los triángulos para preservar $V - A + C$. Desde la lectura del programa Cronotopía, este proceso exhibe una reorganización continua de grafías, logías, metrías y nomías: las redes planas (Imagen 2) se usan para construir y refutar lemas; el lenguaje técnico se enriquece con nuevas distinciones (triángulo interior y triángulo fronterizo); el conteo se ajusta a condiciones más estrictas; y las nomías se reformulan para recuperar su validez bajo definiciones más precisas.

En síntesis, la etapa de probar muestra que el núcleo del método de pruebas y refutaciones consiste en descomponer la conjetura en lemas, someter esos lemas a la crítica mediante contraejemplos (como el ilustrado en la Imagen 2d) y reformularlos introduciendo nuevos conceptos, hasta obtener una versión mejorada de la conjetura que supera a la conjetura inicial. Interpretado desde el programa Cronotopía, este proceso confirma que la lógica del descubrimiento matemático no es un simple paso de datos a regularidades nómicas, sino un movimiento de ida y vuelta entre grafías, logías, metrías y nomías, en el que cada refutación obliga a reorganizar las formas de comunicación y los registros semióticos que sostienen la actividad matemática.

Resultados y conclusión

El análisis permitió identificar la presencia sistemática de las fases de grafías, logías, metrías y nomías en las etapas de problema–conjetura y prueba–refutación, así como la conservación de su orden evolutivo general. Estos resultados respaldan la compatibilidad entre el programa Cronotopía y la reconstrucción pólyana-lakatosiana de la lógica del descubrimiento matemático.

Desde el punto de vista formativo, esta articulación permite derivar un principio didáctico: los objetos geométricos no deberían introducirse como definiciones acabadas, sino como el resultado de procesos de exploración, conjetura, prueba y reformulación. En este sentido, las unidades didácticas pueden diseñarse como procesos que inician en grafías y logías (visualización y descripción), incorporan metrías (organización cuantitativa) y culminan en nomías (formalización), reproduciendo la dinámica histórica del conocimiento matemático.

Así, conjeturas, pruebas y refutaciones dejan de ser únicamente contenidos epistemológicos y se convierten en herramientas para la enseñanza de la geometría y para la formación de profesores capaces de diseñar experiencias de aprendizaje coherentes con la naturaleza del quehacer matemático.

Referencias

Aroca, A. (2021). *Formas de expresión de modelos mentales [cronotópicos] de alumnos y profesor en clase de Geometría Analítica de grado 10°*. Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Díez, J. A. y Moulines, C. U. (1999). *Fundamentos de filosofía de la ciencia* [2.ª ed.]. Editorial Ariel S. A.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education* (reimpreso en 1993). The Falmer Press, Taylor & Francis Inc.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* [1.ª ed.]. Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático* (Titivillus, ed.; C. Solís, trad.). Epublibre.

Lakatos, I. (1989). *La metodología de los programas de investigación científica* (J. Worall y G. Currie, eds.). Alianza Editorial, S. A.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible* (J. L. Abellán, trad.). Editorial Tecnos S.A.

Vasco, C. E. (2001). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *6*(9), 77-91.

Vasco, C. E. (2006). Cronotopía: un "Programa de Bogotá" para lo que se suele llamar "Geometría". En *Memorias XVI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones – IV Encuentro de Aritmética* (vol. 1, pp. 1-28). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Vasco, C. E. (2013). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 133-148.

Vasco, C. E. (2019). El programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *14*(18), 191-198.

INVERNADEROS: UNA SECUENCIA DE TAREAS EN GEOMETRÍA PARA PROMOVER LA ARGUMENTACIÓN EN ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO EN CONTEXTO RURAL

Aura Mariño y John Mendoza
Universidad Pedagógica Nacional
ammarinor@upn.edu.co, jamendozar@upn.edu.co

Presentamos una experiencia en un contexto rural, centrada en el diseño de una secuencia de tareas en geometría, su implementación y análisis de los resultados, cuyo propósito era promover la argumentación en estudiantes de noveno grado. La propuesta, enmarcada en un experimento de enseñanza, toma como contexto la construcción de invernaderos, para abordar relaciones de distancia y forma en la elipse, la parábola y la circunferencia. El análisis de las producciones escritas de los estudiantes –apoyado en Toulmin, en una caracterización específica de argumento, y en el uso de marcos de lenguaje– sugiere que la argumentación requiere de un trabajo sostenido y que las ~~de~~ tareas contextualizadas inciden en los elementos del argumento y favorecen aprendizajes geométricos iniciales.

CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

Esta experiencia se desarrolla en el marco de un trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuyo propósito general es analizar la argumentación en estudiantes de secundaria en un contexto rural, en relación con la posible existencia de una brecha curricular entre la educación rural y la urbana.

Dicha brecha se entiende como diferencias en enfoques, contenidos y oportunidades de aprendizaje que se concretan en el aula. En este sentido, se plantea que el desarrollo de competencias, en particular, la de argumentación, puede constituirse en una vía para afrontar dichas desigualdades, en la medida en que permite a los estudiantes explicar, justificar y comunicar sus ideas.

La geometría se reconoce como un campo especialmente propicio para este propósito, dado que involucra la formulación de conjeturas, la exploración de propiedades y la validación de relaciones entre objetos matemáticos. En particular, el estudio de algunas cónicas (elipse, parábola y circunferencia) ofrece posibilidades de articulación con contextos cercanos a los estudiantes: las cubiertas

Mariño, A. y Mendoza, J. (2026). Invernaderos: una secuencia de tareas en geometría para promover la argumentación en estudiantes de noveno grado en contexto rural. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 107-114. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

curvas de los invernaderos permiten discutir formas, simetrías, focos, distancias y criterios de eficiencia asociados al diseño geométrico.

A partir de estas consideraciones, se diseña e implementa una secuencia de tareas en la Institución Educativa Técnica Nuestra Señora de la Asunción (Fresno, Tolima), con dos cursos de grado noveno (37 estudiantes), tomando como contexto la construcción de invernaderos. Este contexto, conocido y elegido por los estudiantes, generó alto nivel de interés y permitió situar las decisiones geométricas en problemas concretos de diseño.

MARCO DE REFERENCIA

Adoptamos la perspectiva de Camargo *et al.* (2024), quienes definen argumentación, argumento, argumento simple, argumento simple incompleto y justificación de la siguiente forma:

> Argumento es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. […]
>
> Argumento simple es un argumento conformado por tres elementos (dato, aserción, garantía) relacionados funcionalmente así: el dato es una razón que fundamenta la aserción, es evidencia que sustenta la aserción; la garantía es una razón que sustenta la relación del dato y la aserción, sostiene mediante un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. En caso de que falte la garantía, hablamos de argumento simple incompleto.
>
> Argumentación es un proceso discursivo y sociocultural en el que surgen argumentos. […]
>
> Justificación es un conjunto de razones para soportar la veracidad o la aceptabilidad de la aserción. Con esta conceptualización, una justificación no es un argumento porque no incluye la aserción. (pp. 317-318)

Para el análisis de las producciones escritas de los estudiantes, se articula esta perspectiva con el modelo de Toulmin (2007), que permite distinguir funcionalmente entre dato, aserción y garantía, lo cual resulta útil para caracterizar las producciones de la siguiente forma (véase figura 1).

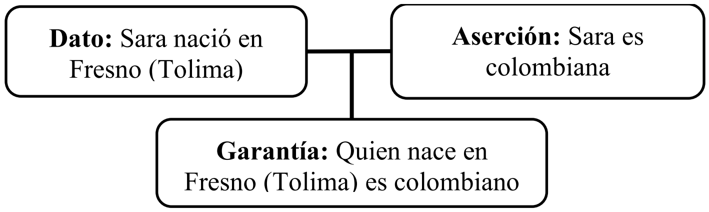


Figura 1: ejemplo de argumento simple bajo la estructura de Toulmin

METODOLOGÍA

La investigación se enmarca en un experimento de enseñanza (Camargo, 2021), entendido como una estrategia que articula el diseño, implementación y análisis de los resultados de una secuencia de tareas a partir de una conjetura sobre el aprendizaje. En este caso, se desarrolló un primer ciclo de diseño–implementación–análisis, orientado por la conjetura de que una secuencia de tareas en geometría, centrada en el estudio de las cónicas mediante la construcción de invernaderos en un contexto rural, puede propiciar condiciones para que los estudiantes argumenten.

La implementación se llevó a cabo en dos sesiones. En la primera, los estudiantes diseñaron y construyeron invernaderos asociados a distintas cónicas (elipse, parábola y circunferencia), apoyados en guías que incorporan preguntas acompañadas de marcos de lenguaje (Ross *et al.* 2009), entendidos como apoyos para la comunicación escrita que orientan la organización de las ideas. Su inclusión responde a que "como otras habilidades y estrategias, a los estudiantes se les tiene que enseñar cómo participar en una argumentación" (p. 1). Las preguntas no se limitaron a la construcción del modelo, sino que buscaron que los estudiantes relacionaran decisiones del diseño con propiedades geométricas: por ejemplo, la forma de la cubierta, la ubicación de puntos relevantes, la comparación de distancias y la estabilidad o eficiencia de cada estructura. En las etapas finales de la tarea, estos apoyos se retiraron progresivamente, con el propósito de observar si los estudiantes lograron estructurar argumentos de manera autónoma.

En la segunda sesión, se retomaron estas construcciones para promover el reconocimiento de propiedades geométricas, en particular, a partir de mediciones y comparaciones. Luego, los estudiantes elaboraron una producción escrita en la que argumentaron sobre la eficiencia de su invernadero, incorporando afirmación, datos, garantía y contraargumento. De este modo, la eficiencia del invernadero funcionó como una situación de decisión que exigía justificar relaciones entre la forma construida, las medidas obtenidas y las propiedades geométricas identificadas. En el tiempo intermedio entre ambas sesiones se realizaron ajustes a partir del análisis preliminar de las respuestas de los estudiantes, en coherencia con la lógica iterativa del experimento de enseñanza.

La recolección de información se centró en las producciones escritas de los estudiantes, consignadas en las guías de trabajo, complementadas con registros en video y observaciones de aula. En total, se analizaron aproximadamente 90 producciones, de las cuales se seleccionaron fragmentos representativos como unidades de análisis.

Durante el análisis reconocimos que los estudiantes presentaron garantías tanto de forma explícita como implícita; en este sentido, en el caso del argumento simple, se observó que pueden establecer la relación entre dato y aserción sin explicitar la garantía. Teniendo en cuenta eso y basados en Camargo *et al.* (2024) y en la estructura de Toulmin, clasificamos las producciones en: (i) argumentos simples con garantía explícita o implícita, (ii) argumentos simples incompletos y (iii) justificaciones.

RESULTADOS

Los resultados permiten identificar que el diseño de la secuencia incide de manera diferenciada en los elementos del argumento y en la manera como los estudiantes movilizan algunas ideas geométricas sobre las cónicas trabajadas.

En particular, como se ejemplifica en la figura 2, el uso de marcos de lenguaje favorece la explicitación de la aserción y el dato, al proporcionar a los estudiantes una estructura desde la cual organizar sus ideas.

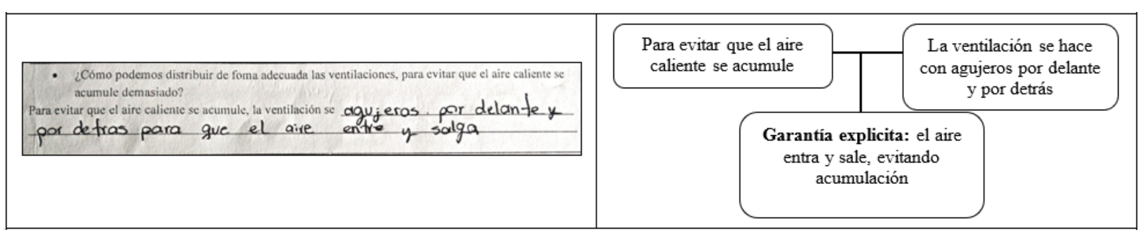


Figura 2: ejemplo de argumento simple con garantía explícita, teniendo marco de lenguaje

En contraste, en la figura 3, se evidencia, por ejemplo, una justificación cuando no se tiene el marco de lenguaje.

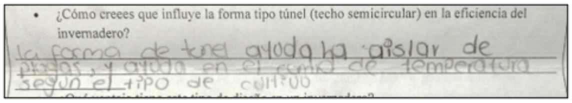
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Los estudiantes plantean dos razones (control de plagas y control de temperatura) para validar la eficiencia de su invernadero, sin embargo esta respuesta constituye a una justificación que no llega a configurarse como argumento.</td>
</tr>
</table>

Figura 3: ejemplo de justificación, sin tener marco de lenguaje

Sin embargo, la garantía –entendida como el enunciado que generaliza la relación entre dato y aserción– permanece en la mayoría de los casos implícita o ausente (véase figura 4).

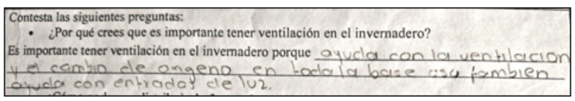
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Es un argumento simple incompleto ya que el marco del lenguaje presenta la aserción y el estudiante da razones que se configuran como el dato del argumento, sin embargo, no se evidencia una garantía implícita o explicita que se relacione con el dato y la aserción.</td>
</tr>
</table>

Figura 4: ejemplo de argumento simple incompleto, teniendo marco de lenguaje

En contraste, en las tareas en las que se retiran los marcos de lenguaje, las producciones tienden a ser más breves y descriptivas, centradas en características aisladas, lo que sugiere que dichos apoyos cumplen un papel importante en la estructuración inicial de la argumentación.

Al comparar las dos sesiones (véanse figuras 5 y 6), se observa una evolución en las producciones de los estudiantes: en la segunda sesión emergen intentos más elaborados de explicación. Por ejemplo, a partir de la experiencia de construcción y medición de la elipse, algunos estudiantes reconocieron regularidades como la constancia en la suma de distancias a los focos; en otros casos, las comparaciones entre formas de invernadero permitieron relacionar la curvatura, la amplitud de la estructura y la conveniencia de determinadas formas para la eficiencia del invernadero. Estos aprendizajes geométricos aparecen todavía ligados a la experiencia empírica de construcción y medición, por lo cual dan lugar, en su mayoría, a argumentos simples incompletos, en los que la relación entre datos y aserciones no alcanza a generalizarse. Aun así, resulta significativo que, incluso sin marcos de lenguaje, emergen producciones que articulan datos y aserción.

Figura 5: ejemplo de argumento simple con garantía implícita, teniendo marco de lenguaje

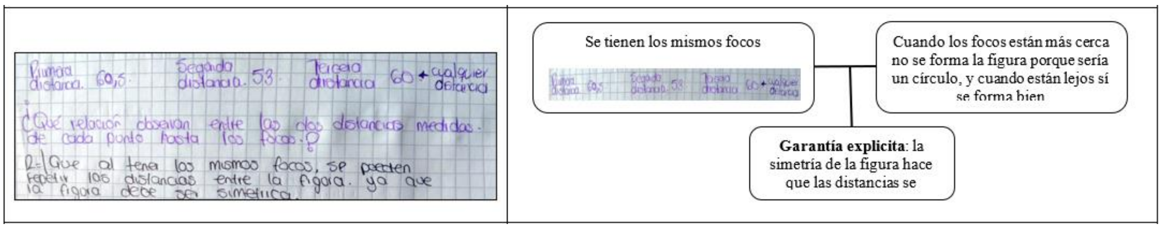


Figura 6: argumento simple con garantía explícita, sin tener marco de lenguaje

Este resultado sugiere que la argumentación no se consolida en intervenciones puntuales, sino que requiere de un trabajo sostenido en el tiempo.

Además, el contexto de los invernaderos para abordar el estudio de las cónicas, aunque el objeto geométrico era inicialmente desconocido para los estudiantes, generó un alto nivel de involucramiento y proporcionó una base empírica para la construcción de argumentos. La cercanía del contexto permitió que las decisiones de diseño –qué forma usar, cómo justificar su eficiencia y qué medidas considerar– se convirtieran en oportunidades para discutir propiedades geométricas específicas y no solo características prácticas del invernadero.

Como aporte de la experiencia, se destaca el diseño de una secuencia de tareas que articula contexto rural, estudio inicial de cónicas y promoción de la argumentación mediante marcos de lenguaje. En este sentido, la propuesta busca constituirse como una herramienta para docentes interesados en generar oportunidades de aprendizaje que no partan de una mirada exclusivamente centrada en el contexto urbano, reconociendo que contextos cercanos, como los invernaderos, también pueden convertirse en escenarios legítimos para aprender geometría y participar de una argumentación. Asimismo, el uso de marcos de lenguaje ofrece una posibilidad concreta para acompañar a los estudiantes en la construcción de argumentos dentro del aula de matemáticas. En cuanto a sus limitaciones, el análisis corresponde a un primer ciclo de implementación, realizado en dos sesiones, por lo que no permite afirmar una consolidación de aprendizajes geométricos; sin embargo, sí evidencia avances en la forma en que los estudiantes estructuran sus argumentos durante el desarrollo de la secuencia. Por esto, identificamos indicios y necesidades para ciclos posteriores de diseño y mediación.

Comentarios finales

Los resultados sugieren que la dificultad principal en la construcción de argumentos no radica en la formulación de afirmaciones ni en la identificación de datos, sino en la producción de garantías, es decir, en la capacidad de establecer enunciados generales que conecten ambos elementos.

En este sentido, el uso de marcos de lenguaje se muestra como una herramienta potente para iniciar procesos de argumentación, en la medida en que apoya la estructuración de las ideas; sin embargo, su uso no garantiza por sí mismo la construcción de relaciones generalizables. Asimismo, se evidencia que la argumentación no emerge de manera inmediata, sino que requiere de un trabajo sostenido en el tiempo, en el que el diseño de tareas y la mediación del docente deben orientarse progresivamente hacia la explicitación de relaciones matemáticas.

Finalmente, la experiencia muestra que el uso de contextos significativos, incluso cuando el objeto geométrico es nuevo para los estudiantes, puede generar condiciones favorables para la argumentación, al situar la actividad matemática en problemas que requieren toma de decisiones y justificación. En particular, desde las acciones de construcción, medición y comparación realizadas en el contexto de los invernaderos permitió introducir propiedades de las cónicas y favorecieron aproximaciones a ideas como la relación entre forma y estabilidad y la distribución del aire en estructuras elípticas, parabólicas y circulares. Sin embargo, los resultados también muestran que es necesario fortalecer la mediación para que los estudiantes transiten de justificaciones contextuales o empíricas hacia argumentos apoyados en relaciones geométricas más generales.

Referencias

Camargo, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis. Medellín: Universidad de Antioquia.

Camargo, L., Perry, P., Molina, Ó., Samper, C. y Vargas, C. (2024). Diversidad de acepciones de argumento: necesidad de la formación de profesores. *PNA*, *18*(3), 313-338. http://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26749

Ross, D., Fisher, D. y Frey, N. (2009). The art of argumentation. *Science and Children, 47*(3), 28-31.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación* (M. Morrás y V. Pineda, trads.). Ediciones Península.

Micromundo STEAM para el aprendizaje del área y perímetro con estudiantes indígenas

Adrián Mestizo, Yina Dagua y Diana Ortiz
Universidad del Valle
adrian.mestizo@correounivalle.edu.co, yina.dagua@correounivalle.edu.co,
diana.ximena.ortiz@correounivalle.edu.co

El presente avance de investigación aborda los fundamentos teóricos y metodológicos que orientan el diseño de un micromundo de aprendizaje que articula la educación STEAM y el Sistema Educativo Indígena Propio (SEIP) para el aprendizaje del área y perímetro con estudiantes indígenas nasa de grado séptimo. La propuesta surge ante la persistencia de prácticas educativas convencionales y la limitada integración de las matemáticas en experiencias STEAM. Desde una perspectiva socioconstructivista sustentada en los aportes de Jerome Bruner, se plantea la construcción de la nasa yat (casa nasa) mediante el *software Sweet Home* 3D. La investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo interpretativo y un estudio de caso instrumental.

Introducción

En el contexto de la educación matemática, el aprendizaje de las nociones geométricas de área y perímetro suele centrarse en la aplicación mecánica de fórmulas y procedimientos, lo cual limita el desarrollo del pensamiento espacial y la comprensión de las propiedades de los objetos geométricos (González, 2014). Esta situación se intensifica cuando las propuestas pedagógicas no se relacionan con los contextos culturales de los estudiantes, lo cual genera dificultades para construir significados matemáticos relevantes. En comunidades indígenas como el pueblo nasa, se evidencia la necesidad de fortalecer procesos educativos que articulen los saberes propios con el conocimiento escolar, especialmente en el área de matemáticas.

El Sistema Educativo Indígena Propio (SEIP) plantea la importancia de promover prácticas pedagógicas que reconozcan la identidad cultural, el territorio y los conocimientos ancestrales como elementos fundamentales de aprendizaje. En este sentido, la educación STEAM, propuesta que articula las áreas de ciencia, tecnología, ingeniería, arte y matemáticas en un mismo proceso formativo, favorece la integración de múltiples sabres y la contextualización del aprendizaje. Así que se configura como una alternativa que favorece la integración

Mestizo, A., Dagua, Y. y Ortiz, D. (2026). Micromundo STEAM para el aprendizaje del área y perímetro con estudiantes indígenas. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 115-121. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

interdisciplinaria y el uso de tecnologías digitales para potenciar la creatividad y la resolución de problemas (Cilleruelo y Zubiaga, 2014; Diego-Mantecon *et al.*, 2021). Sin embargo, aún son limitadas las propuestas que articulan la educación matemática, el enfoque STEAM y los principios del SEIP en contextos educativos indígenas.

A partir de lo anterior, surge la necesidad de diseñar entornos de aprendizaje que favorezcan la comprensión de conceptos geométricos desde experiencias culturalmente significativas y contextualizadas de los educandos. Para llevar a cabo tal diseño, el enfoque socioconstructivista de Bruner es adecuado puesto que permite comprender el aprendizaje como un proceso activo de construcción de significado mediado por la interacción social y el contexto cultural. Desde esta perspectiva, los micromundos digitales constituyen entornos que facilitan la exploración de ideas matemáticas mediante el uso de herramientas tecnológicas.

En este marco, el trabajo cuyo avance se presenta en este documento tiene como propósito caracterizar el diseño de un micromundo fundamentado en la educación STEAM y en las consideraciones del SEIP, integrando el *software Sweet Home* 3D como artefacto mediador para el aprendizaje del área y el perímetro en estudiantes indígenas nasa del grado séptimo.

Pregunta problema

La pregunta que orienta el estudio es: ¿Qué caracteriza el diseño de un micromundo fundamentado en la educación STEAM y en las consideraciones educativas del SEIP, que integre el *software Sweet Home* 3D, para comprender el aprendizaje del área y perímetro en estudiantes de grado séptimo?

Marco teórico

El estudio se fundamenta en la articulación de la educación STEAM y las orientaciones del Sistema Educativo Indígena Propio (SEIP), reconociendo la importancia de integrar los saberes culturales del pueblo nasa con el conocimiento matemático escolar. Desde el enfoque socioconstructivista de Bruner, el aprendizaje se comprende como un proceso de construcción de significados mediado por la interacción social y el contexto cultural. En este sentido, el micromundo digital diseñado en *Sweet Home* 3D permite explorar las nociones de área y perímetro a partir de la modelación de la nasa yat[1], configurando un entorno de aprendizaje donde convergen cultura, las áreas de la educación STEAM y la geometría.

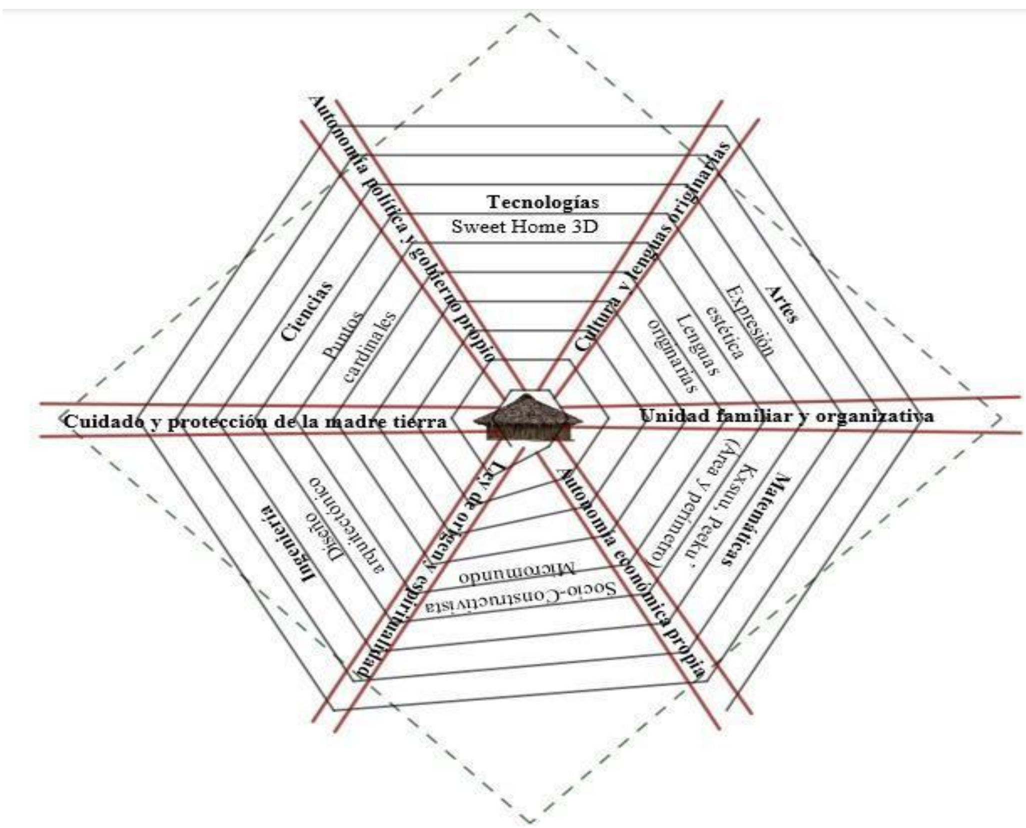


Figura 1: tejido pedagógico que integra STEAM y educación propia en el aprendizaje del área y el perímetro

El esquema presentado en la figura 1 refleja de manera visual este entramado pedagógico (micromundo). En él, las distintas áreas del conocimiento (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas) convergen hacia un punto central: el hogar o espacio comunitario. Este núcleo simboliza el lugar donde los aprendizajes adquieren sentido concreto y se vinculan con la vida diaria, con las relaciones familiares y con el territorio entendido como un tejido de vida. Los seis ejes que emergen del centro del esquema corresponden a los hilos de sabiduría

[1] La casa nasa o nasa yat, en lengua nasa yuwe del pueblo indígena nasa, hace referencia al hogar. Más allá de significar algo físico, simboliza un espacio donde se construyen colectivamente saberes que se relacionan con la vida cotidiana, familiar y territorial (Comparativos, 2013).

y conocimiento que se disponen de manera equilibrada para fortalecer la educación propia desde el SEIP. Así, cada disciplina de la educación STEAM aporta una fibra esencial que enriquece estos hilos y contribuye al proceso formativo integral. Más en detalle, el área de la ciencia, aborda la orientación de la nasa yat mediante los puntos cardinales, en relación con el hilo cuidado y protección de la madre tierra; la tecnología se desarrolla a través del uso de *Sweet Home* 3D para la representación digital de la vivienda, favoreciendo procesos de autonomía y representación del territorio; la ingeniería se relaciona con el diseño arquitectónico tradicional vinculado con ley de origen y espiritualidad; el arte con los significados simbólicos y culturales de sus espacios, fortaleciendo los hilos de cultura y unidad comunitaria; y finalmente, las matemáticas se relaciona con el aprendizaje de las nociones de área y perímetro aplicadas en la distribución y construcción de la nasa yat, articulándose con el fortalecimiento del hilo de autonomía económica propia.

METODOLOGÍA

Enfoque metodológico y tipo de estudio

La investigación se desarrolla desde un enfoque cualitativo interpretativo, orientado a comprender cómo los estudiantes construyen significados matemáticos en contextos culturalmente situados. El estudio se configura como un estudio de caso instrumental, ya que busca analizar cómo el diseño de un micromundo fundamentado en la educación STEAM y en las orientaciones del SEIP favorece la comprensión de los conceptos de área y perímetro y el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes indígenas de grado séptimo.

Contexto y participantes

La propuesta se implementará en la Institución Educativa Marino Mestizo, ubicada en Jambaló Cauca, en un contexto rural con identidad cultural nasa. El grupo participante corresponde a 25 estudiantes de grado séptimo, con quienes se busca articular los conocimientos matemáticos con los saberes culturales propios del pueblo Nasa.

Fases del estudio

El desarrollo metodológico se organiza en tres fases que orientan el diseño del micromundo, su implementación y el análisis del proceso de aprendizaje. En la figura 2, se presenta la síntesis de las fases del estudio del caso.

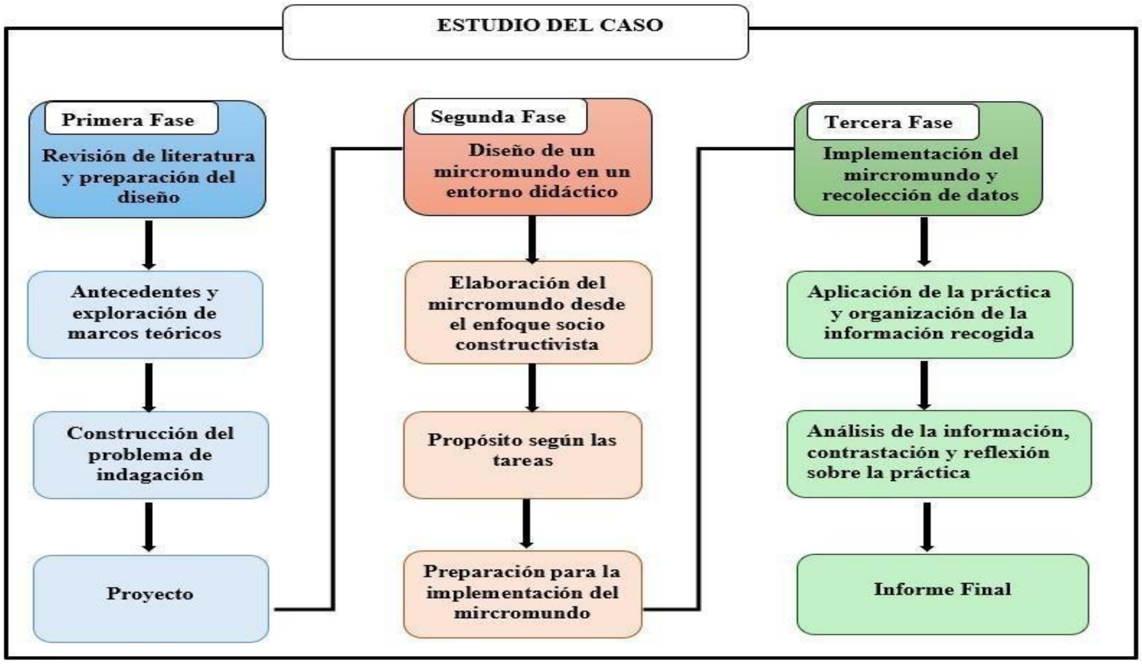


Figura 2: esquema por fases de la construcción del estudio de caso

La primera fase corresponde a la revisión de literatura y fundamentación teórica, mediante el análisis de antecedentes relacionados con la educación STEAM, el aprendizaje del área y perímetro, y las orientaciones del SEIP. La segunda fase se orienta al diseño del micromundo en el *software Sweet Home* 3D, tomando como eje la representación de la nasa yat e integrando las áreas de STEAM con los hilos de sabiduría y conocimiento del SEIP. Finalmente, la tercera fase corresponde a la implementación del micromundo y a la recolección de datos a través de producciones escritas y registros audiovisuales con el propósito de analizar los aportes de la propuesta al aprendizaje de las nociones geométricas del área y perímetro y al fortalecimiento de la identidad cultural de los educandos.

Recolección de información

Para documentar la experiencia se utilizarán diferentes fuentes de información que permiten analizar el proceso de aprendizaje, tales como: la observación en clase, las producciones de las estudiantes, las evidencias fotográficas y audiovisuales.

El análisis se realizará mediante la organización e interpretación de la información con el fin de reconocer cómo el micromundo favorece la comprensión del área y el perímetro en un contexto culturalmente pertinente.

AVANCES DEL ESTUDIO

Hasta el momento se ha avanzado en el diseño del micromundo fundamentado en la articulación entre el enfoque STEAM y los principios del SEIP. Se elaboró el modelo digital de la nasa yat en el *software Sweet Home* 3D. Tal modelo permite representar el espacio desde una perspectiva culturalmente significativa para el aprendizaje de las nociones de área y perímetro, puesto que retoma elementos propios de la arquitectura y cosmovisión del pueblo nasa (*e. g.*, forma de la vivienda, su orientación y el significado asociado a cada una de sus partes).

Asimismo, se diseñaron las actividades de aprendizaje organizadas en cuatro tareas, estructuradas en seis momentos de aprendizaje, cada una con objetivos orientados al fortalecimiento de la comprensión de conceptos geométricos.

Los objetivos de las tareas se orientan a la integración de la educación STEAM manteniendo como eje central el aprendizaje matemático de área y perímetro mientras que las demás áreas actúan como soporte para potenciar la construcción del conocimiento. Cada componente de STEAM se articula con los hilos formativos del SEIP, permitiendo relacionar la geometría con el territorio, la cultura y la arquitectura de la nasa yat mediante el uso de *Sweet Home* 3D. Esta relación configura una articulación intercultural e interdisciplinar que favorece la construcción de significados matemáticos desde un contexto culturalmente pertinente.

De igual manera se construye el esquema de articulación teórica que orienta la integración entre cultura, tecnología y geometría, evidenciando el potencial del micromundo como entorno de aprendizaje contextualizado para la educación matemática.

PROYECCIONES

Como proyecciones del estudio, se espera implementar el micromundo con los estudiantes del grado séptimo y analizar las producciones generadas durante el proceso de aprendizaje. Se busca identificar cómo la interrelación entre cultura, y diferentes áreas del conocimiento favorece el desarrollo del pensamiento espacial y la construcción de significados matemáticos. Además, se espera que los resultados aporten orientaciones pedagógicas para el diseño de propuestas en educación matemática interculturales que articulen la educación interdisciplinar con las orientaciones SEIP.

Referencias

Cilleruelo, L. y Zubiaga, A. (2014). Una aproximación a la educación STEAM. Prácticas educativas en la encrucijada arte, ciencia y tecnología. *Jornadas de Psicodidáctica*, *18*(1), 1-18.

Comparativos, G. D. E. S. (2013). *Memorias, conocimientos y cambios en el diseño y construcción de la nasa yat, Cauca Colombia*. Universidad del Cauca.

Diego-Mantecón, J., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. F. y Ortiz-Laso, Z. (2021). An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM*, *53*(5), 1137-1148. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9

González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café*. Tesis de maestría, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. http://hdl.handle.net/10495/6518

TALLER DE TRANSFORMACIONES EN EL PLANO A PARTIR DEL MODELO 5E DESDE EL PROGRAMA CÍRCULOS MATEMÁTICOS UIS

Óscar Moreno, Yuri Pico y Jenny Acevedo-Rincón
Universidad Industrial de Santander
oscar2211065@correo.uis.edu.co, yuri2221976@correo.uis.edu.co, jepaceri@uis.edu.co

El proyecto del que se reporta en este documento busca potenciar el pensamiento espacial y geométrico, mediante la planeación, implementación y reflexión de un taller diseñado a partir del modelo de enseñanza 5E, que beneficia el aprendizaje de un grupo estudiantes de los grados sexto a octavo del Instituto Técnico Agropecuario El Guacamayo (ITAG), ubicado en el municipio El Guacamayo, Santander.

INTRODUCCIÓN

En lugares apartados de las zonas urbanas es común que las instituciones educativas carezcan de programas educativos o espacios para el desarrollo de temáticas fuera del aula. Para abordar esta situación, el proyecto sobre el que aquí se reporta busca llevar el programa Círculos Matemáticos de la UIS a la comunidad educativa de El Guacamayo, realizando adaptaciones según el grado de escolaridad. En este artículo se describe el contenido académico del programa y la realización de un taller bajo la modalidad de la propuesta pedagógica 5E, siguiendo la metodología de un experimento de enseñanza.

LOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS UIS

El programa Círculos Matemáticos de la Universidad Industrial de Santander ofrece una amplia variedad de contenidos académicos dirigidos a estudiantes de los grados noveno a undécimo. Se basa en la implementación de talleres con temáticas poco usuales en el currículo escolar; entre los temas abordados se destacan situaciones problema basadas en áreas como la geometría, la proporcionalidad y la geometría fractal (por ejemplo, el triángulo de Sierpinski).

La esencia del programa Círculos Matemáticos es ofrecer un espacio donde se fomente el desarrollo del pensamiento matemático y se promueva interés y motivación por el estudio de las matemáticas. Sin embargo, las propuestas que se

Moreno, Ó., Pico, Y. y Acevedo-Rincón, J. (2026). Taller de transformaciones en el plano a partir del modelo 5E desde el programa Círculos Matemáticos UIS. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 123-127. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

hacen mediante el programa se centran, principalmente, en los contenidos del programa, dejando de lado el componente de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además, están dirigidos a la educación media vocacional; no obstante, pueden adaptarse a niveles inferiores, como en este caso, a los grados sexto a octavo.

EL MODELO PEDAGÓGICO 5E

El modelo 5E es una propuesta pedagógica, presentada en la década de 1980 por el *Biological Sciences Curriculum Study* (BSCS), en la que el estudiante toma un rol activo mientras el docente orienta el proceso de aprendizaje. Nace a partir de teorías de aprendizaje de tipo constructivista, según las cuales el aprendizaje pasa por tres etapas: exploración, invención y descubrimiento. Tales etapas son la base para las cinco fases planteadas en el modelo 5E (Ruiz-Martín y Bybee, 2022).

Se utiliza para diseñar clases en áreas de la ciencia; en este caso, matemáticas. Consta de cinco fases, *involucramiento, exploración, explicación, elaboración y evaluación*, a través de las cuales se lleva a cabo un proceso de transición que va desde actividades que despiertan motivación y ponen en marcha saberes previos hasta actividades evaluativas. Este modelo puede aplicarse en distintos niveles educativos y ayuda a organizar y estructurar sesiones, ya sean diarias o de un periodo determinado (Durán y Durán, 2004).

METODOLOGÍA

El proyecto del que se reporta en este documento se desarrolla en el marco de un experimento de enseñanza, en el cual los estudiantes, docentes e investigadores participan en situaciones de enseñanza y aprendizaje diseñadas con una intención definida. Dichas situaciones brindan la oportunidad de analizar las relaciones que se establecen antes, durante y después del desarrollo de esta sesión. El principal objetivo del proyecto es analizar las diferencias entre las interacciones tradicionales de tipo unidireccional (docente-estudiante) y las dinámicas más participativas.

DETALLES DEL TALLER *CULTURIZANDO LAS FIGURAS*

A continuación, se presentan detalles del taller denominado *Culturizando las figuras,* cuyo tema principal son las transformaciones en el plano. Con este taller, se busca que los estudiantes fortalezcan el pensamiento espacial y geométrico por medio de actividades interactivas y poco abstractas.

Cada actividad del taller fue pensada y planteada respecto a cada una de las fases del modelo 5E; así, se estructuró una sesión de clase para tres horas en los grados sexto a octavo de educación básica secundaria.

Involucramiento. La actividad en la primera fase del modelo 5E busca incentivar la motivación y despertar el interés por aprender sobre el tema que se va a tratar. En esta actividad del taller, los estudiantes arman un rompecabezas (véase imagen 1) e identifican cómo se simplifica geométricamente la figura del guacamayo mediante diversas transformaciones.

Imagen 1: rompecabezas de guacamayo, compuesto por polígonos de la secuencia *Culturizando las figuras*

Exploración. En esta fase del modelo se promueve la indagación y el desarrollo de habilidades de pensamiento científico. En el taller, los estudiantes primero doblan una hoja según las indicaciones dadas, luego eligen dos figuras y dibujan únicamente la mitad de cada una, para luego unirlas (véase imagen 2). Finalmente, cortan cuidadosamente el contorno de la figura resultante. Esta actividad resulta útil para la identificación de reflexiones en algunas figuras.

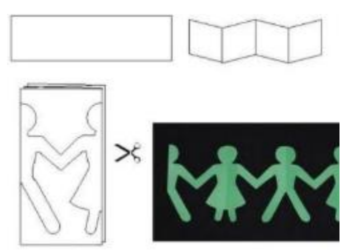


Imagen 2: ejemplo de la cadena de figuras de la secuencia *Culturizando las figuras* (Castillo, 2024)

Explicación. En esta fase del modelo se da un proceso de formalización del aprendizaje. En este sentido, se busca estructurar y articular las actividades anteriores con el fin de dar paso a la asociación entre lo explicado y lo trabajado en fases anteriores. En el taller, los docentes son los encargados de llevar a cabo la formalización del aprendizaje con la definición y explicación de las transformaciones en el plano: traslación, rotación, reflexión y homotecia, mostrando mediante ejemplos los efectos que producen dichas transformaciones sobre figuras bidimensionales como triángulos o rectángulos. Así que en esta actividad del taller los docentes tienen la mayor participación.

Elaboración. En esta fase del modelo se profundiza la comprensión de los conceptos mediante actividades de ejercitación. En el taller, cada estudiante debe realizar la homotecia de la figura que le correspondió (véase imagen 3), para lo cual debe elegir un punto fijo desde el cual trazar segmentos de recta hacia cada vértice de la figura dada, con lo que se logra la amplificación o reducción del tamaño de la figura, al tomar respectivamente un factor (mayor que 1 o entre 0 y 1) por el cual multiplicar las distancias desde los vértices hasta el punto fijo.

Imagen 3: figuras iniciales cuyo tamaño se modifica, sin cambiar sus proporciones

Evaluación. En esta fase del modelo, el docente identifica los aprendizajes alcanzados y los posibles vacíos conceptuales. En el taller, para esta actividad, a cada estudiante se le da una hoja con dos figuras dobles compuestas por una figura inicial y una, final (véase imagen 4). Deben completar la figura final aplicando transformaciones a la figura inicial. Según las partes faltantes de la figura final, marcadas en color rojo, los estudiantes deben idear una estrategia para identificar qué elementos de la figura inicial, al ser transformados, pueden completar la figura final.

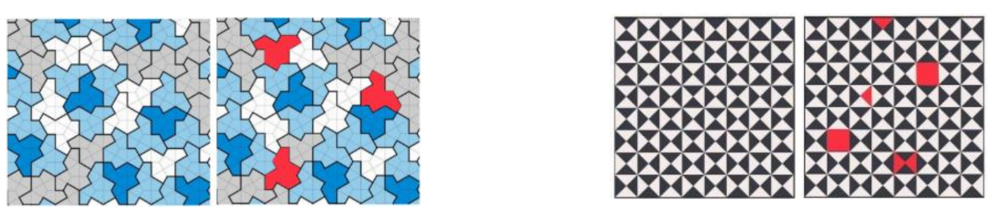


Imagen 4: dos figuras dobles, en cada una de las cuales se debe aplicar una transformación sobre la figura inicial para obtener la final (Smith *et al.*, 2023)

REFLEXIONES

La enseñanza de temáticas que no se tratan tradicionalmente en el currículo escolar constituye una oportunidad para promover la motivación hacia las matemáticas. Este tipo de contenidos contribuye a cuestionar estigmas asociados a esta disciplina, favorece el aprendizaje independientemente de las habilidades o talentos matemáticos y permite establecer conexiones con contextos reales. Asimismo, facilita la transición entre diferentes representaciones de un objeto.

REFERENCIAS

Castillo, K. (2024). Kirigami. *Pinterest*. https://pin.it/2BFOUlNxJ

Durán, L. B. y Durán, E. (2004). The 5E Instructional Model: A learning cycle approach for inquiry-based science teaching. *Science Education Review*, *3*(2), 49-58.

Ruiz-Martín, H. y Bybee, R. W. (2022). The cognitive principles of learning underlying the 5E model of instruction. *International Journal of STEM Education*, *9*(1).

Smith, D., Myers, J. S., Kaplan, C. S. y Goodman-Strauss, C. (2023). An aperiodic monotile. *arXiv preprint arXiv:2303.10798*.

DEMANDA COGNITIVA EN TAREAS DE RAZONAMIENTO EN GEOMETRÍA: ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS *EVALUAR PARA AVANZAR*

Anyi Núñez, Yeimi Alfonso y Jenny Acevedo-Rincón
Universidad Industrial de Santander
anyi2220644@correo.uis.edu.co, yeimi2220638@correo.uis.edu.co, jepaceri@uis.edu.co

El estudio sobre el que se reporta en este artículo categoriza las tareas matemáticas de razonamiento en los cuadernillos de *Evaluar para Avanzar* de 4.° y 5.° de primaria del periodo 2020-2023, según el esfuerzo cognitivo que exigen. Se fundamenta en la teoría de demanda cognitiva, articulada con el razonamiento demostrativo y plausible. Para comprender las exigencias de esta evaluación estandarizada, a lo largo de la investigación se seleccionaron 18 tareas pertenecientes a diferentes pensamientos matemáticos. En este documento, en particular, se expone y analiza en detalle solo una tarea de las seleccionadas.

INTRODUCCIÓN

La evaluación estandarizada en el ámbito educativo desempeña un papel crucial para la orientación y transformación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha implementado diferentes estrategias para la evaluación diagnóstica y formativa. Es el caso de las pruebas *Evaluar para Avanzar*: una política nacional fundamentada en el enfoque de evaluación formativa, cuyo propósito es ofrecer diagnósticos continuos para orientar las decisiones pedagógicas en el aula (Gómez *et al.*, 2023); mediante cuadernillos, evalúan distintas áreas (*e. g.*, matemáticas, lenguaje, ciencias naturales) en los grados de tercero a undécimo.

En los resultados de pruebas internacionales de matemáticas (*e. g.*, PISA, TIMSS y ERCE) se han encontrado problemas, para cuya solución, el desempeño de los estudiantes de América Latina y Colombia se ha ubicado en niveles inferiores. Específicamente, se han visto dificultades en la competencia de resolución de problemas, en la construcción de patrones y la argumentación.

En relación con lo anterior, este estudio busca categorizar la Demanda Cognitiva (DC) en las Tareas Matemáticas Escolares (TME) con las que la prueba *Evaluar para Avanzar* –aplicada en 4. ° y 5. ° de educación básica primaria en

Núñez, A., Alfonso, Y. y Acevedo-Rincón, J. (2026). Demanda cognitiva en tareas de razonamiento en geometría: análisis de las pruebas *Evaluar para Avanzar*. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 129-136. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

el periodo 2020-2023– evalúa la competencia de razonamiento. Para ello se analizan las exigencias cognitivas que promueve el diseño de las TME en los estudiantes, procurando responder la pregunta ¿Qué demanda cognitiva exigen las pruebas *Evaluar para Avanzar* de 4.° y 5.° de educación básica primaria frente al razonamiento matemático?

MARCO TEÓRICO

En el estudio, se articulan dos marcos de referencia; uno centrado en razonamiento matemático y el otro, en demanda cognitiva. La integración de estas teorías permite clasificar el nivel de esfuerzo cognitivo que requiere la TME para ser resuelta, es decir, medir la exigencia prevista en el diseño de la tarea.

Razonamiento

En primera instancia, el razonamiento matemático~~,~~ se concibe como una actividad dinámica y crucial en la resolución de TME y el desarrollo del pensamiento matemático. Se puede clasificar como:

- Demostrativo, que se caracteriza por su rigurosidad, al basarse en modelos lógicos establecidos (Pólya, 1966).
- Plausible, caracterizado por la formulación de hipótesis, para descubrir nuevas formas de hacer matemáticas, centrarse en la búsqueda de patrones, la generalización y sobre todo en la inducción (Pólya, 1966).

Demanda cognitiva

De acuerdo con el modelo propuesto por Smith y Stein (1998), la DC es el tipo de esfuerzo mental que implica la resolución de la TME. Se distinguen cuatro categorías que se ubican en dos niveles. En el nivel bajo se encuentran las tareas de *memorización* (MEM) y las de *procedimientos sin conexión* (PsC). En el nivel alto se encuentran las tareas de *procedimientos con conexiones* (PcC) y *hacer matemáticas* (HM).

METODOLOGÍA

El estudio sobre el que se reporta aquí se desarrolla bajo el enfoque cualitativo, caracterizado por entender, describir y explicar una aproximación al mundo desde lo interior (Flick, 2007). Es decir, el enfoque busca la comprensión de las acciones y significados de los actores en su entorno natural. Según Hernández-Sampieri *et al.* (2014), este enfoque promueve una comprensión holística de los procesos de enseñanza-aprendizaje. En consonancia, este estudio se orienta a describir la complejidad, estructura e intencionalidad pedagógica presentes en las TME, enfocándose en la particularidad del caso sin pretender generalizar resultados.

El diseño metodológico se enmarca en la línea de análisis documental, definido como un procedimiento sistemático para la evaluación de documentos (Bowen, 2009). Este diseño requiere recolectar, organizar, analizar e interpretar de manera sistemática la información contenida en los documentos por analizar. En este caso específico, para realizar el análisis se toma el cuadernillo 1 de cada año escolar del área de matemáticas para los grados 4.° y 5.°, durante el periodo 2020-2023 de las pruebas *Evaluar para Avanzar*. Así, el corpus de estudio está constituido por un total de 6 cuadernillos. Cabe precisar que, aunque el periodo de la estrategia abarca hasta el año 2023, para el análisis no se tomó en cuenta, debido a que en ese año el ICFES tomó las mejores TME de los años anteriores.

El proceso metodológico contempla cuatro fases interrelacionadas: *búsqueda y selección, clasificación y organización, análisis, e interpretación y presentación*. Esta estructura permite un abordaje sistemático y progresivo del objeto de estudio, ya que dichas etapas se articulan de manera secuencial y flexible. Finalmente, para cumplir con las exigencias de cada una de las fases, se definen técnicas específicas como la revisión documental, el análisis de contenido y la divulgación científica, las cuales se llevan a cabo por medio de la implementación de instrumentos: los cuadernillos de las pruebas *Evaluar para Avanzar* seleccionados, matrices de organización y matriz de clasificación.

Resultados

Para delimitar la muestra del estudio frente al extenso volumen de instrumentos disponibles, se establecieron criterios de selección específicos. Aunque inicialmente se consideraron todas las TME de la competencia de razonamiento de grado 3.º a 11.°, la intención de lograr un análisis detallado condujo a priorizar los cuadernillos de 4.º y 5.°. Posteriormente, con el propósito de consolidar una muestra manejable y representativa, se decidió tomar las tres primeras TME de esa competencia en cada cuadernillo. Mediante este proceso de focalización, se obtuvieron 18 TME, objeto de análisis. A modo de ilustración, en este apartado se profundiza en el análisis de una TME correspondiente al grado 5.º enmarcada en el pensamiento espacial. Cabe mencionar que, en los cuadernillos, los pensamientos espacial y métrico se toman en conjunto como componente espacial-métrico. Por tanto, se selecciona la TME que integre de manera más clara el componente para el estudio en cuestión. La TME seleccionada (véase figura 1) se enmarca en el componente espacial-geométrico para evaluar la competencia de razonamiento. Se ubica en el cuadernillo 1 de quinto grado, del año 2020, siendo la tercera tarea del cuadernillo. Abarca una situación escolar donde la profesora presenta figuras dibujadas en el tablero. En el cuadernillo hay una representación gráfica en un plano cuadriculado que ilustra dos figuras rectangulares de distintas dimensiones. Y fue seleccionada por encontrarse en un nivel bajo de DC.

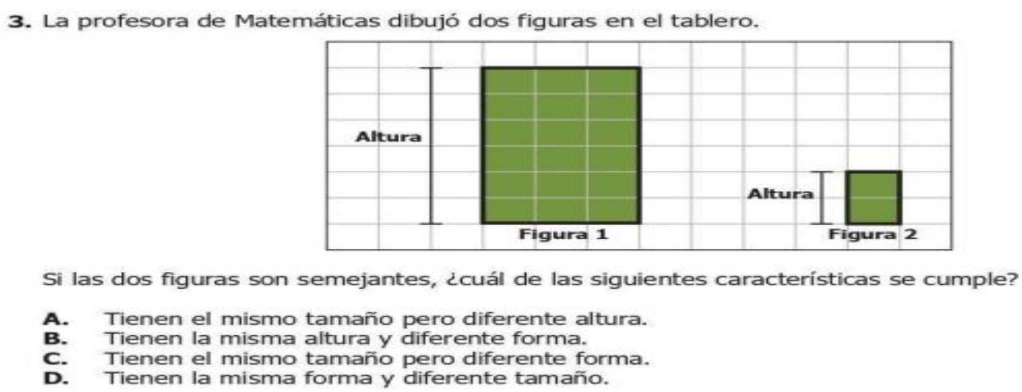


Figura 1: TME tomada del cuadernillo 1 de 2020 de la prueba *Evaluar para Avanzar*

El enunciado expuesto en la figura 1, parte de una afirmación dada y hace una pregunta donde solicita identificar la opción correcta de las cuatro que se presentan; la opción correcta es una característica que debe cumplirse cuando se da una relación de semejanza. A través de esta situación, se busca que el estudiante comprenda las condiciones que deben cumplir dos figuras cuando son semejantes o las condiciones que se dan para identificar que se dé dicha semejanza para que de esta forma elija una de estas condiciones. Así se pretende evaluar el Estándar Básico de Competencia de “identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras” (MEN, p. 82).

El estudiante parte de una premisa que el enunciado le da como un hecho: las dos figuras son semejantes. Al asegurarle que la semejanza ya existe, el estudiante no necesita comprobar nada. Aunque la imagen tiene una cuadrícula que permitiría hacer cálculos y ver que las dimensiones del rectángulo grande y el pequeño guardan una proporción (6 es a 2, y 3 es a 1), la pregunta es tan cerrada que anula todo ese proceso matemático. El estudiante no opera con los números ni justifica propiedades; el esfuerzo mental se reduce simplemente a recordar de memoria la definición de semejanza (que implica tener la misma forma, pero diferente tamaño), lo que lo lleva directo a elegir la opción D. La justificación de la tarea indica que se espera que el estudiante valide esta semejanza comprobando las dimensiones en la cuadrícula, pues se establece que satisfacen la relación de proporción: 6 es a 3 como 2 es a 1.

Dicho esto, en el momento en que se aborda esta proporcionalidad, la TME moviliza nociones del pensamiento variacional en estrecha relación con el pensamiento espacial y métrico. Según MEN (2006), este pensamiento implica analizar de qué forma "cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor" en una sucesión de figuras. En este caso, el diseño de la TME permite que la exploración visual de la gráfica sea suficiente para identificar el patrón numérico y espacial (la razón de semejanza) entre ambos rectángulos, sin necesidad de realizar operaciones matemáticas. Con esta información, el estudiante concluiría que la característica fundamental que se cumple es tener la misma forma y diferente tamaño, la cual corresponde a la opción D.

En contraste con la opción correcta, las otras opciones buscan identificar confusiones conceptuales específicas en los estudiantes. La opción A, puede ser seleccionada si se relaciona de forma equivocada la forma con el tamaño, basándose únicamente en la evidencia visual de que las alturas son distintas. La opción B, puede ser seleccionada al considerar que tener un tamaño distinto ya implica una forma distinta; estos alumnos se dejan llevar por la etiqueta de "altura" presente en ambas gráficas para justificar una supuesta igualdad de proporciones que no existe. Finalmente, la opción C puede llegar a ser elegida por quienes consideran que tener diferente forma tiene que ver con el hecho de que un rectángulo es más grande que el otro, asumiendo de manera errónea que la diferencia de áreas cambia la naturaleza de la figura geométrica.

Es decir, para llegar a la resolución de la TME se moviliza un razonamiento de tipo demostrativo. Este tipo de razonamiento se caracteriza por promover un conocimiento matemático que es seguro y definitivo, basado en leyes y fórmulas matemáticas ya establecidas (Pólya, 1966). En este caso el estudiante debe aplicar una verdad establecida para validar la respuesta, sin necesidad de explorar algo más; o sea, solo conceptualizar que dos figuras son semejantes cuando tienen ángulos iguales uno a uno y sus lados es proporcionales (Euclides citado por Cárdenas, 2013).

Por lo tanto, el análisis realizado lleva a caracterizar la tarea en cuestión como una de demanda cognitiva de bajo nivel, específicamente en la categoría de memorización (véase tabla 1). De acuerdo con el modelo de Smith y Stein (1998), este tipo de tareas se resuelven de forma rutinaria y mecánica, ya que no exigen que el estudiante entienda el significado de los conceptos o establezca conexiones entre ellos; el esfuerzo se limita a reproducir de manera directa una regla o definición previamente aprendida.

<table>
<tr><td>Tipo~~s~~</td><td colspan="2">Nivel</td><td>Características</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1. Demostrativo</td><td rowspan="4">Bajo</td><td rowspan="4">Memorización</td><td>MEM1. La TME requiere exclusivamente aplicar reglas, fórmulas o definiciones memorizadas previamente. (Indicador 1)</td></tr>
<tr><td>MEM2. La TME se resuelve inmediatamente a través de un camino claro (y único), sin necesidad de la ejecución de un procedimiento. (Indicador 2)</td></tr>
<tr><td>MEM3. La TME es inequívoca y cerrada en su formulación, indica explícitamente lo que se debe hacer. (Indicador 3)</td></tr>
<tr><td>MEM4. La resolución de la TME omite por completo ~~de~~ establecer relaciones entre los conceptos o procedimientos matemáticos. (Indicador 4)</td></tr>
</table>

Tabla 1: indicadores de nivel de memorización en DC frente a tareas de razonamiento

La tarea cumple con los indicadores descritos para dicho nivel (tabla 1). Respecto al indicador MEM1, porque la TME requiere exclusivamente aplicar reglas, fórmulas o definiciones memorizadas previamente; en este supuesto, la resolución de la tarea se alcanza al recordar la definición teórica de semejanza.

En cuanto al indicador MEM2, la TME se resuelve inmediatamente a través de un camino claro (y único), sin necesidad de la ejecución de un procedimiento. El estudiante solo debe leer la condición dada y seleccionar la definición correspondiente; la tarea no le exige operar matemáticamente la proporción numérica para llegar a la respuesta. Asimismo, se evidencia el indicador MEM3, donde la TME es inequívoca y cerrada en su formulación, indica explícitamente lo que se debe hacer; el enunciado de la tarea no deja espacio libre a su interpretación. La instrucción "Si las dos figuras son semejantes, ¿cuál de las siguientes características se cumple?" indica de manera directa cuál es el objetivo cognitivo: debe identificar la afirmación correcta basándose en una premisa que ya se le da como un hecho irrefutable, en este caso la semejanza.

Además, la TME cumple con el indicador MEM4 debido a que su resolución, omite por completo el establecimiento de relaciones entre conceptos o procedimientos matemáticos. La tarea se limita a la simple identificación teórica de una característica descriptiva, la TME aísla el concepto de semejanza de otros elementos geométricos o el cálculo de proporciones.

En consecuencia, a través de los indicadores propuestos se evidencia que, en este nivel, el estudiante no requiere ejecutar procedimientos complejos ni la construcción de significado, sino que se limita a aplicar reglas memorizadas en situaciones cerradas e inequívocas. Esta acción se alinea con las características del razonamiento demostrativo y se aleja por completo del razonamiento plausible, el cual se caracteriza principalmente por ser heurístico, provisional y fundamentarse en la formulación de conjeturas y en la exploración frente a la incertidumbre (Pólya, 1966). Por lo tanto, se clasifica como una tarea de razonamiento demostrativo con características de demanda cognitiva de bajo nivel, que cumple con los indicadores de tareas de memorización.

Es importante mencionar que la coexistencia del razonamiento demostrativo y la baja DC se logra explicar al analizar la naturaleza del conocimiento matemático que exige la TME. Ya que demanda un razonamiento demostrativo porque se fundamenta en una verdad matemática absoluta y establecida, que no da espacio para la formulación de hipótesis o la exploración. Sin embargo, se dice que la DC recae en la memorización, porque para alcanzar esa certeza, el estudiante no necesita comprobar propiedades, justificar lógicamente ni establecer relaciones proporcionales utilizando la cuadrícula de la imagen. De este modo, aunque el concepto geométrico es riguroso y definitivo, el esfuerzo mental se reduce a la reproducción mecánica de un dato.

CONCLUSIONES

El diseño de las TME nos señala cómo se limitan las acciones que realiza el estudiante para llegar a la respuesta correcta, puesto que las tareas no exigen la formulación de hipótesis que lleven al estudiante a una justificación procedimental ni a una articulación de concepto. La tarea analizada plantea una instrucción que no alcanza niveles superiores de DC, es decir, se estanca en solo requerir una definición. Si bien, la situación se presenta sobre un escenario geométrico válido que promueve que el estudiante realice conteo de unidades, establezca proporcionalidades o construya activamente la relación de semejanza, se desaprovecha el potencial de la TME.

A partir de los avances en el análisis que se ha realizado, se concluye que las pruebas *Evaluar para Avanzar* priorizan la TME de bajo nivel de DC. La naturaleza de las tareas determina lo que los estudiantes aprenden; sin embargo, estas pruebas carecen de actividades orientadas al "hacer matemáticas", pues omiten tareas que exijan un pensamiento complejo y no algorítmico. Por otro lado, el diseño de las TME limita los procesos de pensamiento y razonamiento en los estudiantes. A partir del análisis realizado, se hace evidente que el razonamiento matemático se queda en lo demostrativo, donde el alcance y la utilidad de la evaluación se ven restringidos. En particular, se evidenció que predomina el razonamiento demostrativo sobre el plausible, lo que demuestra una tendencia en el diseño de las pruebas estandarizadas, a priorizar la evaluación rápida de algoritmos y verdades establecidas. Por lo tanto, se resalta la necesidad de construir TME que intencionalmente desafíen al estudiante a explorar frente a la incertidumbre matemática.

REFERENCIAS

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40.

Cárdenas, D. P. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica*. Trabajo de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Flick, U. (2007). *El diseño de la investigación cualitativa.* Ediciones Morata.

Gómez, M. C., Márquez, S. D. y Parra, L. B. (2023). *Evaluar para Avanzar: resultados intermedios de una estrategia de evaluación formativa* (Documentos de trabajo Saber Investigar No. 5). Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). https://www.icfes.gov.co/web/guest/saber-investigar

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C. y Baptista-Lucio, M. P. (2014). *Metodología de la investigación* [6.ª ed.]. McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: MEN.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344-350.

INTEGRACIÓN INTERDISCIPLINARIA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN STEAM: REVISIÓN DE LITERATURA

Diana Ortiz-Collazos y Marisol Santacruz-Rodríguez
Universidad del Valle
diana.ximena.ortiz@correounivalle.edu.co, marisol.santacruz@correounivalle.edu.co

Se analizan publicaciones especializadas en Educación Matemática que estudian la integración interdisciplinaria de la geometría a la educación STEAM. El objetivo es comprender el estado actual de los aspectos teóricos y metodológicos de las investigaciones en el campo educativo. Para ello, se empleó una metodología cualitativa e interpretativa basada en el análisis de contenido que logró reconocer la incidencia de la geometría como eje central desde el cual es posible desarrollar un proceso interdisciplinar relacionado con STEAM.

INTRODUCCIÓN

Se presentan avances de una revisión de literatura (Martínez-Corona *et al.*, 2023) en la que se realizó un proceso metódico de búsqueda, selección y análisis de información existente en Educación Matemática sobre la integración interdisciplinaria de la geometría a la educación STEAM. El enfoque educativo de STEAM integra áreas del conocimiento relacionadas con Ciencias, Tecnologías, Ingenierías, Artes y Matemáticas en contextos diversos. De este modo, la integración interdisciplinaria de la geometría a STEAM puede entenderse como un interés reciente de investigación, enfocado en analizar las posibilidades de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en conexión con las áreas STEAM.

Para llevar a cabo esta revisión de literatura, se utilizó una técnica de análisis de contenido, la cual permite analizar y clasificar el contenido de textos, imágenes u otros materiales de comunicación para extraer significados y patrones que permitan identificar tendencias en un campo de investigación (Cáceres, 2003). A continuación, se presentan algunos detalles metodológicos de la revisión de la literatura y se reportan elementos centrales del análisis.

Ortiz-Collazos, D. y Santacruz-Rodríguez, M. (2026). Integración interdisciplinaria de la geometría en la educación STEAM: revisión de literatura. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 137-142. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS PARA LA REVISIÓN DE LITERATURA

Esta revisión de la literatura se llevó a cabo a través de cinco fases. En la primera fase se plantearon preguntas con relación a la educación STEAM, las cuales orientaron la búsqueda de literatura. Algunos ejemplos de preguntas orientadoras usadas son: (i) ¿Cómo se define la interdisciplinariedad y cómo la asume el profesor? (ii) ¿Qué marcos teóricos son los más relevantes para fundamentar la integración interdisciplinaria de los componentes STEAM? (iii) ¿Cómo influye la interdisciplinariedad en la integración de la geometría en propuestas STEAM? y (iv) ¿Qué metodologías se utilizan para fomentar la integración interdisciplinaria de la educación STEAM?

En la segunda fase, se seleccionaron las palabras clave con las que se realizó la búsqueda en la literatura, entre ellas: geometría, STEAM, interdisciplinariedad, teorías STEAM, metodologías STEAM. En la tercera fase, se consideraron documentos publicados entre 2019 y 2025, abarcando así los últimos seis años, con el propósito de llevar a cabo una revisión de la literatura actualizada. En la cuarta fase, se seleccionaron artículos, libros, capítulos de libros, trabajos de maestría y tesis de doctorado, tomados de diversas bases de datos entre las que están *Google Scholar*, *Scopus*, *Eric*, *Springer*, *ProQuest*, *Taylor and Francis*, y *Redalyc*, y así se consolidó la masa documental (véase tabla 1).

Tipo de publicación	Cantidad
Artículo de investigación	29
Ponencia de conferencias	2
Informes de investigación	1
Tesis doctorales y trabajos de grado	4
Capítulos de libro	5
Libros	11
Total	52

Tabla 1: masa documental revisada

Finalmente, en la quinta fase se llevó a cabo un análisis de temas recurrentes en los documentos seleccionados. Para ello se utilizó Atlas ti, un *software* de análisis cualitativo, que proporcionó un enfoque riguroso y sistemático para el análisis. Así se logró una organización y estructuración de la información encontrada, que dio paso a un proceso de codificación aún en desarrollo.

A partir de la masa documental revisada se realizó una codificación abierta, considerando particularmente el título, el resumen, las palabras clave, los marcos teóricos y metodológicos reportados en los documentos. De esta codificación emergieron tres categorías principales que se presentan a continuación.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Como resultado del análisis, surgieron las siguientes categorías: interdisciplinariedad en educación STEAM, marcos teóricos y marcos metodológicos para la integración interdisciplinaria de la geometría en la educación STEAM. En este reporte del avance del estudio se presenta una primera aproximación a las categorías emergentes a partir de la revisión de la literatura.

Interdisciplinariedad en educación STEAM

La revisión de la literatura mostró que la noción de interdisciplinariedad en educación STEAM es diversa. Honey *et al.* (2014) plantean la interdisciplinariedad como la posibilidad de trabajar en situaciones complejas en las que se requieren habilidades y conocimientos en varias disciplinas. Por su parte, Di Blasi Regner *et al.* (2024) añaden que la interdisciplinariedad permite que los estudiantes usen conocimientos matemáticos para resolver problemas de ingeniería o estructurar diseños artísticos. Sin embargo, para el profesor no es nada fácil crear un equilibrio entre las áreas STEAM. A menudo, tal tarea representa un desafío, dado que debe considerar conexiones conceptuales de áreas que no son de su dominio y plantear dichas conexiones en contextos reales (English, 2016). Sin embargo, según la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI, 2025), los profesores deben transitar del pensamiento individual a la planificación colaborativa entre disciplinas STEAM para lograr el éxito de la interdisciplinaridad.

En suma, la interdisciplinariedad en STEAM busca conectar las áreas involucradas, considerando problemas en contextos reales, donde el campo de la geometría puede ofrecer escenarios interesantes. Por su parte, el trabajo colaborativo es un puente para fusionar contenidos sin perder el rigor científico de cada una de las disciplinas que hacen parte del acrónimo STEAM.

Marcos teóricos para la integración interdisciplinaria de la geometría en la educación STEAM

La revisión de literatura permitió reconocer marcos teóricos relevantes al considerar la interdisciplinariedad de STEAM en el campo de la geometría. Entre ellos, están: el construccionismo (Papert, 1980), la teoría de la pirámide de Yakman (2008) y el análisis del efecto pedagógico de STEAM propuesto por Lin y Tsai (2021). El construccionismo propone que el estudiante construya el conocimiento interdisciplinar a través de la manipulación, exploración y modelación de objetos geométricos, dándole un rol activo e investigativo al estudiante (Parhusip *et al.*, 2023). La teoría de la pirámide de Yakman (2008) explica que las conexiones entre disciplinas, como la geometría, interactúan considerando conocimientos abstractos y la experiencia de los estudiantes. Finalmente, la idea de competencia y motivación en el aprendizaje propuesta por Lin y Tsai (2021) tiene el objetivo de implementar planes de estudio interdisciplinares, para ello considera las siguientes estrategias: andamiaje, tutoría, participación, argumentación y modelado, resaltando cómo la geometría puede resultar conveniente en diseños curriculares interesados en conexiones entre matemáticas y artes.

En suma, estos marcos son fundamentos para proporcionar una base teórica que permita estudiar la interdisciplinariedad de la educación STEAM, sobre todo, alrededor de la geometría como disciplina rica en promover conexiones interdisciplinarias.

Metodologías para la integración interdisciplinaria de la geometría en la educación STEAM

La revisión de la literatura reporta que las metodologías más usadas para la integración interdisciplinaria de la educación STEAM al campo de la geometría son: el Aprendizaje Basado en Proyectos (APB) y el aprendizaje basado en indagación (*Inquiry-Based Learning*). Se describe el APB como una metodología de intervención que permite trabajar de manera contextualizada a través de la integración de varias disciplinas. Además, se menciona que el desarrollo de proyectos donde se considera la tecnología aporta al razonamiento del pensamiento espacial en los estudiantes (Suparman y Juandi, 2024).

Por otro lado, la metodología del aprendizaje por indagación fomenta la participación de los estudiantes y la construcción del conocimiento a partir del descubrimiento, lo que propicia mejores resultados en el desarrollo del pensamiento geométrico (Kumazah y Agyei, 2025).

En ese sentido, ambas metodologías reportan estrategias complementarias para la integración interdisciplinaria de STEAM a la geometría, con lo cual favorecen un rol activo del estudiante y propician el desarrollo de su pensamiento geométrico alrededor de preguntas interdisciplinarias.

Conclusiones

A continuación, se mencionan algunas conclusiones que surgen de la revisión de la literatura, las cuales tienen como propósito exponer el estado actual en relación con aspectos teóricos y metodológicos de las investigaciones relacionadas con integración interdisciplinaria de la geometría a la educación STEAM.

La revisión de literatura ilustra que los estudios relacionados con la geometría en educación STEAM tienen mayor tendencia en lo que refiere a la interdisciplinariedad, dado que promueve la creación de conexiones entre las ciencias, las tecnologías, la ingeniería, las artes y las matemáticas. Además, se desarrolla la visualización espacial a través del arte y las tecnologías.

Ahora bien, a partir del análisis de la masa documental se identificaron las teorías y metodologías más usadas en relación con la integración interdisciplinaria de la geometría en la educación STEAM. Estos aspectos, propician que la geometría se convierta en una disciplina estructurante en educación STEAM.

Referencias

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas*, *2*(1), 53-81. https://www.redalyc.org/pdf/1710/171018074008.pdf

Di Blasi Regner, M., Fasce, C. y Santos, S. (coords.) (2024). *Educación STEAM en tiempos de inteligencia artificial generativa* (vol. 2, 1.ª ed.). Buenos Aires: Editorial Dunken. https://www.researchgate.net/publication/385717722

English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education, 3*(1). https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1

Honey, M., Pearson, G. y Schweingruber, A. (2014). *STEM integration in K-12 education: status, prospects, and an agenda for research*. Washington: National Academies Press.

Kumazah, V. y Agyei, D. D. (2025). Enhancing high school geometry learning with inquiry-based teaching: Impact on student understanding, performance, and attitudes. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences, 21*(1), 1-14. https://doi.org/10.4314/ajesms.v21i1.1

Lin, C.-L. y Tsai, C.-Y. (2021). The effect of a pedagogical STEAM model on students' project competence and learning motivation. *Journal of Science Education and Technology, 30*(1), 112-124. https://doi.org/10.1007/s10956-020-09885-1

Martínez-Corona, J. I., Palacios-Almón, G. E. y Oliva-Garza, D. B. (2023). Guía para la revisión y el análisis documental: propuesta desde el enfoque investigativo. *Ra Ximhai*. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8851658

OEI (2025). *Guía de orientación para la implementación de la metodología STEAM en los centros educativos, dirigida a equipos directivos y de gestión.* OEI. https://oei.int/publicaciones/?publication_type[]=53

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books.

Parhusip, H. A., Purnomo, H. D., Nugroho, D. B. y Sri Kawuryan, I. S. (2023). Integración de STEAM en la enseñanza de la geometría moderna mediante la creación de motivos batik con superficies algebraicas. *Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas.* https://www.researchgate.net/publication/370339235

Suparman, S. y Juandi, D. (2024). Fostering spatial visualization in GeoGebra-assisted geometry lesson: A systematic review and meta-analysis. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(9), 2509.

Yakman, G. (2008). STEAM Education: An overview of creating a model of integrative education. *STEAM Education*. https://www.steamedu.com/

Problemas de geometría como herramienta para la identificación del talento matemático en la prueba de selección del Club de Matemáticas UPN

Tania Plazas, William Jiménez y Santiago Cárdenas
Universidad Pedagógica Nacional
tplazas@pedagogica.edu.co, wjimenez@pedagógica.edu.co, jscardenasr@upn.edu.co

El Club de Matemáticas de Universidad Pedagógica Nacional (UPN) es un espacio que ha contribuido al desarrollo del talento matemático en estudiantes de colegios oficiales. Como parte del proceso de selección de estudiantes del Club de Matemáticas UPN el equipo que lidera este espacio realiza el diseño de problemas que no tengan única solución y que permitan identificar características del talento matemático. En este documento presentamos algunos ejemplos de problemas de geometría utilizados para dicha prueba.

Contexto

El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (CM-UPN) es un espacio que atiende estudiantes con talento matemático de colegios oficiales en Colombia. Desde el año 2005, se ha consolidado como un espacio de proyección social del Departamento de Matemáticas, específicamente de la Licenciatura en Matemáticas de esta universidad.

El CM-UPN parte de la premisa de que un estudiante es talentoso en matemáticas cuando su "capacidad matemática se sitúa significativamente por encima de la media" (Díaz *et al.*, 2008, p. 31). Es decir, se asume una postura sociocultural para identificar si un estudiante tiene talento matemático, cuando se hace necesario hacer una comparación del estudiante con sus pares.

Según Jiménez *et al.* (2011), para caracterizar el talento matemático es necesario revisar las capacidades que tiene el estudiante al resolver un problema matemático. Por tanto, a partir de las propuestas que varios autores han hecho, Mora *et al.* (2009) propone una caracterización del talento matemático en tres componentes: pensamiento convergente, pensamiento divergente y actitudes positivas hacia las matemáticas.

Plazas, T., Jiménez, W. y Cárdenas, S. (2026). Problemas de geometría como herramienta para la identificación del talento matemático en la prueba de selección del Club de Matemáticas UPN. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 143-150. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Pensamiento convergente: se destacan características como visualización, abstracción, rapidez, generalización, organización de la información y todo lo relacionado con resolución correcta de problemas.
- Pensamiento divergente: se asocian características como originalidad, flexibilidad, creatividad, fluidez de ideas, es decir, lo que lleve a la solución de problemas desde diferentes enfoques.
- Actitudes positivas hacia las matemáticas: se refiere a características como gusto hacia las matemáticas y dedicación.

Es importante destacar que el entorno del estudiante (la familia, la escuela y los programas de enriquecimiento) desempeñan un papel importante en el proceso de identificación y desarrollo del talento matemático.

El CM-UPN está conformado por un equipo de profesores y estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN. Algunos de los estudiantes son practicantes de último semestre y los profesores, que son los líderes del proyecto, asumen como asesores de los practicantes. También participan estudiantes de otros semestres como voluntarios.

Cada semestre, el CM-UPN funciona a través de cinco fases: convocatoria, selección, apertura, desarrollo y cierre. En la primera, profesores de colegios oficiales de todo el país postulan estudiantes mayores de 12 años que sobresalgan en matemáticas. En la segunda, los estudiantes presentan una prueba de selección por medio de la plataforma *Moodle*. En la tercera, una vez se seleccionan 50 estudiantes para la jornada de la mañana y 50 estudiantes para la jornada tarde, se realiza la sesión de bienvenida. En la cuarta, se realizan las sesiones de clase, por medio de la plataforma *Teams*; estas se centran en un tema de las matemáticas y se enfocan en desarrollar alguna característica del talento matemático. En la última fase se realiza la clausura; se presenta a padres de familia, acudientes y profesores algunos resultados obtenidos durante el semestre.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA EN LA PRUEBA DE SELECCIÓN

Este documento, no solo describe un conjunto de problemas de geometría utilizados en la prueba de selección del Club de Matemáticas, sino que propone comprender dichos problemas como instrumentos para la identificación de características del talento matemático. En este sentido, se asume que la naturaleza no rutinaria de los problemas geométricos, así como la diversidad de estrategias de solución que admiten, permite evidenciar procesos cognitivos asociados al pensamiento convergente y divergente en los estudiantes. De esta manera, la geometría se configura no solo como un contenido disciplinar, sino como un medio para observar y analizar manifestaciones del talento matemático.

Según Castro *et al.* (2006), los niños con talento matemático piensan de manera diferente y tienen estrategias diferentes para el análisis y solución de problemas matemáticos. Además, citando a Niederer *et al.* (2003), afirma que "es la resolución de problemas la forma más útil y precisa para identificar el talento matemático" (p. 460).

Castro *et al.* (2014) establece dos tipos de tareas en matemáticas, los ejercicios rutinarios y los problemas. Los ejercicios son tareas en las cuales el estudiante conoce los procesos para resolverla. Los problemas son tareas no rutinarias, para cuya solución el estudiante no tiene conocimiento del correspondiente procedimiento y se convierten en retos matemáticos. Leikin (2004, citado por Castro *et al.*, 2014) indica que los retos propuestos a estudiantes talentosos en matemáticas deben "a) ser motivadores, b) que no se resuelvan fácilmente con procedimientos disponibles; c) que requieran que el estudiante realice un intento; d) tener varios enfoques para obtener la solución." (p. 88).

Problemas que conforman la prueba de selección

En relación con la segunda fase del funcionamiento del CM-UPN, la selección de los participantes, la prueba que presentan los estudiantes generalmente está conformada por cinco problemas que son diseñados por el equipo del CM-UPN, es decir, los profesores, estudiantes practicantes y estudiantes voluntarios. Para ello cada uno de los integrantes del equipo debe proponer un problema, preferiblemente no rutinario, puede ser de única respuesta o de respuesta múltiple, y que debe evaluar, por lo menos, una característica del talento matemático ya sea asociado al pensamiento convergente o al pensamiento divergente. Por ejemplo, aquellos problemas que requieren construir múltiples configuraciones o explorar distintas soluciones favorecen la identificación de la flexibilidad y la creatividad, mientras que los que implican interpretar representaciones o anticipar resultados permiten evidenciar procesos de visualización y abstracción.

En el proceso de elaboración de los problemas, cada miembro del Club hace una propuesta inicial y la presenta al equipo, y cada uno resuelve la pregunta y hace aportes para mejorarla. En la siguiente sesión se debe presentar nuevamente el problema para verificar que se hayan hecho los ajustes pertinentes y este sea apto para ser incluido en la prueba.

En relación con las respuestas, si es de única respuesta se debe asignar el 100% de la calificación a esta, si tiene múltiples respuestas se puede asignar el mismo porcentaje a cada una de ellas o se pueden asignar porcentajes diferentes de acuerdo con la dificultad o los procesos implicados para llegar a cada una de las respuestas.

Es de resaltar que, algunas veces, cuando se hacen comentarios de mejora a los problemas, pueden surgir nuevos problemas que usan como base la estructura y los datos, pero que apuntan a desarrollar otros asuntos con la pregunta o las soluciones ofrecidas.

A lo largo de los años se han diseñado problemas en diferentes ramas de las matemáticas: cálculo, estadística, álgebra, aritmética y geometría. A continuación, se presentan algunos problemas que se han diseñado en el área de geometría. Para cada problema se incluirá el título de la pregunta, el(la) autor(a), la(s) característica(s) del talento matemático involucradas o evaluadas, propósito del problema, el enunciado y las opciones de respuesta (véanse tablas 1, 2, 3 y 4).

Nombre del problema: Palitos y triángulos (problema basado en actividad propuesta en la Licenciatura en Básica Primaria de la UPN)	
Autor(es): Lyda Mora y William Jiménez	
Características del talento matemático: flexibilidad	
Propósito: este problema pone en juego la capacidad de analizar patrones y optimizar recursos a partir de una construcción geométrica simple. A medida que se agregan triángulos que comparten lados, el estudiante debe identificar regularidades y generalizar el comportamiento del número de palitos utilizados.	
Enunciado: Con palitos de paleta de igual tamaño representar un triángulo, de tal manera que solo se utilice un palito para cada lado del triángulo. A partir de este, formar un nuevo triángulo que comparta exactamente un lado con el triángulo anterior. Después, hacer un nuevo triángulo con las condiciones anteriores. Si nos dan 23 palitos, ¿cuántos polígonos regulares se pueden formar? Elegir todas las respuestas posibles.	
Opciones de respuesta:	10 o más; 10 a lo más; 12; 2; 11 triángulos; 7 triángulos aproximadamente; 16; 18

Tabla 1: Problema 1. Palitos y triángulos (diseñado por L. Mora y W. Jiménez en 2023)

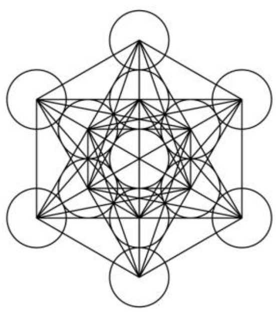
Nombre del problema: Viendo sólidos geométricos	
Autor(es): Tania Plazas	
Características del talento matemático: visualización	
Propósito: en este problema se evalúa la habilidad de visualización espacial, donde el estudiante debe interpretar e identificar representaciones planas de figuras tridimensionales.	
Enunciado: Dada la figura a continuación 	Identifique cuáles de los siguientes sólidos geométricos (figura geométrica en tres dimensiones) se pueden representar en la figura anterior. (Las líneas punteadas representan lados de la figura que no se ven desde esa perspectiva)
Opciones de respuesta:	Cubo; Prisma de base pentagonal; Pirámide de base hexagonal; Cono; Octaedro; Dodecaedro; Pirámide de base triangular (tetraedro); Cilindro; Icosaedro; No se evidencia algún sólido de los mencionados

Tabla 2: Problema 2. Viendo sólidos geométricos (diseñado por T. Plazas en 2024)

Nombre del problema: Truchet

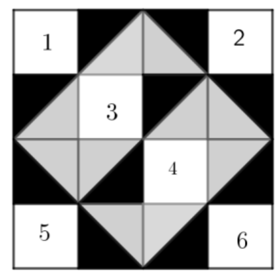
Autor(es): William Jiménez

Características del talento matemático: visualización

Propósito: este problema desafía la capacidad de visualización y análisis de patrones, el estudiante debe anticipar cómo se comportan las figuras al repetirse y determinar cuáles permiten formar polígonos regulares con condiciones específicas, promoviendo el razonamiento no rutinario.

Enunciado: Se dan las siguientes baldosas de lado uno que llamaremos *A*, *B*, *C* y *D*.

Como regla no podemos rotar ni reflejar las baldosas y solo se puede utilizar un tipo para completar todos los espacios 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de la figura a continuación. ¿Cuáles baldosas podemos seleccionar para completar al menos un polígono regular de tal manera que la medida de lado no sea un número entero? (Solo puede usar un tipo de baldosa. Por ejemplo, si selecciona la baldosa *A* esta debe ser puesta en los espacios 1, 2, 3, 4, 5 y 6).



Opciones de respuesta: Baldosa *A*; Baldosa *B*; Baldosa *C*; Baldosa *D*

Tabla 3: Problema 3. Truchet (diseñado por W. Jiménez en 2024)

Nombre del problema: Desafíos de trazos geométricos (pregunta basada en simulacros prueba Universidad Nacional, 2009)

Autor(es): Johan Santiago Cárdenas Román

Características del talento matemático: fluidez

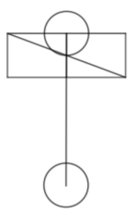
Propósito: Este problema se enfoca en la comprensión precisa de instrucciones geométricas y la capacidad de traducirlas en representaciones gráficas correctas. Se evalúa la fluidez al interpretar y ejecutar múltiples pasos, así como la atención al detalle para identificar cuáles construcciones cumplen con todas las condiciones dadas.

Enunciado: En una clase de geometría, el docente propone un reto de construcción gráfica con el propósito de evaluar la comprensión de instrucciones geométricas escritas. Para ello, escogió a cuatro estudiantes: José, María, Juan, Laura, Diego y Angeló. El profesor les dio el siguiente enunciado:

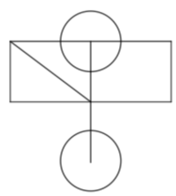
A un rectángulo horizontal se le traza la diagonal que parte del vértice superior izquierdo. En el punto medio de dicha diagonal, se dibuja un segmento vertical que interseca los lados superior e inferior del rectángulo, y se prolonga hacia abajo una longitud igual a una altura del rectángulo. Tomando como centros los extremos de ese segmento vertical, se trazan dos circunferencias cuyo diámetro es igual a una altura del rectángulo.

Cada estudiante realizó una representación gráfica distinta siguiendo las instrucciones del problema. A continuación, se muestran los resultados:

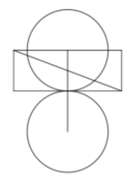
José



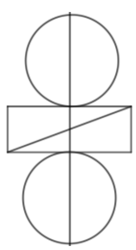
María



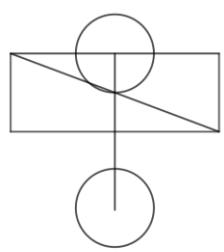
Diego



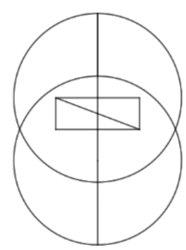
Juan



Laura



Angeló



¿Cuál o cuáles representaciones son correctas?

Opciones de respuesta: José; Juan; María; Laura; Diego; Angeló

Tabla 4: Problema 4. Desafíos de trazos geométricos (diseñado por S. Cárdenas en 2026)

REFLEXIÓN FINAL

La elección de la geometría como eje para el diseño de problemas responde a su potencial para activar procesos cognitivos complejos, especialmente aquellos relacionados con la visualización, la representación espacial y la construcción de argumentos. La geometría permite que los estudiantes articulen distintas formas de pensamiento, integrando lo visual, lo analítico y lo intuitivo. Por ello, se considera un campo particularmente adecuado para identificar rasgos del talento matemático, por cuanto facilita la aparición de estrategias diversas y la producción de soluciones originales.

REFERENCIAS

Casas, A., González, M. y Mora, L. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: el talento en matemáticas. *Revista Pedagogía y Saberes*, 30, 131.

Castro, E., Maz, A., Benavides, V. y Segovia, I. (2006). *Talento matemático: diagnóstico e intervención*. Universidad de Granada.

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Castro-Rodríguez, E. (2014). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula*, 21, 85-104. https://doi.org/10.14201/aula20152185104

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faísca*. *Revista de altas capacidades*, *13*(15), 30-39. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3538471

Jiménez, W., Mora, L. C. y Rojas, S. M. (2011). Características del talento matemático asociadas a la visualización. En *Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 1-12. Recuperado de https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1175/234

Universidad Nacional de Colombia (2009). *Prueba de admisión I-2009* (p. 32, ejercicio 99). Recuperado de https://www.descargas.pasaralaunacional.com/p/examen-prueba-unal-carreras-preguntas.html

Evolución de los esquemas de uso de GeoGebra en la construcción de cónicas: un estudio de caso desde la doble génesis instrumental

Ivonne Ramírez y Marisol Santacruz-Rodríguez
Universidad del Valle
ivonne.ramirez@correounivalle.edu.co, marisol.santacruz@correounivalle.edu.co

Se presentan avances de una investigación doctoral sobre la doble génesis instrumental cuando un futuro profesor de matemáticas colombiano construye cónicas con GeoGebra. Mediante un estudio de caso, como metodología de investigación, se infieren los esquemas de uso de Víctor, estudiante de último año de Licenciatura en Matemáticas, en situaciones personales y profesionales. Los resultados evidencian una instrumentación progresiva hacia la gestión pedagógica en el aula, sin consolidar una instrumentalización significativa. Asimismo, se muestra que los contextos de práctica pedagógica favorecen la evolución de estos esquemas, mientras persiste la brecha entre la génesis personal y profesional como desafío en la formación de profesores de matemáticas.

Introducción

El estudio del papel de las Tecnologías Digitales (TD) en la formación de futuros profesores de matemáticas (FPM) constituye una línea de creciente interés en la Educación Matemática (Clark-Wilson *et al.*, 2020; CERME13-TWG18, 2023; Buteau *et al.*, 2024). Estas investigaciones muestran que la apropiación de una TD no consiste únicamente en una aproximación "técnica" (Artigue, 2002), sino que implica transformar el artefacto (por ejemplo, una hoja de cálculo) en un instrumento para aprender o enseñar matemáticas. Este proceso, en el enfoque instrumental, se denomina génesis instrumental, categoría que permite explicar la emergencia o el desarrollo de un instrumento en un sujeto.

Estas génesis instrumentales involucran procesos de instrumentación (transformación de los esquemas de uso del sujeto) e instrumentalización (adaptación del artefacto a necesidades específicas). En el caso de los profesores, Haspekian (2023) distingue una doble génesis instrumental: (i) la génesis personal, referida a la transformación de un artefacto en un instrumento para hacer matemáticas,

Ramírez, I. y Santacruz-Rodríguez, M. (2026). Evolución de los esquemas de uso de GeoGebra en la construcción de cónicas: un estudio de caso desde la doble génesis instrumental. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 151-158. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

y (ii) la génesis profesional, en la cual el artefacto se constituye en un instrumento didáctico para enseñar matemáticas. Por otra parte, las cónicas constituyen un contenido privilegiado para estudiar esta doble génesis, pues la tensión entre los enfoques sintético y analítico se activa tanto en la actividad matemática propia del FPM como en el diseño de situaciones de enseñanza al construir cónicas, lo que permite observar cómo, al usar GeoGebra, un FPM puede articular o fragmentar ambos enfoques según los esquemas de uso que desarrolla.

De ahí surge la pregunta de investigación: ¿Cómo futuros profesores de matemáticas desarrollan su doble génesis instrumental al construir cónicas con Geometría Dinámica, en particular, con GeoGebra?

En este sentido, se estudia la apropiación que el FPM hace de GeoGebra al construir cónicas, asumiéndola como un proceso complejo que exige analizar la actividad del FPM cuando su génesis personal y profesional se confrontan. No se pretende documentar toda la trayectoria de formación universitaria, aunque, con técnicas de introspección se pueden obtener datos interesantes del uso de GeoGebra durante la formación del FPM, logrando evidenciar qué conocimientos (matemáticos, tecnológicos, pedagógicos) se movilizan. Esta investigación se enfoca en estudiantes de últimos semestres, desde su práctica pedagógica, y se presenta avances del caso de Víctor (pseudónimo), evidenciando la evolución de sus esquemas de uso en tres situaciones diferenciadas.

MARCO TEÓRICO

El enfoque instrumental estudia la actividad humana en relación con las tecnologías desde una perspectiva antropocéntrica (Verillon *et al.*, 1995) y plantea que un artefacto (*e. g.*, GeoGebra) se constituye en instrumento mediante génesis instrumentales que involucran procesos de instrumentación e instrumentalización. En este marco, el concepto dual situación - esquema es esencial. El esquema corresponde a una organización invariante de la actividad para una clase de situaciones dada, y está compuesto por: (a) submetas y anticipaciones, siendo el aspecto intencional de los esquemas; (b) reglas de acción, que permiten generar la sucesión de las acciones del sujeto y es la parte generadora de los esquemas, (c) invariantes operatorios conformados por teoremas-en-acción (es una proposición que el sujeto considera verdadera cuando actúa) y conceptos-en-acción (es un concepto considerado relevante); y (d) inferencias, siempre hay inferencia y cálculo en cualquier actividad, para adaptarse a las particularidades de la situación.

Además, para Vergnaud (1998), la actividad es el proceso mediante el cual un sujeto moviliza esquemas frente a una situación para interactuar con ella, lo que implica un continuo ajuste y aprendizaje. Desde esta perspectiva, la actividad no se reduce a ejecutar tareas mecánicamente, ya que, también moviliza esquemas construidos en experiencias previas, reorganizados según las condiciones de la situación. Por ello, aprender supone transformar y reorganizar dichos esquemas en situación.

Por otra parte, a partir de sus investigaciones con profesores y de distinguir la doble génesis instrumental (personal y profesional), Haspekian (2023) destaca que dichas génesis no necesariamente evolucionan de manera simultánea. En ese sentido, estudios recientes (e. g. Buteau *et al.*, 2024) evidencian otro tipo de génesis instrumentales en FPM, vinculadas estas al diseño e implementación de actividades didácticas con TD. Estos hallazgos plantean interrogantes sobre cómo los FPM se apropian de las TD durante su formación universitaria y qué conocimientos sé transforman cuando los FPM los integran en sus prácticas de enseñanza, aspectos que requieren mayor análisis sobre por qué, cómo, cuándo y en qué condiciones se produce esta apropiación.

Por su parte, la construcción de cónicas permite explorar la tensión entre dos enfoques de la geometría, el sintético (basado en lugares geométricos) y el analítico~~s~~ (relacionados con ecuaciones algebraicas; Di Blasi Regner, 2019). En esta investigación, GeoGebra ofrece potencialidades para articular representaciones algebraicas, gráficas y geométricas (Gómez-Chacón, 2022).

Sin embargo, la apropiación de una TD requiere que los FPM desarrollen esquemas en diversas situaciones en las que sea posible experimentar (Rivera Figueroa *et al.*, 2023), conjeturar y validar propiedades de las cónicas, a través de la exploración dinámica; les permita transformar su actividad matemática, la comprensión del objeto geométrico, así mismo, reconocer las funcionalidades (potencialidades y limitaciones) del *software*, junto con la evolución del conocimiento pedagógico sobre su uso didáctico.

Metodología

Se adopta un enfoque cualitativo con estrategia de estudio de caso de carácter naturalista (Yin, 2009). Los datos se recolectan mediante observación no participante en contextos reales, donde el FPM desarrolla su actividad: interacción entre pares, asesorías universitarias y clases en instituciones educativas públicas, sin intervención de los investigadores.

Víctor es un FPM en el último año de Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública colombiana; su práctica pedagógica se desarrolla con estudiantes de grado décimo. Tiene experiencia previa con GeoGebra, adquirida en cursos universitarios de geometría y cálculo.

El corpus de datos incluye: videograbaciones de planeación colaborativa, asesorías universitarias e implementación de clases; registros de pantalla de GeoGebra; entrevistas semiestructuradas con técnica de introspección; documentos de planeación y notas de campo. El período de recolección fue de aproximadamente seis meses. El análisis sigue un protocolo de codificación basado en teoría fundamentada (Strauss *et al.*, 1998), estructurado en tres fases: (1) segmentación e identificación de episodios de actividad instrumentada; (2) inferencia abductiva de esquemas de uso a partir de sus cuatro componentes; y (3) construcción de redes de esquemas. Para el caso de Víctor se identificaron 16 episodios y 12 esquemas de uso.

Resultados

La evolución de los esquemas de uso de Víctor puede narrarse en tres momentos articulados, cada uno con sus propios esquemas, modos de relacionarse con GeoGebra y limitaciones, como se muestra a continuación:

Primera situación: aprender a construir cónicas con GeoGebra. La génesis instrumental personal de Víctor emerge en sus primeros intentos de construir cónicas con GeoGebra junto a Liam (pseudónimo), un compañero universitario que le muestra cómo construir la elipse desde un enfoque estrictamente analítico: ingresar la ecuación canónica, identificar elementos en la ventana gráfica y utilizar el comando centro(cónica). En esta interacción no aparecen herramientas dinámicas como arrastre o deslizadores, ni establecen conexiones con propiedades geométricas.

A partir de estos episodios, Víctor configura un esquema de uso algebraico-estático, donde GeoGebra funciona principalmente como sistema de entrada de ecuaciones cuya salida gráfica sirve para verificar visualmente resultados, sin promover una exploración geométrica ni articulación entre enfoques sintético y analítico.

Segunda situación: planificar la enseñanza de la elipse. Este momento revela la génesis instrumental personal de Víctor, cuando presenta su planeación a la asesora universitaria Samantha (pseudónimo). En esta situación se seleccionaron dos episodios (episodio 3 y episodio 4), donde Víctor propone introducir la elipse a sus estudiantes mostrando la intersección de dos parábolas en GeoGebra: digita las ecuaciones $y = 2x^2 - 2$; $y = -2x^2 + 2$ en la ventana algebraica, observa la figura resultante y concluye que la región entre las dos curvas constituye una elipse. El siguiente fragmento corresponde en parte, al episodio 3, que captura este momento:

Víctor:	…al ver que se intersecaban aquí las dos parábolas, podríamos ver como tal lo que es la parte de las elipses…podemos ver cómo está la figura de una elipse.
Asesora:	Pero ¿sí es la elipse? ¿Sí le da la ecuación de la elipse?

Ante el cuestionamiento de Samantha, Víctor revisa sus apuntes y reconoce: "*No, no es la misma ecuación de la elipse. Ya que la ecuación de la elipse como tal es* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$". Este momento constituye una ruptura cognitiva que revela la estructura de sus esquemas de uso para la identificación de cónicas: esquemas basados en la apariencia gráfica y en la equivalencia visual entre formas, sin articulación con las definiciones algebraicas o geométricas. La intervención de Samantha actúa como perturbación que impulsa la transformación de su esquema. La tabla 1 sintetiza los elementos del esquema de uso N.° 1 de Víctor (***Presentando la elipse como la intersección de dos parábolas usando GeoGebra***), inferido a partir del episodio 3 (tercero en la numeración global del corpus; primero de la situación de planeación y asesoría).

Tras la interacción de Samantha, Víctor adopta el enfoque analítico mostrado previamente por Liam. Sin embargo, persisten las limitaciones de su génesis personal: GeoGebra continúa siendo utilizado como un sistema algebraico-estático. Esta limitación también se refleja en la génesis profesional. Durante la planeación de clase, las tareas diseñadas no movilizan exploración, arrastre ni validación dinámica que favorezcan la construcción conceptual de la elipse. El *software* permanece centrado en la representación estática de objetos matemáticos, sin integrarse plenamente a una actividad de enseñanza mediada por la interacción entre GeoGebra, situación y conocimiento matemático.

Componentes	Descripción/ Contenido
Submetas/anticipaciones	Introducir la elipse mediante la intersección de parábolas estableciendo relaciones entre representaciones algebraicas y gráficas.
Reglas de acción	Consultar apuntes, digitar ecuaciones, analizar figuras en la ventana gráfica, conversar con Samantha, revisar nuevamente apuntes y hacer adaptaciones.
Invariantes operatorias (teoremas-en-acción)	"La intersección de dos parábolas permite definir una elipse"; "si dos figuras son visualmente semejantes, representan el mismo objeto matemático".
Invariantes operatorias (conceptos-en-acción)	Elipse como figura cerrada, parábolas con coeficientes opuestos, representación visual en GeoGebra.
Inferencias	GeoGebra facilita la visualización, aunque no garantiza razonamientos deductivos sobre las propiedades de la elipse.

Tabla 1: síntesis del esquema de uso de Víctor en situación de planeación de clase

Tercera situación: usar GeoGebra en la enseñanza de la elipse. La práctica pedagógica de Víctor evidencia una génesis profesional más compleja. En una primera fase, GeoGebra se usa de manera demostrativa: Víctor proyecta el *software* mientras los estudiantes observan pasivamente. Aunque formula preguntas, la interacción continúa siendo unidireccional.

El punto de inflexión ocurre cuando los estudiantes utilizan GeoGebra en dispositivos móviles. En esta situación, Víctor debe gestionar simultáneamente múltiples génesis instrumentales, enfrentando dificultades tecnológicas y conceptuales no previstas, lo cual, favorece el desarrollo de esquemas de tutoría diferenciada. En el episodio 14, Víctor aplica una secuencia interrogativa recurrente: pregunta diagnóstica, interrogación progresiva e instrucción directa como cierre. Frente a las dificultades de una estudiante (E8), cambia de interrogación a instrucción directa, señalando en la pantalla y ejecutando el comando centro(cónica).

Víctor:	¿Qué centro nos da? ¿entonces, qué puedes concluir ahí?
E8:	(5,4). El centro, lo define hk y está en (5,4).
Víctor:	(h,k) es lo que nos va a definir nuestro centro (y se desplaza a otro grupo de estudiantes)

Este fragmento del episodio muestra evolución hacia esquemas de tutoría diferenciada; sin embargo, también evidencia un límite teórico importante. La respuesta de la estudiante se produce después de que GeoGebra entrega el resultado mediante un procedimiento dirigido por Víctor. El *software* sustituye el razonamiento que debería mediar, en lugar de favorecerlo.

En términos de Rabardel (1995), se evidencia una instrumentalización de GeoGebra por parte de Víctor que no se traduce necesariamente en instrumentación significativa en los estudiantes. El teorema-en-acción que sostiene el esquema puede sintetizarse así: "si pregunto repetidamente de formas diferentes, eventualmente el estudiante llegará a la respuesta correcta". Aunque este esquema permite mantener el ritmo de la actividad, no distingue entre comprensión construida y respuesta obtenida por andamiaje directo.

CONCLUSIONES

Los resultados parciales del estudio del caso de Víctor revelan que la doble génesis instrumental en FPM al construir cónicas con GeoGebra no sigue una trayectoria única, ni lineal. La evolución de sus esquemas de uso puede caracterizarse como instrumentación progresiva sin instrumentalización significativa. Igualmente, se pone en evidencia el papel de los esquemas sociales como mediadores en su aprendizaje instrumental, ya que, su comprensión se construye en la interacción con otros, aunque dicha mediación no garantiza una apropiación conceptual profunda.

Se espera que, tras la codificación selectiva del estudio de casos múltiples, se identifiquen patrones en las trayectorias de la génesis instrumental y una posible emergencia de génesis diferenciadas entre diseño e implementación. Asimismo, se busca contrastar los hallazgos con el modelo MPTK (Thomas *et al.*, 2014). En conjunto, los resultados podrían aportar en la formación docente al reconocer la complejidad instrumental y ofrecer orientaciones sobre las situaciones que favorecen procesos de apropiación de TD, especialmente en el uso de *software* de geometría dinámica.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal on Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Buteau, C., Broley, L., Mgombelo, J., Muller, E., Sacristán, A. I. y Santacruz-Rodríguez, M. (2024). Future secondary school teachers' learning to use programming as a tool for mathematics: A reflective mathematics content course approach. En *Proceedings of the 14th International Congress for Mathematics Education* (ICME-14). Sydney, Australia

CERME13-TWG18. (2023). *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13). Thematic Working Group 18: Mathematics Teacher Knowledge, Beliefs and Identity*. Budapest, Hungría: ERME.

Clark-Wilson, A., Robutti, O. y Thomas, M. (2020). *Teaching with digital technology*. *ZDM*, *52*(7), 1223-1242.

Di Blasi Regner, M. A. (2019). *Articulación entre los enfoques sintético y analítico en cónicas a nivel superior en entornos de geometría dinámica.* Tesis doctoral, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

Gómez-Chacón, I. M. (2022). Mathematics teachers' knowledge and professional development: A cross-case comparison study. En *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 229-246). Springer International Publishing.

Haspekian, M. (2023). Double instrumental genesis and TPACK framework: Issues and prospects for teacher education. En B. Pepin, G. Gueudet y J. Choppin (eds.), *Handbook of digital resources in mathematics education*. Springer.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rivera-Figueroa, A. y Bravo-Díaz, E. (2023). ¿Cómo varía la forma de las cónicas cuando su excentricidad tiende a uno o a cero? Un estudio exploratorio con profesores de bachillerato de una universidad mexicana. *Educación Matemática, 35*(3), 209-236.

Strauss, A. y Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* [2.ª ed.]. Sage.

Thomas, M., y Palmer, J. M. (2014). Teaching with digital technology: Obstacles and opportunities. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, y N. Sinclair (eds.), *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 71-89). Springer.

Vergnaud, G. (1998). Towards a cognitive theory of practice. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 227-240). Dordrecht: Springer Netherlands.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* [4.ª ed.]. Sage.

Círculos Matemáticos UIS: tareas de disecciones geométricas y equivalencia de áreas a partir del Stomachion

Camila Rojas, Wilder Moreno y Jenny Acevedo-Rincón
Universidad Industrial de Santander
camila2211962@correo.uis.edu.co, wilder2212704@correo.uis.edu.co, jepaceri@uis.edu.co

El trabajo, sobre el que se reporta en este artículo, analiza y adapta un taller del espacio académico Círculos Matemáticos de la Universidad Industrial de Santander al modelo pedagógico 5E, con el propósito de promover el pensamiento espacial y los sistemas geométricos en estudiantes de grados noveno a undécimo. La investigación se desarrolló desde un paradigma interpretativo y un diseño bibliográfico. Como resultado, se seleccionó un taller de disecciones geométricas, reorganizado según las fases de enganchar, explorar, explicar, elaborar y evaluar. El análisis evidenció que esta adaptación constituye una posibilidad pedagógica sólida para enriquecer la enseñanza de la geometría, al favorecer la exploración, la argumentación y la comprensión de la conservación del área.

Introducción

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, desde hace algunos años se ha venido evidenciando una problemática debido a la manera de enseñar matemáticas, ya que ha estado centrada en la trasmisión de fórmulas, procedimientos y la memorización de pasos. Para abordar esta problemática, han surgido propuestas que procuran contribuir de manera significativa al desarrollo del pensamiento matemático. Una, conocida como Círculos Matemáticos, surgió aproximadamente a inicios del siglo XX en la Unión Soviética y Europa del Este, y se implementó por primera vez en Colombia en el año 2018.

En la Universidad Industrial de Santander (UIS), la implementación de talleres de Círculos Matemáticos ha generado espacios extracurriculares en los que los estudiantes logran fortalecer su pensamiento matemático. Sin embargo, es cierto que aún existe una brecha en el desarrollo del pensamiento matemático durante el paso del colegio a la universidad.

En este artículo se presenta un taller seleccionado del espacio académico Círculos Matemáticos de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de

Rojas, C., Moreno, W. y Acevedo-Rincón, J. (2026). Círculos Matemáticos UIS: tareas de disecciones geométricas y equivalencia de área a partir del Stomachion. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 159-164. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Santander, que fue adaptado para trabajar con el modelo 5E, con el fin de contribuir con la promoción del pensamiento espacial y sistemas geométricos en estudiantes de los grados noveno a undécimo.

Los círculos matemáticos UIS

Los Círculos Matemáticos de la Universidad Industrial de Santander[1] nacen como una iniciativa para que los estudiantes de educación media, noveno a undécimo grado, tengan espacios donde se genere el quehacer matemático a través de actividades exploratorias, divertidas y rigurosas a la vez. Este programa está dirigido a instituciones educativas de Bucaramanga, su área metropolitana y los municipios de Santander dentro del área de influencia de sus sedes regionales.

La primera sesión de Círculos Matemáticos UIS se realizó en marzo de 2023 en la sede UIS Socorro, donde participaron 45 estudiantes provenientes de distintas instituciones educativas de los municipios de Socorro y Oiba. Durante el primer semestre se programaron ocho sesiones orientadas por docentes de la Escuela de Matemáticas, y al finalizar dicho semestre se entregó un certificado a quienes asistieron al menos a 75% de las sesiones.

El contenido de los talleres abarca diversas áreas, entre las cuales están álgebra, teoría de números, análisis, ecuaciones diferenciales y geometría diferencial. El desarrollo de los talleres está a cargo de los grupos de investigación de la Escuela de Matemáticas de la UIS. En este sentido, los Círculos Matemáticos UIS tienen como propósito incentivar la vocación matemática, aumentar el ingreso de estudiantes a los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la UIS, generar espacios académicos y de divulgación que fortalezca el desarrollo del pensamiento matemático, compartir el entusiasmo y la pasión por el estudio y promover el interés de las matemáticas en los jóvenes del departamento de Santander.

El modelo pedagógico 5E

El modelo pedagógico 5E nace en la década de 1980, como una propuesta de Rodger W. Bybee, en el marco del *Biological Sciences Curriculum Study* (BSCS) y fue actualizado en 2006. Su principio fundamental parte de una combinación de tres modelos creados con anterioridad: el de Herbart, en 1990, el de

[1] http://matematicas.uis.edu.co/?q=Presenta_circulos

Dewey, en 1930 y el de Heiss, Obourn y Hoffman, en 1950. El modelo 5E está constituido por cinco fases designadas con palabras cuya letra inicial es “E” (***E**nganchar*, ***E**xplorar, **E**xplicar, **E**laborar y **E**valuar).* El principal objetivo de este modelo es convertir al estudiante en el protagonista del aprendizaje y al docente en un guía.

En la primera fase, *Enganchar*, el rol del docente es generar situaciones que capten el interés, la curiosidad y a la vez permitan identificar los conocimientos previos de los estudiantes. En la segunda fase, *Explorar*, el docente es un guía y, por otro lado, los estudiantes pueden formular hipótesis y explorar el material didáctico entregado. En la tercera fase, *Explicar*, los estudiantes expresan las ideas generadas en las primeras dos fases y el docente resuelve dudas e inquietudes generadas, dando claridad sobre los nuevos conceptos trabajados. En la cuarta fase, *Elaborar*, los estudiantes tienen la oportunidad de poner en práctica lo que han aprendido durante la sesión, por medio de actividades o problemas que generen discusiones. Para finalizar, la fase *Evaluar*, cabe resaltar que debe llevarse a cabo mientras se desarrollan las otras cuatro fases, garantizando una evaluación continua. Su principal objetivo es que los estudiantes reflexionen sobre su propio aprendizaje y que el docente evalúe el proceso que tuvieron los estudiantes hacia el logro de los objetivos propuestos.

Metodología

La investigación, cuyo avance se reporta en este artículo, se encuentra dentro del paradigma interpretativo y el diseño bibliográfico, puesto que la investigación se centra en revisar, interpretar y analizar los talleres publicados en el sitio web de los Círculos matemáticos de la Escuela de Matemáticas de la UIS para Educación Media. Además, se fundamenta en un diseño bibliográfico, que se caracteriza por basarse en el análisis de fuentes secundarias.

El diseño bibliográfico se desarrolla mediante seis fases. (i) Identificación de las fuentes: en esta fase se realiza un análisis de la página web oficial de Círculos Matemáticos UIS para identificar la estructura y contenido de los talleres publicados. (ii) Análisis curricular de los talleres: en esta fase se relacionan los ejercicios con los estándares básicos de competencias y los tipos de pensamiento matemáticos. (iii) Selección de talleres: se escoge un grupo de talleres para reformular, logrando potenciar el pensamiento matemático. (iv) Formulación de la estrategia 5E para el programa Círculos Matemáticos: en esta fase se describen cada uno de los momentos de cada taller respondiendo a la filosofía de los Círculos Matemáticos UIS. (v) Articulación del modelo 5E con el espacio académico Círculos Matemáticos: en esta fase se mira la correspondencia entre los talleres originales y los talleres reformulados, mostrando cómo se articula con las estrategias del modelo 5E. (vi) Propuesta pedagógica de Círculos Matemáticos basada en 5E: en esta última fase se presentan los talleres reformulados con base en el modelo 5E, acompañados de observaciones, ajustes y conclusiones.

RESULTADOS

El nombre de la sesión es "Disecciones geométricas y equivalencia de áreas a partir del Stomachion[2]". El objetivo de la sesión es, por una parte, comprender que una disección geométrica permite transformar una figura en otra mediante cortes y reacomodos sin cambiar el área total, y, por otra, explicar esta idea con base en el teorema de Bolyai-Gerwien a partir de la manipulación del Stomachion,

Para comenzar la fase de enganche, se presenta la imagen 1. A continuación, el docente realiza las siguientes preguntas orientadoras: ¿qué observan aquí?; ¿las figuras final e inicial tienen la misma forma?; si no tienen la misma forma, ¿qué creen que podría mantenerse igual? Esto con varios fines: despertar la curiosidad en los estudiantes sobre cómo una figura puede transformarse en otra distinta sin perder área; activar saberes previos sobre superficie, forma y descomposición; y plantear una primera hipótesis.

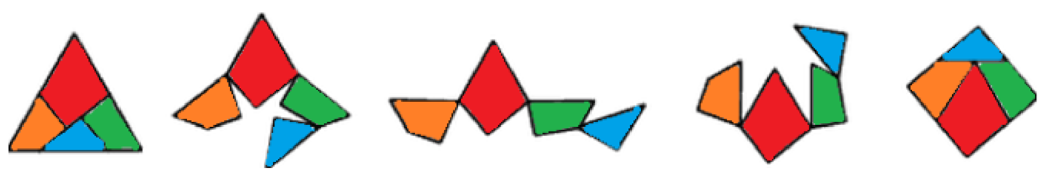


Imagen 1: transformación del triángulo a partir de disecciones (tomada de Disecciones geométricas. Stomachion, 2014)

Pasando a la fase de exploración, el docente organiza grupos de tres estudiantes y a cada grupo le entrega una copia de la imagen 2. Enseguida, da la indicación de recortar la figura hasta tener las 14 piezas. Luego, plantea dos ejercicios, el primero consiste en reconstruir el cuadrado original y el segundo, en formar un

[2] Antiguo rompecabezas geométrico atribuido a Arquímedes (véase imagen2).

cuadrado diferente. Sin embargo, menciona que las piezas no pueden ser dobladas, cortadas de nuevo o superpuestas para construir nuevas figuras.

El objetivo de esta fase es que los estudiantes manipulen piezas, construyan conjeturas y descubran empíricamente que una misma colección de piezas puede formar distintas figuras sin alterar el área total.

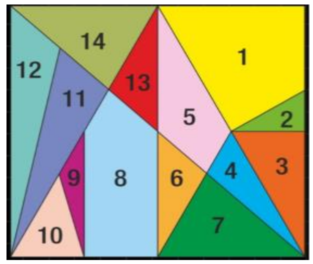


Imagen 2: cuadrado disecado en 14 secciones (tomada de fotograma del video *Disecciones geométricas*. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=DEtIPhQi4gY)

La fase de explicación tiene como objetivo formalizar lo observado en las fases anteriores; para esto, el docente plantea las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿lograron construir el cuadrado original?, ¿qué diferencia hay entre el cuadrado original y el nuevo cuadrado construido?, ¿usaron todas las piezas?, ¿se superpuso alguna?, ¿qué cambió al pasar del cuadrado a la nueva figura? y ¿qué creen que se conservó?

A continuación, se presenta la definición formal de *disección geométrica* (Una disección geométrica es el corte de una figura en piezas que pueden reorganizarse para formar otra figura) y el enunciado del teorema de Bolyai-Gerwien (Dados dos polígonos cualesquiera de la misma área, es posible cortar uno de ellos en un número finito de piezas poligonales de forma que estas piezas puedan reordenarse formando exactamente el otro polígono).

En la fase de elaboración, el docente acompaña a los estudiantes en la aplicación de los conceptos en nuevos ejercicios, verifica procedimientos y fomenta la justificación de respuestas; para esto, cada grupo de estudiantes, con las mismas 14 piezas del Stomachion deben construir una figura geométrica distinta del cuadrado y explicar por qué el área no cambia.

En la fase de evaluación, cada grupo de estudiantes muestra la figura que construyó, explican cómo la armaron y explican por qué el área no cambia. A medida que se va desarrollando esta fase el docente realiza las siguientes preguntas orientadoras: ¿qué figura construyeron y en qué se diferencia del cuadrado inicial?, ¿usaron todas las piezas?, ¿hubo superposición en algún momento?, ¿qué cambió: la forma o el área?, ¿por qué pueden afirmar que la superficie total sigue siendo la misma?, ¿qué fue lo más difícil al reorganizar las piezas?, ¿qué aprendieron sobre la relación entre forma y área?, ¿esta nueva figura es congruente con la original? ¿por qué?, ¿cómo se relaciona esta actividad con la idea de disección geométrica?, ¿qué entendí hoy sobre las disecciones geométricas?, y ¿qué relación encontré entre recortar, reorganizar y conservar el área?

Reflexiones

La adaptación del taller al modelo pedagógico 5E permitió reconocer que la enseñanza de las matemáticas puede enriquecerse cuando se proponen experiencias centradas en la exploración, la manipulación de material y la construcción activa del conocimiento. En este caso, el uso del Stomachion favorece no solo que los estudiantes observen transformaciones geométricas, sino que comprendan, a partir de la experiencia, que es posible modificar la forma de una figura sin alterar su área. De esta manera, el aprendizaje deja de estar limitado a la memorización de definiciones y se convierte en un proceso de descubrimiento, argumentación y análisis.

Además, la articulación del taller seleccionado y el modelo pedagógico 5E permite reconocer una posibilidad pedagógica consistente para promover el pensamiento espacial y los sistemas geométricos en estudiantes de educación media. A partir del análisis realizado, se evidencia que esta organización didáctica no solo favorece la curiosidad, la formulación de conjeturas y la comprensión conceptual, sino que también otorga al taller una estructura más intencionada y reflexiva. En ese sentido, la propuesta resignifica el valor del recurso didáctico seleccionado, al mostrar que su adaptación puede orientar procesos de aprendizaje más comprensivos, rigurosos y centrados en el estudiante.

Referencias

Disecciones geométricas. Stomachion. (2014, 8 julio). *Matemática y algo más*. https://profmate.wordpress.com/disecciones-geometricas/

Encuentro de
GEOMETRÍA
y sus APLICACIONES

17 al 19 de junio de 2026

Pósteres

LA CUADRATURA DEL CÍRCULO DESDE LA PROPUESTA DE HOBBES

Campo Elías Flórez-Pabón
Universidad de Pamplona
ceflorez@unipamplona.edu.co

Dentro de la historia de la matemática, diversos filósofos han aportado de manera indirecta a la resolución de problemas fundamentales, aunque algunos, como Thomas Hobbes, han pasado desapercibidos en este ámbito. En su obra *De Corpore*, Hobbes abordó el problema de la cuadratura del círculo empleando regla y compás, pero la carencia de herramientas analíticas avanzadas en su tiempo impidió que lograra una solución definitiva validada por sus contemporáneos, como John Wallis. Abordar este problema en la modernidad temprana era un símbolo de gran capacidad intelectual. La ponencia asociada a este documento pretende rescatar dichas argumentaciones históricas e integrarlas en un entorno de Geometría Dinámica, permitiendo que estudiantes de licenciatura en matemáticas interactúen con conceptos históricos a través de la tecnología actual.

HOBBES Y SU SISTEMA FILOSÓFICO

Para comprender el interés de Hobbes en la geometría es necesario revisar su *Elementa philosophiae*, un sistema que abarca desde los principios físicos y geométricos del movimiento en *De Corpore* (Hobbes, 2000) hasta los fundamentos sociales en *De Cive*. La geometría representaba para él la base del conocimiento científico y lógico.

METODOLOGÍA

La investigación se desarrolló en cuatro fases fundamentales bajo el modelo de experimento de enseñanza:

- Fase 1. Diseño del experimento y lectura crítica del capítulo XIX de *De Corpore*, donde se exponen los intentos de solución de Hobbes
- Fase 2. Identificación de fallas en los argumentos originales y diagnóstico del manejo de GeoGebra por parte de los estudiantes.
- Fase 3. Implementación y modelación de los siete corolarios de Hobbes mediante Geometría Dinámica.

Flórez-Pabón, Campo Elías (2026). La cuadratura del círculo desde la propuesta de Hobbes. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 167-168. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Fase 4. Análisis de resultados y retroalimentación sobre los aprendizajes logrados.

Resultados y discusión

Los resultados preliminares muestran que la integración de la historia de la matemática (Flórez-Pabón, 2016) con la tecnología permite a los estudiantes reconocer la importancia de problemas clásicos que, aunque imposibles bajo las normas de la Grecia antigua (regla y compás), encuentran nuevas vías de exploración mediante la modelación dinámica. El experimento permitió evidenciar que el uso de *software* especializado como GeoGebra moviliza el conocimiento disciplinar y pedagógico de los futuros docentes (Sandoval-Cáceres, 2009). Además, se rescató la crítica de Hobbes a las formas tradicionales de conocimiento, lo cual fomenta en los estudiantes una visión integradora y crítica de la ciencia.

Conclusiones

A pesar de encontrarse en la etapa inicial, el trabajo permite aproximarnos a los argumentos dados por Hobbes a comienzos de la modernidad. Frente al uso de GeoGebra y la GD, esta se constituye en un camino diferente para llegar a las proposiciones de postulados importantes en la construcción de una demostración formal de la cuadratura del círculo. Finalmente, podemos afirmar que los problemas clásicos de la historia de la matemática y la filosofía contribuyen de forma didáctica al desarrollo del pensamiento espacial de los futuros profesores de matemática

Referencias

Flórez-Pabón, C. E. (2016). Hobbes e a Matemática. En Anais do XX EBRAPEM. Curitiba: Universidad Federal de Paraná. Disponible en: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wpcontent/uploads/2016/04/gd11_Campo_Pab%C3%B3n.pdf

Hobbes, T. (2000). *El cuerpo. Primera sección de los Elementos de filosofía* (B. Forteza, trad.). Editorial Pre-textos.

Sandoval-Cáceres, I. T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, *21*(1), 5-27.

Modelación matemática y visualización en la optimización de redes: propuesta desde la Educación Matemática Realista

Nicole Melo
Universidad Antonio Nariño
nmelo780@uan.edu.co

En el póster asociado a este documento se presentan los hallazgos derivados de la revisión del estado del arte y la construcción del marco teórico de una investigación enfocada en la optimización de redes en ingeniería de sistemas. El objetivo es fundamentar teóricamente una secuencia didáctica basada en la Educación Matemática Realista (EMR) y la visualización matemática. Se expone la brecha identificada en la literatura sobre la dificultad de los estudiantes para transitar de situaciones reales a modelos formales. Finalmente, se sintetizan los principios de resolución de problemas y optimización que sustentan la toma de decisiones técnicas, estableciendo las bases conceptuales para el diseño de futuras intervenciones pedagógicas.

Estado del arte

La revisión documental de la investigación se centró en el proceso de resolución de problemas de optimización de redes, identificando la modelación matemática en ingeniería como eje fundamental para el análisis y la representación de redes a través de la teoría de grafos. Se analizaron diversas investigaciones que sugieren que la visualización es el eje articulador para comprender la estructura de los grafos antes de la implementación de algoritmos.

Marco teórico

El marco de esta investigación se fundamenta en cuatro ejes fundamentales:

- Resolución de problemas. Se adopta la perspectiva de Mason, Burton y Stacey (2010), enfatizando las fases de Abordaje, Ataque y Revisión, lo que promueve la reflexión del estudiante no solo sobre el resultado final sino también sobre sus propios procesos de pensamiento.

Melo, N. (2026). Modelación matemática y visualización en la optimización de redes: propuesta desde la Educación Matemática Realista. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 27, 169-170. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Modelación matemática. Es un área de la Educación Matemática que facilita el recorrido desde la matemática formal a la realidad, específicamente en la optimización de redes con variables estructurales y relacionales. Según Alsina (2022), la modelación matemática da valor al aprendizaje de la matemática a partir de la práctica de lo discursivo, lo argumentativo y lo de representación múltiple.

- Visualización matemática. A través del tiempo, según distintos autores que han conceptualizado la visualización (*e. g*., Zimmermann y Cunningham, 1991), esta se debe articular con las diferentes formas de representación y modos del pensamiento matemático, lo que desarrolla destrezas para reproducir ideas de manera numérica, gráfica y simbólica.

- Educación Matemática Realista. Este enfoque didáctico tiene como propósito fomentar el aprendizaje de las matemáticas mediante la realización de tareas enfocadas en contextos y situaciones reales, con lo cual se facilita el aprendizaje significativo y profundo de los conceptos (Rosas Pérez *et al*., 2024).

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2022). Educación matemática en contexto: perspectivas socioculturales actuales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *25*(3), 345-362.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* [2.ª ed.]. Pearson Education.

Rosas Pérez, N. I., Vega Mondragón, L. J. y Reyes Rodríguez, A. (2024). Educación matemática realista. *Uno Sapiens Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 1*, *7*(13), 16–20. https://doi.org/10.29057/prepa1.v7i13.12167

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What is mathematical visualization? En *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.