

# MEMORIAS



Encuentro de  
**GEOMETRÍA**  
y sus **APLICACIONES**

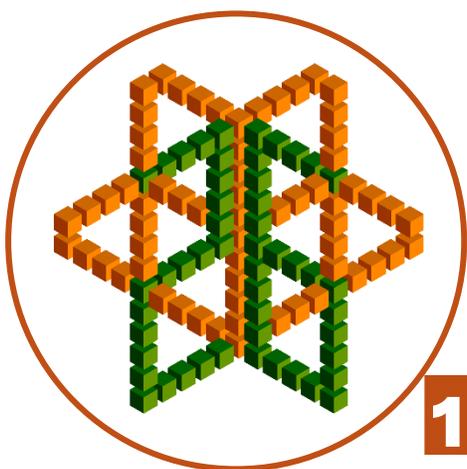
**19 al 21 de junio de 2024**

Organiza



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*





Encuentro de  
**GEOMETRÍA**  
y sus **APLICACIONES**

**19 al 21 de junio de 2024**

Patricia Perry

EDITORA

# ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES, 26

EDICIÓN

**Patricia Perry**

DIAGRAMACIÓN DE PORTADA Y PORTADILLAS

**Óscar Molina**

Universidad Pedagógica Nacional

ISSN: 2346-0539

© 2024 Universidad Pedagógica Nacional

© 2024 Autores

Se autoriza la reproducción total o parcial de algún artículo, previa cita a la fuente:

Perry, P. (ed.) (2024). *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Todos los documentos incluidos en esta publicación se distribuyen bajo la licencia Creative Commons Atribución NoComercial 4.0 Internacional.



Departamento de Matemáticas  
Universidad Pedagógica Nacional  
Calle 72 No. 11 86  
Bogotá, Colombia

## PRESENTACIÓN

En las Memorias del vigésimo sexto Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones se recogen escritos que corresponden a presentaciones hechas en el evento que se llevó a cabo del 19 al 21 de junio de 2024. Algunos de los documentos son de los invitados a participar en el evento. Los demás, son de aquellas personas que culminaron con éxito dos procesos: i) la evaluación de la calidad de su propuesta, realizada por miembros del Comité Académico, que les dio el derecho de presentar una comunicación o un póster en el evento; y ii) la invitación a publicar en las Memorias, y su participación en el proceso de edición del escrito, proceso que culminó favorablemente.

Las presentaciones realizadas (conferencias, cursillos, comunicaciones o pósters) versaron sobre temáticas relativas a: geometría en la educación matemática, geometría e historia, geometría y otras ramas de la matemática, geometría y artes, geometría y tecnología, geometría e inclusión y temas de geometría.

Con esfuerzo, dedicación y también orgullo, llegamos a esta versión del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, cuya trayectoria lo posiciona como uno de los más importantes en el área. Es un evento académico de carácter internacional, que en esta oportunidad fue organizado por la Universidad Pedagógica Nacional. Contó con el auspicio de las siguientes instituciones: Universidad de los Andes, Universidad Sergio Arboleda, Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, y Universidad Antonio Nariño.

El propósito del Encuentro ha sido siempre convocar a matemáticos, educadores matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Esperamos haber contribuido con la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y profesores de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones; el fomento del estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

El selecto grupo de invitados nacionales y extranjeros es garantía del nivel académico del evento y certeza de que este será un espacio de mucho aprendizaje.

Contamos con la presencia de profesores de reconocida trayectoria académica de universidades de otros países, a quienes saludamos: Dra. María Teresa Fernández Blanco de la Universidad Santiago de Compostela (España); Dr. José Luis Rodríguez de la Universidad de Almería (España); Dr. Simon Scott de King's College, London (Inglaterra) y Juan Pablo Mejía-Ramos de Rutgers University (Estados Unidos). Adicionalmente, de forma virtual nos acompañarán la Dra. Ivonne Sandoval de la Universidad Pedagógica Nacional – Cinvestav (México) y la Dra. Gisela Montiel del Cinvestav (México).

A nivel nacional, están invitados a participar, con una conferencia o un cursillo, profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas cuyo trabajo académico ha sobrepasado las fronteras de nuestro país. Estas son: Colombia Aprendiendo, Universidad Antonio Nariño, Universidad de Antioquia, Universidad de los Andes, Universidad de Nariño, Universidad del Tolima, Universidad del Valle, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad Industrial de Santander, Universidad Javeriana, Universidad Konrad Lorenz, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Universidad Sergio Arboleda, Universidad Surcolombiana.

Comité Organizador  
Bogotá, junio de 2024

## ORGANIZACIÓN DEL ENCUENTRO

### COMITÉ ORGANIZADOR

#### **Universidad Pedagógica Nacional**

Claudia Vargas, Carmen Samper, Óscar Molina, Natalia Morales, Alejandro Mendoza

### COMITÉ DE REVISIÓN ACADÉMICA

#### **Universidad de Antioquia**

Carlos Jaramillo, John Durango y Jorge Toro

#### **Universidad de los Andes**

Mikhail Malakhaltsev

#### **Universidad de Nariño**

Óscar Soto

#### **Universidad del Rosario**

Mauro Artigiani

#### **Universidad del Valle**

Luis Carlos Arboleda

#### **Universidad Distrital Francisco José de Caldas**

Claudia Castro y Olga León

#### **Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito**

Alicia Guzmán, Carlos Álvarez y Nora Rojas

#### **Universidad Industrial de Santander**

Jenny Acevedo y Luis Pérez

#### **Universidad Javeriana**

Iván Castro

#### **Universidad Nacional de Colombia**

John Cruz, José Ramírez y Reinaldo Montañez

## **Universidad Nacional de Tierra del Fuego**

Carlos Pérez

## **Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)**

Alberto Donado, Alejandro Mendoza, Alejandro Sánchez, Armando Echeverry, Benjamín Sarmiento, Camilo Sua, Carmen Samper, César Rendón, Claudia Vargas, Diego Guerrero, Édgar Guacaneme, Elizabeth Torres, Felipe Fernández, Jeannette Vargas, Leonardo Ángel, Leonor Camargo, Luis Romero, Lyda Mora, Myriam Rodríguez, Natalia Morales, Orlando Aya, Óscar Molina y Tania Plazas

## **Universidad Pedagógica Nacional (México)**

Ivonne Sandoval

## **Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia**

Clara Rojas

## **Universidad Sergio Arboleda**

Juan Ávila y Margot Salas

## **APOYO ADMINISTRATIVO**

Instituto Pedagógico Nacional, Oficina de Relaciones Interinstitucionales Universidad Pedagógica Nacional

## **ENTIDADES AUSPICIADORAS**

Universidad de los Andes, Universidad Sergio Arboleda, Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, Universidad Antonio Nariño

## **ENTIDADES PATROCINADORAS**

Colegio Reyes Católicos, Belpapel Ltda., Dinissan

## TABLA DE CONTENIDO

### CONFERENCIAS

Shea Zellweger (1925-2022): creador del alfabeto lógico	3
<i>Oostra, A.</i>	
Una estrategia didáctica para abordar la multiplicación de números reales	9
<i>Rubio, M. y Fernández, F.</i>	
Espacios de Banach y la ley del paralelogramo	23
<i>Salas-Brown, M.</i>	
¿Una recta sin puntos? Una perspectiva alternativa de la geometría y el análisis	35
<i>Vargas, F.</i>	

### CURSILLOS

Rompecabezas: un problema de construcción para entrenar el razonamiento deductivo	51
<i>Garzón, M.</i>	
Espacio y trayectorias: oportunidades para comprender la diversidad en educación matemática	59
<i>León, O., Devia, A., Muñoz, W., Niño, P. y Páez, J.</i>	
Geometrías asociadas a algunos sistemas de control	71
<i>Martínez, N.</i>	
Modelación geométrica y la resolución de problemas para la enseñanza de la geometría	81
<i>Rojas, O. y Fonseca, L.</i>	

### COMUNICACIONES

¿Heurísticas –sintética y analítica– en la solución de un problema en geometría?	99
<i>Acosta, C., Páez, F. y Guacaneme, É.</i>	

El poder de mis manos, una experiencia multisensorial con la geometría <i>Aldana, S., Rodríguez, S. y Plazas, T.</i>	107
Descifrando patrones: geometría computacional como llave para el aprendizaje automático <i>Avilán, N.</i>	115
Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la transformación rotación y la construcción del diseño de una mandala <i>Berrío, A. y Vila, H.</i>	123
Uso de hechos geométricos para resolver un problema de tangencia <i>Caicedo, S., Pérez, L. y Fiallo, J.</i>	131
Comunidad de práctica de profesores de primaria: mecanismo para construir significado sobre el proceso de argumentación en geometría <i>Corredor, D. y Molina, Ó.</i>	139
Caracterización del conocimiento matemático de los profesores en formación inicial sobre definiciones de polígonos <i>Fonseca, J. y Guillén, H.</i>	147
¿Es la geometría hiperbólica consistente? <i>Guevara, J. y Rodríguez, H.</i>	155
El plano surd: una alternativa algebraica para demostrar la imposibilidad de construcción de los tres problemas de las matemáticas griegas <i>Guevara, J., Rodríguez, H. y Mina, J.</i>	163
Teorema de Desargues: un análisis histórico y epistemológico a través de sus demostraciones <i>Herrera, H.</i>	171
Tipo de contenido de regresión lineal simple ofrecido en pregrado vs. el demandado en investigación, el caso geométrico <i>Jiménez, M. y Muñoz, W.</i>	179
Material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas <i>Linares, A., Pinzón, L. y Mora, L.</i>	187

Tres recursos didácticos para promover la argumentación inductiva en secundaria <i>López, Z. y Camargo, L.</i>	195
Conexiones etnomatemáticas: una mirada desde el apuntalamiento de una cerca <i>Natera, Á., González, D. y Aroca, A.</i>	203
Avance en la implementación de una estrategia de gamificación para la enseñanza de la ecuación de la circunferencia <i>Navarro, R. y Ramírez, D.</i>	209
Avances en la caracterización del pensamiento visual en el contexto de un curso inicial en educación superior <i>Sánchez, Á</i>	217
Especialización de los argumentos de estudiantes de grado décimo al usar GeoGebra en tareas de razones trigonométricas <i>Varela, J., Ávila, C. y Vargas, C.</i>	225
<b>PÓSTER</b>	
Propuesta didáctica aplicada en el colegio Nuestra Señora del Rosario de Cali para la integración de la geometría y el arte en la enseñanza <i>Cruz, A, Olave, D. y Madroñero, M.</i>	235





Encuentro de  
**GEOMETRÍA**  
y sus APLICACIONES

**19 al 21 de junio de 2024**

**Conferencias**





## SHEA ZELLWEGER (1925-2022): CREADOR DEL ALFABETO LÓGICO

**Arnold Oostra**

*Universidad del Tolima*

[noostra@ut.edu.co](mailto:noostra@ut.edu.co), [aaoostra@gmail.com](mailto:aaoostra@gmail.com)

La lógica proposicional clásica tiene 16 conectivos binarios, como se observa al definirlos mediante su tabla de verdad. El norteamericano Shea Zellweger inventó una notación completa para este conjunto, llamada alfabeto lógico, en la que la tabla de cada conectivo está asociada de forma natural a su signo. Además de estudiar muchas propiedades lógicas, algebraicas y didácticas de su sistema de signos, a lo largo de su vida Zellweger construyó modelos en diferentes dimensiones que explicitan muchas simetrías sorprendentes escondidas en la lógica elemental.

### SHEA ZELLWEGER

Si algún académico contemporáneo merece el adjetivo de transdisciplinar ese es, sin duda alguna, Shea Zellweger. A lo largo de su carrera actuó en los campos de la semiótica, la sicología, la pedagogía y la lógica matemática. Fue un creador de signos inteligentes, quien además acuñó expresiones como *semiótica matelógica* y *proceso inter-intra semiótico doble*. Los fantásticos títulos de muchos de sus trabajos atestiguan ese carácter transversal (Zellweger, 1991; Clark y Zellweger, 1993; Zellweger, 1993, 1997a, 1997b, 2003; Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2016).

Shea Zellweger nació en Chicago el 7 de septiembre de 1925. En su juventud sirvió en el ejército de los Estados Unidos bajo órdenes del general MacArthur, en la reconstrucción de Japón después de la Segunda Guerra Mundial. Obtuvo su título de pregrado (*Bachelor of Arts*), en 1952, de la Universidad de Chicago y luego su doctorado en Sicología Experimental en la Universidad Temple, en Filadelfia. Fue profesor de la Universidad Acadia en Nueva Escocia, Canadá, y de la Universidad Purdue en Indianápolis, Estados Unidos. Desde 1969 hasta 1993 fue profesor y director del Departamento de Sicología de Mount Union College, hoy Universidad de Mount Union, en Alliance, Ohio, donde después vivió un fructífero retiro. Shea Zellweger murió el 7 de agosto de 2022, un mes antes de cumplir 97 años.

Oostra, A. (2024). Shea Zellweger (1925-2022): creador del alfabeto lógico. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 3-7. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## NOTACIONES PARA LOS CONECTIVOS BINARIOS

En la lógica proposicional, un conector binario es una partícula que permite combinar dos proposiciones para obtener una nueva. De manera más técnica, entonces, se trata de una función u operación binaria en el conjunto de las fórmulas. En el caso de la lógica clásica bivalente, un conector se puede representar completamente como una operación binaria en un conjunto con dos elementos, que representan los valores de verdad. Un conteo sencillo muestra que hay 16 de tales funciones, si bien algunas de ellas solo dependen de una de las variables e incluso hay 2 constantes.

En las presentaciones usuales de la lógica solo se consideran 4 conectivos, a saber: conjunción, disyunción, implicación y equivalencia. En cierta forma esto es suficiente porque, junto con la negación, ellos permiten determinar todos los posibles conectivos, incluso los de 3, 4 y más argumentos. Sin embargo, es extraño que los demás conectivos reciben poca atención y algunos de ellos nunca se distinguen con un signo en particular. Por otro lado, los signos usuales no guardan una relación directa con el significado o la definición del conector.

A lo largo del siglo XX, diferentes lógicos y matemáticos propusieron notaciones alternativas para los conectivos proposicionales binarios. Entre ellas se destacan la notación de Charles S. Peirce (García, Gómez y Oostra, 2001; Oostra, 2003, 2004), la notación polaca y la notación de Carlo Federici.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$VV$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$VF$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$FV$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$FF$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
	□	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻
	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	μ	rd	y	x

Figura 1: alfabeto lógico de Shea Zellweger

En 1961, trabajando como ascensorista, a Shea Zellweger se le ocurrió la idea para su obra maestra y proyecto de vida: el *alfabeto lógico*. En la primera etapa, partiendo del plano cartesiano y asociando  $V$  con los valores positivos y  $F$  con los negativos, construye un cuadrado con las cuatro combinaciones  $VV$ ,  $VF$ ,  $FV$

y  $FF$  en sus vértices. En tal cuadrado, marca con un punto grueso cada vértice correspondiente a una combinación de valores de verdad a la cual el conector le asigna  $V$ . En la segunda etapa, a estas figuras intermedias les asocia letras minúsculas del alfabeto occidental que tienen extremidades en la dirección de los vértices marcados. Solo hay que añadir tres letras inexistentes en el alfabeto usual para obtener el sistema de signos para los conectivos proposicionales que Zellweger creó y bautizó *alfabeto lógico*. La figura 1 muestra esta notación.

Dado que, durante las décadas de 1970 y 1980, todas las revistas matemáticas a donde envió sus trabajos rechazaron sistemáticamente la publicación de los mismos, Zellweger optó por obtener patentes para su notación en Estados Unidos, Canadá y Japón. Por fin, en la última década del siglo XX, logró sus primeras publicaciones académicas (Zellweger, 1991; Clark y Zellweger, 1993; Zellweger, 1993, 1997a, 1997b). A lo largo de todos estos años Zellweger sí logró establecer contacto directo con notables matemáticos, entre los que se destacan Donald Coxeter y René Thom.

## PROPIEDADES Y COMPARATIVA

El alfabeto lógico goza de muchas características notables. Además de ser una notación para todos los conectivos proposicionales binarios, los movimientos rígidos de los símbolos corresponden a operaciones lógicas; por ejemplo, negar el primer argumento corresponde a reflejar el signo en el eje vertical. Así, esta notación revela de manera natural una enorme cantidad de simetrías presentes en la lógica proposicional clásica que difícilmente se pueden observar con otras notaciones (Granados y Aya, 2010). Por otra parte, el alfabeto lógico sugiere propiedades algebraicas de los conectivos y, a partir de ellas, Zellweger propuso una forma novedosa de calcular los valores de verdad de cualquier fórmula proposicional, sin necesidad de calcular las tablas de manera explícita (Cardona, 2010).

Por diversas razones se puede considerar que el alfabeto lógico es superior a todas las demás notaciones para los conectivos proposicionales binarios. Esta simbología es completa para el sistema de conectivos y cada signo corresponde de manera precisa a la tabla de verdad del respectivo conector. Con otras notaciones, como la de Peirce, que tienen las características mencionadas, el alfabeto lógico comparte toda la simetría de aquellas. Aun en la clasificación topológica de los signos propuesta en el *Seminario permanente Peirce* de la Universidad del Tolima, en 2023, el alfabeto lógico se catalogó como una de

las mejores notaciones simétricas. Por fin, una ventaja adicional sobre todas las otras notaciones de este tipo –excepto la polaca, que no tiene simetría alguna– es que los símbolos usados tienen nombres propios y, en consecuencia, se pueden mencionar.

## MODELOS

A lo largo de su vida, Zellweger concibió múltiples diseños simétricos con los 16 signos del alfabeto lógico, que a su vez muestran las simetrías de la lógica proposicional que esta notación revela. Resultaron diseños lineales, planos, espaciales y aun en 4 y más dimensiones, algunos de los cuales se pueden ver en la figura 2 extraída de (Clark y Zellweger, 1993).

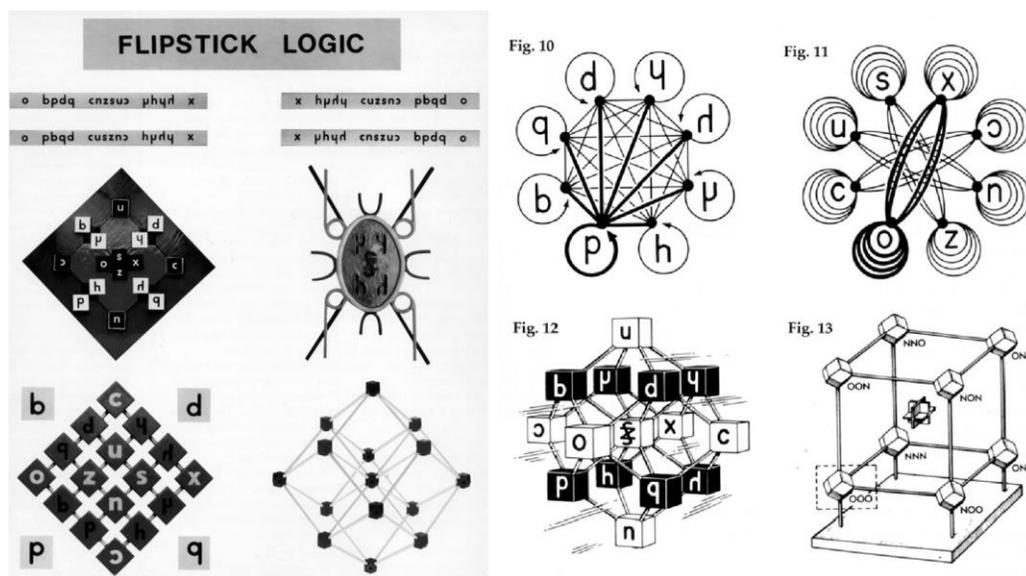


Figura 2: diseños simétricos del alfabeto lógico (Clark y Zellweger, 1993)

Más allá de tales diseños dibujados en papel, el mismo Zellweger construyó modelos físicos para sus bocetos en dimensiones 1, 2 y 3. La mayoría de estas piezas se conservan en un museo en Los Ángeles, California, mientras otras fueron distribuidas entre sus conocidos. Incluso algunos modelos elaborados por Zellweger están en Colombia.

El estudio y la divulgación de las propiedades maravillosas del alfabeto lógico es el mejor tributo que se puede brindar a la sobresaliente vida de su creador, el magnífico Shea Zellweger.

## REFERENCIAS

- Cardona, Ó. A. (2010). *Álgebra en el alfabeto lógico de Zellweger*. Trabajo de Especialización en Matemáticas Avanzadas, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.
- Clark, G. y Zellweger, S. (1993). Let the mirrors do the thinking. *Mount Union Magazine*, 93, 2-5.
- García, M., Gómez, J. F. y Oostra, A. (2001). Simetría y lógica: la notación de Peirce para los 16 conectivos binarios. En *Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 1-26) Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Granados, L. y Aya, N. R. (2010). *Acerca de la geometría del alfabeto lógico de Shea Zellweger*. Trabajo de grado de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.
- Oostra, A. (2003). Simetría en algunas tablas de C. S. Peirce. En *Memorias del XIV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 1-49). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Oostra, A. (2004). La notación diagramática de C. S. Peirce para los conectivos proposicionales binarios. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 28(106), 57-70.
- Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2016). Classroom mathematical activity when it is seen as an inter-intra double semiotic process of interpretation: A Peircean perspective. En A. Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts* (pp. 43-66). Rotterdam: SensePublishers.
- Zellweger, S. (1991). Peirce, iconicity, and the geometry of logic. En M. Anderson y F. Merrell (eds.), *On semiotic modeling* (pp. 483-507). New York: Mouton de Gruyter.
- Zellweger, S. (1993). Cognitive frames, cognitive overload, and mind-held diagrams in logic. En J. Deeley y T. Prewitt (eds.), *Semiotics 1991* (pp. 35-45). New York: University Press of America.
- Zellweger, S. (1997a). On a deep correspondence between sign-creation in logic and symmetry in crystallography. En I. Rauch y G. F. Carr (eds.), *Semiotics around the world: Synthesis in diversity* (pp. 821-824). New York: Mouton de Gruyter.
- Zellweger, S. (1997b). Untapped potential in Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives. En N. Houser, D. D. Roberts y J. van Evra (eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 334-386). Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.
- Zellweger, S. (2003). Mathelological semiotics: A lesson in constructing a shape-value notation for elementary logic. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 285-356). Toronto: Legas.



# UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA ABORDAR LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

**Marcela Rubio y Fernando Fernández**

*Universidad Nacional de Colombia, SED Cundinamarca*

[imrubiop@unal.edu.co](mailto:imrubiop@unal.edu.co), [fermat0731@gmail.com](mailto:fermat0731@gmail.com)

El tema de homotecias se ha incluido en el programa de matemáticas de grado séptimo y usualmente se aborda de manera muy superficial, como transformaciones en el plano. La idea de este artículo es mostrar cómo se puede aprovechar el isomorfismo entre el grupo multiplicativo de los números reales y el de homotecias del mismo centro bajo composición, para ilustrar y evidenciar las propiedades de la multiplicación de los números reales. Las homotecias pueden ser usadas como una herramienta pedagógica pertinente y motivante para estudiar la multiplicación de los números reales y sus propiedades.

## INTRODUCCIÓN

En la matemática escolar, desde los primeros grados, se desarrolla el pensamiento espacial, se estudian las figuras, sus relaciones y propiedades geométricas y métricas, que están ligadas con el uso y manejo de los números. Un ejemplo de estas relaciones entre figuras es la semejanza, relación que conserva forma, e involucra razones y proporciones numéricas.

Es usual en el aula que en la enseñanza de las propiedades de la multiplicación se utilicen ejemplos de que estas propiedades se cumplen en los diferentes conjuntos numéricos, pero no se justifican. La gran mayoría de las veces se enuncian las propiedades y se ilustran con una serie de ejemplos, pero a muchos estudiantes se les dificulta entender dichas propiedades.

Es de gran ayuda para los estudiantes ilustrar las propiedades de la multiplicación mediante el uso de relaciones geométricas que permitan evidenciarlas y a la vez entenderlas. En este escrito se presenta una propuesta, donde una forma de evidenciar las propiedades de la multiplicación de números reales es a través del trabajo con las homotecias, en particular las homotecias con un centro fijo.

Esta propuesta se encuentra en el mismo espíritu de trabajos como “Ilustración de algunas relaciones existentes entre las propiedades geométricas del plano y

las propiedades y operaciones de los números reales” (Rivera, 2011) y “Definición geométrica de la multiplicación de reales utilizando homotecias” (Peña, 2011), los cuales presentan una definición geométrica de la multiplicación de números reales que permite poner en evidencia sus propiedades, aunque no presentan ideas concretas que orienten el trabajo pedagógico y didáctico en el aula.

En Fernández (2018) se encuentran el diseño y los resultados de la implementación de una propuesta didáctica que aborda la dirección mencionada y que se desarrolló con estudiantes de grado octavo, aprovechando que en grado séptimo se trabajaron las transformaciones en el plano. Es importante resaltar que desde la básica primaria se introducen los conceptos de semejanza, razón, proporcionalidad y las propiedades de las operaciones en diferentes conjuntos numéricos y el trabajo con las homotecias permite dar un sentido más dinámico a todos estos conceptos. A través de esta propuesta se enriquecen temas y procesos de los diferentes pensamientos, como se plantea en la siguiente cita del Ministerio de Educación Nacional.

Cada conjunto de recursos, puestos en escena a través de una situación de aprendizaje significativo y comprensivo, permite recrear ciertos elementos estructurales de los conceptos y de los procedimientos que se proponen para que los estudiantes los aprendan y ejerciten y, así, esa situación ayuda a profundizar y consolidar los distintos procesos generales y los distintos tipos de pensamiento matemático. En este sentido, a través de las situaciones, los recursos se hacen mediadores eficaces en la apropiación de conceptos y procedimientos básicos de las matemáticas y en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos. (MEN, 2006)

La propuesta de abordar la multiplicación de números reales desde el trabajo con las homotecias de igual centro, además de ilustrar las propiedades básicas de la multiplicación, facilita la comprensión de diversas nociones como las leyes de los signos, proporcionalidad y semejanza, estudio de diferentes transformaciones en el plano, entre muchas otras, facilitando su comprensión y apropiación. Por otra parte, la interacción entre las áreas de la geometría y la aritmética proporcionan una experiencia integradora dentro de las matemáticas.

## HOMOTECIAS

En esta sección se hace una breve presentación de las homotecias como transformaciones del plano y sus principales propiedades, tomando como referencia la exposición que Georges Papy hace de este tema en Papy (1968).

Definición 1. Una transformación del plano  $\Pi$ , es toda función  $f$  que hace corresponder a cada punto  $A$  de  $\Pi$  exactamente un punto  $A^0$  de  $\Pi$ .  $f: \Pi \rightarrow \Pi$ . Dado  $X \in \Pi$ , decimos que  $X$  es un punto fijo de  $f$  si y solo si  $f(X) = X$  (véase figura 1).

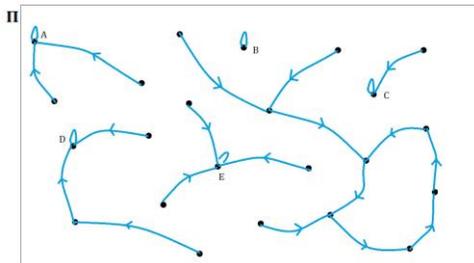


Figura 1: transformación  $f: \Pi \rightarrow \Pi$ .  $A, B, C, D$  y  $E$  son puntos fijos de  $f$

Algunas transformaciones especiales son:

- La transformación  $f$  tal que  $f(X) = X$ , para todo  $X$  de  $\Pi$ , recibe el nombre de transformación idéntica y se nota  $1_{\Pi}$ .
- La transformación  $g$  tal que  $g(X) = C$ , para todo  $X$  de  $\Pi$ , recibe el nombre de transformación constante a  $C$ .

Definición 2. Para cada punto  $C$  del plano  $\Pi$ , una homotecia de centro  $C$  es una transformación  $h: \Pi \rightarrow \Pi$  determinada por las flechas  $(C, h(C) = C)$  que llamamos bucle y  $(P, h(P))$ , donde  $C, P$  y  $h(P)$  son colineales (véase figura 2).

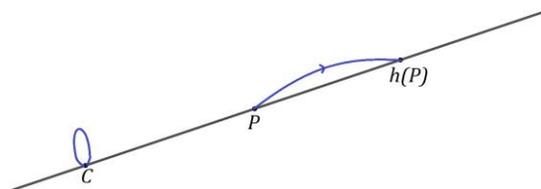


Figura 2: definición de homotecia  $h$  de centro  $C$

De modo que para hallar la imagen  $h(X)$  de un punto  $X$  de  $\Pi$  por la homotecia  $h$  se procede de la siguiente manera.

Caso I. Si  $X$  no pertenece a la recta  $CP$  (véase figura 3):

- (1) se traza la recta  $CX$ ,
- (2) se traza la recta  $PX$ ,
- (3) se traza una recta  $m$  por  $h(P)$  tal que  $m$  y la recta  $PX$  sean paralelas, luego, la imagen  $h(X)$  es el punto de intersección de las rectas  $m$  y  $CX$

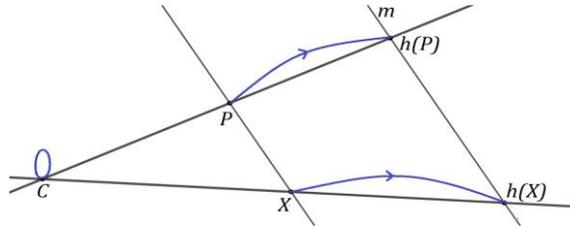


Figura 3: imagen  $h(X)$  por la homotecia  $h$  (caso I)

Caso II. Si  $X$  pertenece a la recta  $CP$  (véase figura 4):

- (1) se busca  $h(E)$  para un punto arbitrario  $E$  que no pertenece a la recta  $CP$ , como se describió en I,
- (2) con  $(C, C)$  y  $(E, h(E))$  se busca la imagen de  $X$ , como se describió en caso I.

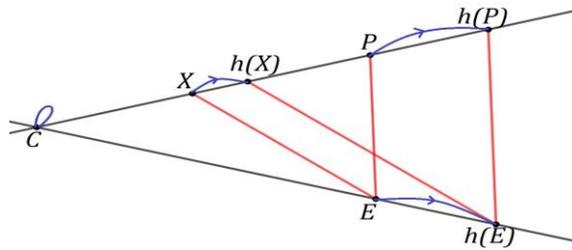


Figura 4: imagen  $h(X)$  por la homotecia  $h$  (caso II)

Observación: en la figura 5 se puede ver que la construcción no depende del punto  $E$  escogido.

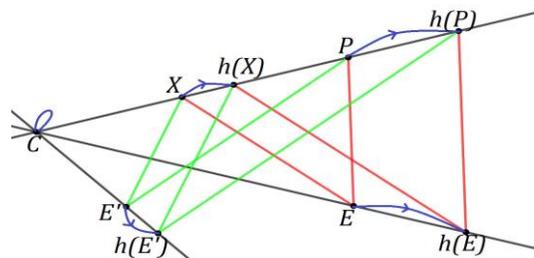


Figura 5: homotecia  $h$

Ejemplo 1. La imagen de una recta por una homotecia es una recta. Sean los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  que pertenecen a la recta  $m$  y la homotecia  $h$  de centro  $C$  determinada por las flechas  $(C, C)$  y  $(P, h(P) = P)$  (véase figura 6).

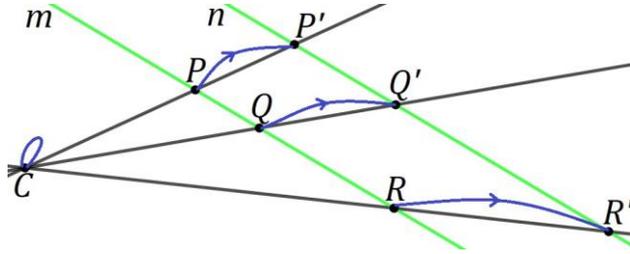


Figura 6: imagen de una recta por una homotecia

Si se determinan las imágenes de todos los puntos que están en la recta  $m$  por la homotecia  $h$ , estas quedan en la recta  $n$ .

Ejemplo 2. Sea la imagen de un triángulo de vértices  $P$ ,  $T$  y  $R$  por una homotecia  $h$  de centro  $C$ , tal que  $h(P) = Q$ . En la figura 7, se puede observar que las rectas  $PQ$ ,  $RS$  y  $TU$  son concurrentes en  $C$ , la imagen del triángulo  $PTR$  es el triángulo  $QUS$  y estos dos triángulos tienen los lados correspondientes paralelos. Observamos una ampliación del triángulo original.

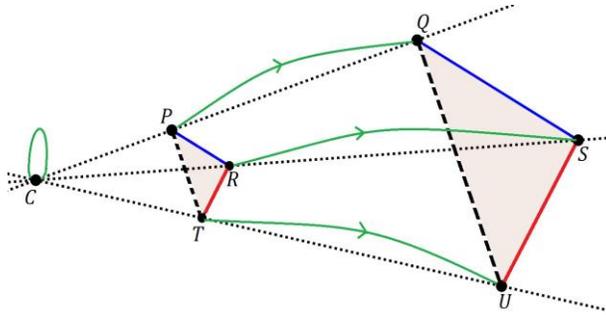


Figura 7: imagen de un triángulo por  $h$

Observación: si los puntos  $C$ ,  $P$  y  $Q$  son colineales tales que  $C$  y  $P$  son distintos, entonces existe una y solo una homotecia  $h$  de centro  $C$  tal que  $h(P) = Q$ .

## Homotecias particulares

Se consideran dos casos de homotecias particulares.

Caso I. Sea  $h$  una homotecia de centro  $C$ , determinada por las flechas  $(C, C)$  y  $(P, P)$ , es decir,  $h(P) = P$ . Se obtiene que todas las flechas de la homotecia son bucles, todos los puntos de  $\Pi$  quedan fijos. Esta homotecia es la transformación identidad,  $h = 1_{\Pi}$ .

Caso II. Sea  $g$  una homotecia de centro  $C$ , determinada por las flechas  $(C, C)$  y  $(P, C)$ , es decir,  $g(P) = C$ . Al construir otras flechas de esta homotecia se observa que todas las flechas llegan al centro de la homotecia (véase figura 8);  $g$  es la homotecia constante a  $C$ .

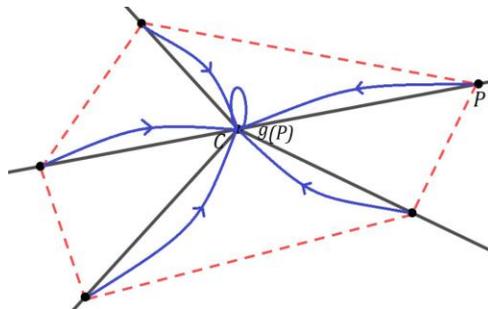


Figura 8: homotecia constante a  $C$

Observación: el centro de toda homotecia no idéntica es su único punto fijo.

### Homotecias no constantes

Sea  $h$  una homotecia no constante de centro  $C$ ,  $P$  un punto diferente de  $C$  y  $h(P) = Q$ . Como la homotecia  $h$  no es constante, entonces  $C$  y  $Q$  son distintos.

Si  $Q = P$ , entonces  $h = 1_{\Pi}$ , la homotecia identidad.

Si  $Q$  y  $P$  son distintos, entonces  $h$  es una homotecia no constante, que no es la identidad. Por ejemplo, la que se presenta en la figura 9.

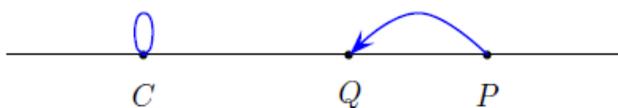


Figura 9: homotecia  $h$  no constante

### COMPOSICIÓN DE HOMOTECIAS DE IGUAL CENTRO

Definición 3. Si  $f$  y  $h$  son homotecias de centro  $C$ , llamamos composición de  $f$  y  $h$  a la transformación que se nota  $f \circ h$  y actúa sobre cada punto  $X$  de la siguiente manera:

$$(f \circ h)(X) = f(h(X)),$$

es decir, primero se busca la imagen de  $X$  por  $h : h(X)$ , y luego se busca la imagen de  $h(X)$  por  $f : f(h(X))$ .

Dadas dos homotecias  $f$  y  $h$  de centro  $C$ , para hallar  $f \circ h$  surgen dos casos:

Caso I. Alguna de las homotecias es constante. Si  $h$  es constante, es decir,  $h(P) = C$  para cada punto  $P$  del plano (véase figura 10,  $f$  verde y  $h$  roja).

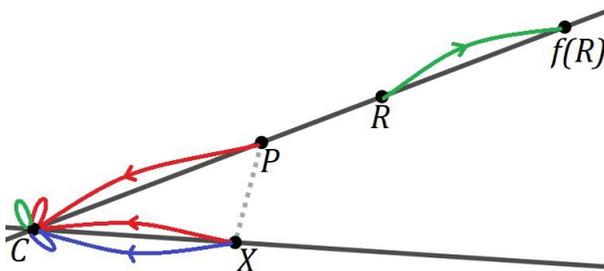


Figura 10:  $f \circ h$ , con  $h$  constante

$h(X) = C$ , luego  $f(h(X)) = f(C) = C$ , es decir,  $(f \circ h)(X) = C$  para cada punto  $X$  del plano, por lo tanto  $f \circ h = h$ .

Si  $f$  es constante, es decir,  $f(R) = C$  para cada punto  $R$  del plano (véase figura 11,  $f$  verde y  $h$  roja).

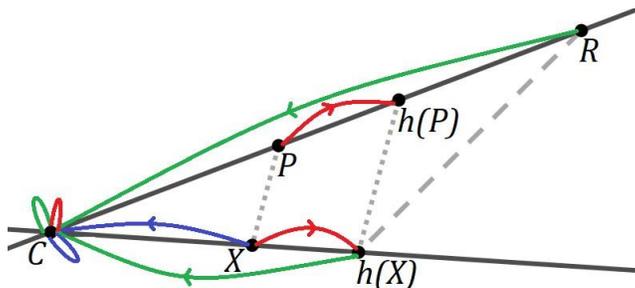


Figura 11:  $f \circ h$ , con  $f$  constante

La imagen de  $X$  por  $h$  es  $h(X)$ , luego  $f(h(X)) = C$ , es decir,  $(f \circ h)(X) = C$  para cada punto  $X$  del plano, por lo tanto  $f \circ h = f$ .

Conclusión: Si  $f$  y  $h$  son homotecias de centro  $C$  y alguna de ellas es constante a  $C$ , entonces  $f \circ h$  es la homotecia constante a  $C$ .

Caso II.  $f$  (en verde) y  $h$  (en rojo) son homotecias no constantes (véase figura 12).

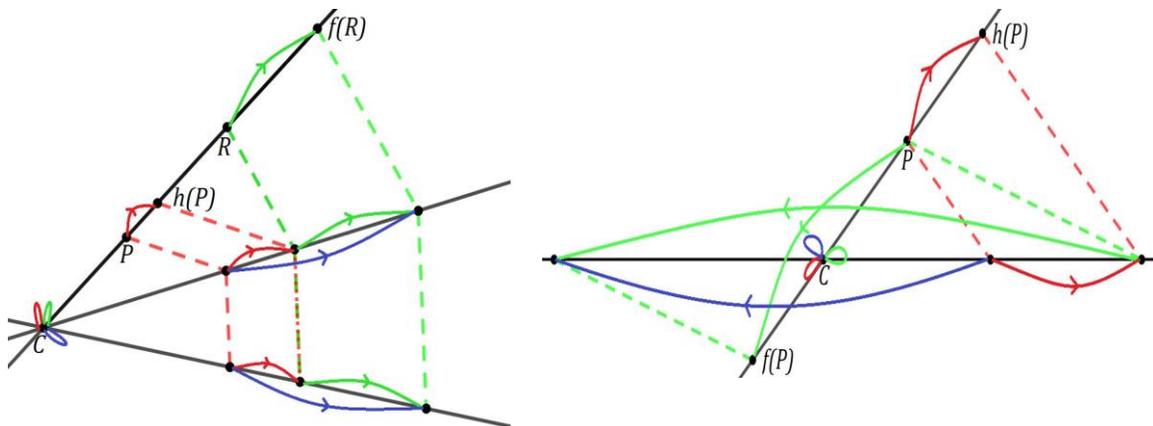


Figura 12: ejemplos de  $f \circ h$ , con  $f$  y  $h$  no constantes

Conclusión: Si  $f$  y  $h$  son homotecias de centro  $C$ , entonces  $f \circ h$  es una homotecia de centro  $C$ . Además, se tienen las siguientes observaciones:

- Si  $f$  y  $h$  son homotecias de centro  $C$ , entonces  $f \circ h$  es constante si y solo si alguna de ellas es constante.
- La compuesta de dos homotecias no constantes de centro  $C$  es una homotecia no constante de centro  $C$ .
- La composición de homotecias de centro  $C$  es asociativa. Si  $f$ ,  $g$  y  $h$  son homotecias de centro  $C$ , entonces  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ . Basta notar que para cada punto  $X$  en  $\Pi$  se tiene:

$$((f \circ g) \circ h)(X) = (f \circ g)(h(X)) = f(g(h(X))) \text{ y}$$

$$(f \circ (g \circ h))(X) = f((g \circ h)(X)) = f(g(h(X))).$$

- La composición de homotecias de centro  $C$  es conmutativa. Si  $f$  y  $h$  son homotecias de centro  $C$ , entonces  $f \circ h = h \circ f$ . Se puede ver un ejemplo en la figura 13 para las homotecias de centro  $C$ ,  $f$  (en rojo) y  $h$  (en verde).

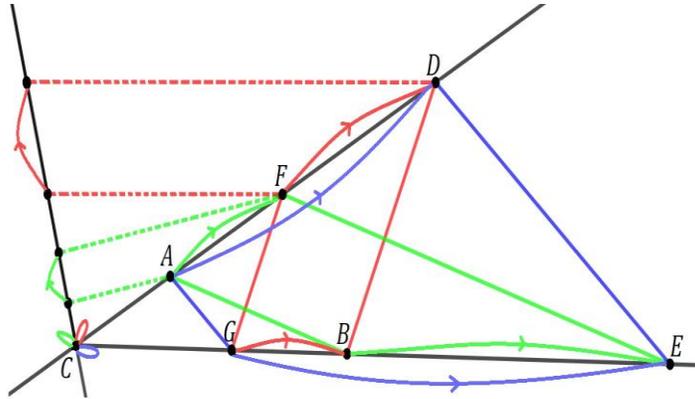


Figura 13: conmutatividad de la composición:  $f \circ h = h \circ f$

- $1_{\Pi}$  es el elemento identidad en la composición de homotecias de centro  $C$ . Para toda homotecia  $h$  de centro  $C$ , se tiene  $1_{\Pi} \circ h = h = h \circ 1_{\Pi}$ . Note que si  $X$  es un punto en  $\Pi$ , entonces

$$(h \circ 1_{\Pi})(X) = (1_{\Pi} \circ h)(X) = 1_{\Pi}(h(X)) = h(X).$$

- Si  $h$  es una homotecia no constante de centro  $C$ , entonces  $h^{-1}$  es una homotecia no constante de centro  $C$  y  $h^{-1} \circ h = 1_{\Pi} = h \circ h^{-1}$  (véase figura 14).

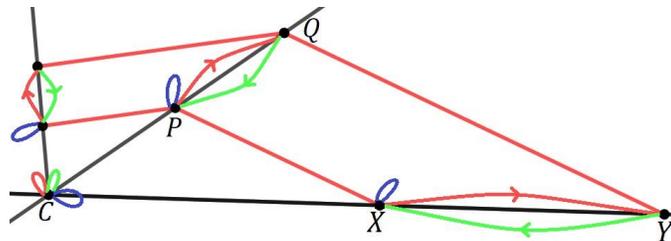


Figura 14: homotecias inversas

Conclusión: Si notamos  $H_C$  al conjunto de homotecias no constantes de centro  $C$ , del trabajo ya realizado se obtiene que  $H_C$  es un grupo abeliano bajo la composición, es decir  $(H_C, \circ)$  es un grupo abeliano.

## HOMOTECIAS Y PRODUCTO DE NÚMEROS REALES

Sea  $l$  la recta que pasa por los puntos distintos  $C$  y  $U$  de  $\Pi$ . Sabemos que se puede establecer una biyección entre los puntos de una recta y el conjunto de números reales, llamemos  $a$  a la biyección de  $l$  en el conjunto de los números reales tal que  $a(C) = 0$  y  $a(U) = 1$ , es decir, 0 es la abscisa de  $C$  y 1 es la abscisa de  $U$ . Así, a cada punto de  $l$  le corresponde un único número real y viceversa (véase figura 15).

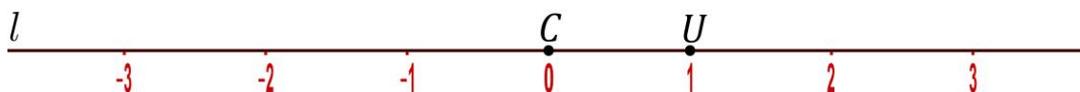


Figura 15: recta graduada

Definición 4. Para cada homotecia  $h$  de centro  $C$ , tal que  $h(U) = A$ , donde  $a(C) = 0$  y  $a(U) = 1$ , diremos que la razón de  $h$  es la abscisa de  $A$  y lo notaremos  $r(h) = a(A)$ .

Ejemplo 3. Para determinar la razón de la homotecia  $h$  de centro  $C$  que se observa en la figura 16, note que  $a(C) = 0$  y  $a(U) = 1$ , donde  $h(U) = A$ . Así, como  $a(A) = 3$ , entonces  $r(h) = 3$ .

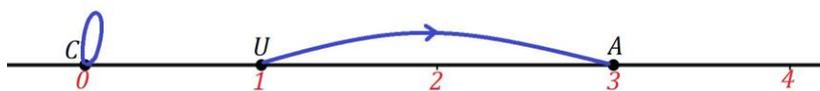


Figura 16: razón de  $h$

Ejemplo 4. Sea  $g$  una homotecia de centro  $C$ , tal que  $g(P) = Q$ , como se observa en la figura 17. Al construir la imagen de  $U$  por la homotecia  $g$  se obtiene  $a(g(U)) = -2$ , por lo tanto  $r(g) = -2$ .

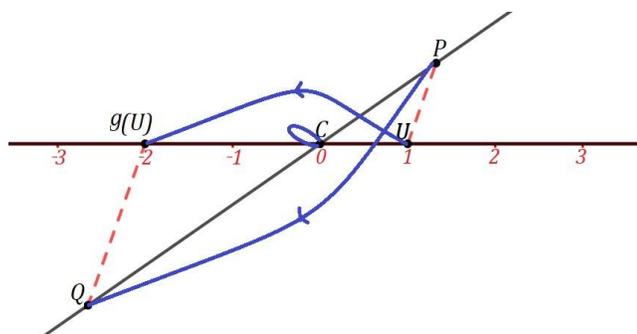


Figura 17: razón de  $g$

Observación: la función razón  $r$  es una biyección entre el conjunto de homotecias no constantes de centro  $C$ :  $H_C$  y el conjunto de los números reales diferentes de 0.

A continuación, se presenta la relación que tiene la razón de una homotecia con respecto a las abscisas de otros puntos de la recta.

Ejemplo 5. Sea  $k$  una homotecia de centro  $C$  tal que  $r(k) = 3$ , como se presenta en la figura 18. Se observa que  $a(E) = -1$  y  $a(F) = 4$  luego, al determinar las

imágenes de los puntos  $E$  y  $F$  por la homotecia  $k$  se obtiene que  $a(k(E)) = -3$  y  $a(k(F)) = 12$ .

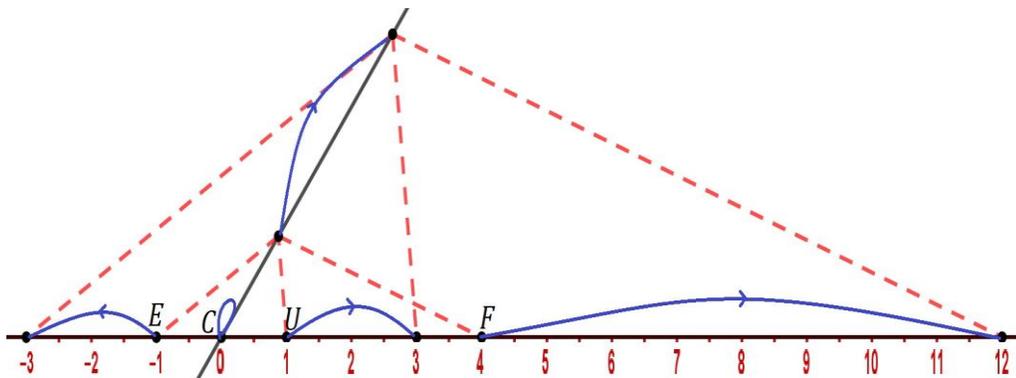


Figura 18:  $r(k) = 3$

Ejemplo 6. Sea  $j$  una homotecia de centro  $C$ , tal que  $r(j) = -\frac{3}{2}$  como se presenta en la figura 19. Se observa que  $a(M) = -6$ ,  $a(N) = -2$  y  $a(P) = 5$ , luego al determinar las imágenes de los puntos  $M$ ,  $N$  y  $P$  por la homotecia  $j$  se obtiene que  $a(j(M)) = 9$ ,  $a(j(N)) = 3$  y  $a(j(P)) = -\frac{15}{2}$ .

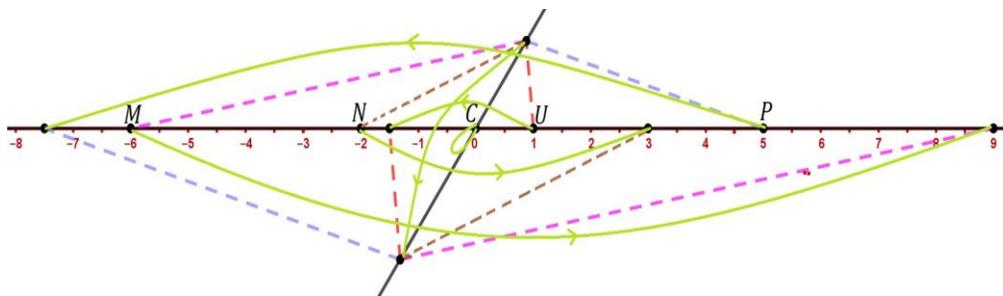


Figura 19: razón  $-\frac{3}{2}$

De los ejemplos anteriores se puede observar que la razón de una homotecia multiplica las abscisas de los puntos, es decir, si  $h$  es una homotecia de centro  $C$  con razón  $r$  y  $X$  un punto de la recta  $l$  (recta graduada), entonces se tiene que  $a(h(X)) = r \cdot a(X)$ .

En los ejemplos que presentamos a continuación se estudia la relación que hay entre las razones de dos homotecias y la de su compuesta.

Ejemplo 7. Si  $f$  y  $h$  son homotecias de centro  $C$ , con  $r(f) = 2$  y  $r(h) = 4$ , al construir  $f \circ h$ , en la figura 20 se puede observar que  $r(f \circ h) = 8 = 2 \cdot 4 = r(f) \cdot r(h)$ .

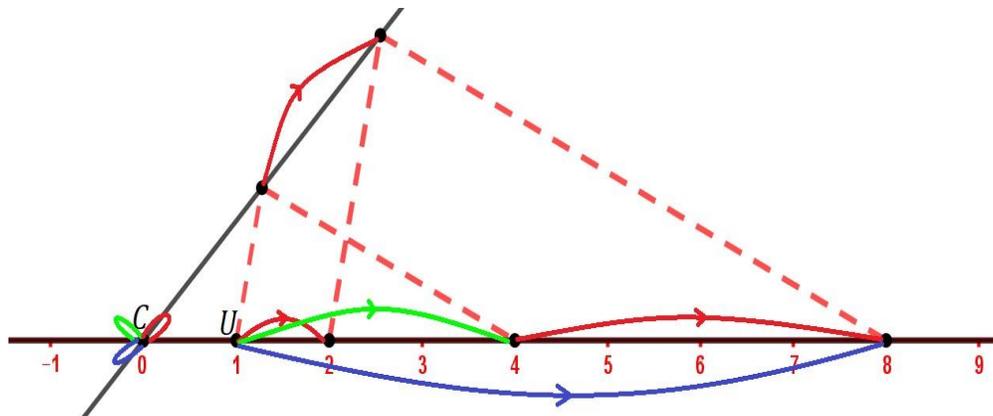


Figura 20:  $r(f \circ h)$

Ejemplo 8. Si  $j$  y  $n$  son homotecias de centro  $C$ , con  $r(j) = -\frac{1}{2}$  y  $r(n) = -10$ , de la figura 21 se observa que  $r(j \circ n) = 5 = -\frac{1}{2} \cdot (-10) = r(j) \cdot r(n)$ .

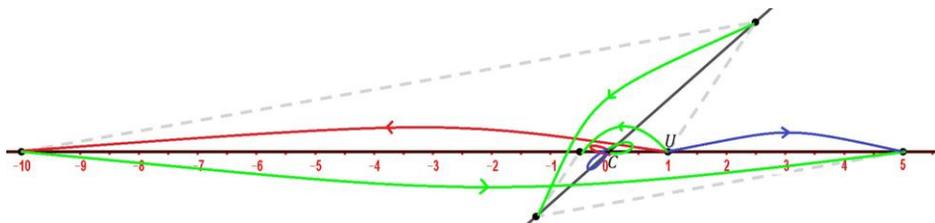


Figura 21:  $r(j \circ n)$

Conclusión: Sean las homotecias de centro  $C$ ,  $f$  (en rojo) y  $h$  (en verde), tales que  $r(f) = s$  y  $r(h) = t$ , como se presenta en la figura 22. De los ejemplos anteriores podemos observar que la razón de  $f \circ h$  es  $s \cdot t$ , es decir, la razón de la compuesta de dos homotecias de igual centro es igual al producto de sus razones:  $r(f \circ h) = s \cdot t = r(f) \cdot r(h)$ .

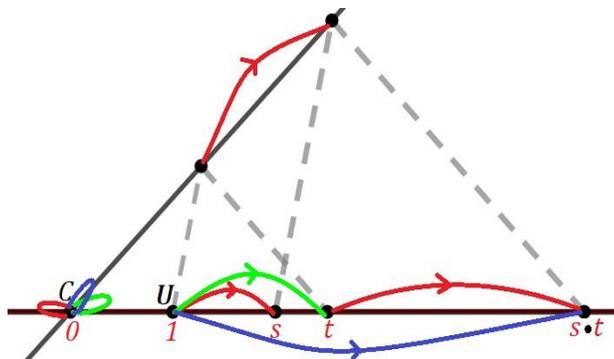


Figura 22:  $r(f \circ h)$

Retomando el trabajo realizado se tiene que  $(H_c, \circ)$  y  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  son grupos abelianos, la función razón  $r: H_c \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  es biyectiva y  $r(f) \cdot r(h) = r(f \circ h)$ , de lo que podemos concluir que  $r$  es un isomorfismo de grupos abelianos. Este isomorfismo  $r$  es el encargado de transferir las propiedades de  $(H_c, \circ)$  al producto de números reales y el que facilita la visualización de las propiedades de la multiplicación de los números reales, cuando se realiza el trabajo en el aula.

## REFERENCIAS

- Fernández, F. (2018). *Estrategia didáctica para estudiar las propiedades de la multiplicación de números reales con estudiantes de grado octavo, haciendo uso de homotecias*. Trabajo de Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Papy, G. (1968). *Mathématique Moderne 2. Nombres réels et vectoriel plan*. Bruxelles: Marcel Didier.
- Peña, E. (2011). *Definición geométrica de la multiplicación de reales usando homotecias*. Trabajo de Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Arauca, Colombia.
- Rivera, O. (2011). *Ilustración de algunas relaciones existentes entre las propiedades geométricas del plano y las propiedades y operaciones de los números reales*. Trabajo de Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.



# ESPACIOS DE BANACH Y LA LEY DEL PARALELOGRAMO

**Margot Salas-Brown**

*Universidad Sergio Arboleda. Programa de Matemáticas*

margot.salas@usa.edu.co

Esta revisión presenta una reflexión sobre la ley del paralelogramo y sus variantes en espacios de Banach. La ley del paralelogramo es una propiedad geométrica fundamental que caracteriza a los espacios de Hilbert dentro de la clase más amplia de espacios de Banach. A través de esta revisión, se examina el marco teórico subyacente, los principales resultados obtenidos por diversos autores y las conexiones con otros conceptos en análisis funcional y geometría de espacios de Banach.

## INTRODUCCIÓN

Los espacios de Banach son una clase fundamental de espacios normados en análisis funcional, tienen numerosas aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, la física y en los últimos años han cobrado un especial interés por sus aplicaciones en el *machine learning*. Dentro de esta clase, los espacios de Hilbert ocupan un lugar privilegiado debido a su rica estructura geométrica y algebraica. Una propiedad clave que distingue a los espacios de Hilbert de los demás espacios de Banach es la ley del paralelogramo, una condición geométrica que relaciona la norma de la suma y diferencia de dos vectores con las normas de los vectores.

Esta revisión se centra en el estudio de la ley del paralelogramo y sus variantes en espacios de Banach. Se examinarán los principales resultados teóricos, así como las aplicaciones y las conexiones con otros conceptos en análisis funcional y geometría de espacios de Banach. Se comienza con una introducción al concepto de espacios de Banach y la definición formal de la ley del paralelogramo. Luego, se presentan resultados clave, como el teorema de James, que establece la equivalencia entre ser un espacio de Hilbert y satisfacer la ley del paralelogramo en cada subespacio bidimensional. Luego se presentan los espacios uniformemente convexos y se muestra que un espacio que satisfaga la ley del paralelogramo es uniformemente convexo. Se exhibe cómo la convexidad uniforme enlaza propiedades geométricas con propiedades topológicas.

Además, se analizan los espacios  $l_p$  de sucesiones y  $L_p$  de funciones, donde si bien la ley del paralelogramo no se cumple en su forma original, existen desigualdades que relacionan la norma de la suma y diferencia de vectores con las normas de los vectores. Se exponen dos propiedades geométricas adicionales de los espacios de Banach, que de una forma u otra “miden” qué tan “lejos” está un espacio de Banach de satisfacer la ley del paralelogramo, estas propiedades son el tipo y el cotipo. Finalmente, se muestra cómo se usa el cotipo para la solución del problema de la clase perturbación para operadores semi-Fredholm.

## LA LEY DEL PARALELOGRAMO

En matemáticas, la ley del paralelogramo (véase figura 1) es una ley fundamental que pertenece a la geometría elemental. Esta ley también se conoce como identidad del paralelogramo y establece que la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales. En la geometría euclidiana, es necesario que el paralelogramo tenga lados opuestos iguales.

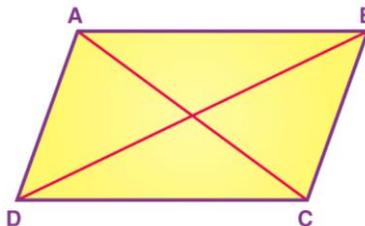


Figura 1: ley del paralelogramo

Si  $ABCD$  es un paralelogramo, entonces  $AB = DC$  y  $AD = BC$ . Entonces, según la definición de la ley del paralelogramo, se establece como:

$$2(AB)^2 + 2(BC)^2 = (AC)^2 + (BD)^2.$$

En caso de que el paralelogramo sea un rectángulo, se obtiene el famoso teorema de Pitágoras, el cual se enuncia como:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2.$$

Esto se debe a que, en un rectángulo, las dos diagonales tienen longitudes iguales, es decir,  $AC = BD$ .

## ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y ESPACIOS NORMADOS

Un producto interno es una operación binaria definida sobre un espacio vectorial que asigna un número real a cada par de vectores. Formalmente, dado un espacio vectorial  $X$  sobre un campo  $K$  (por ejemplo, los números reales o complejos), un producto interno es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow K$  que satisface las siguientes propiedades para todos los vectores  $x, y, z \in X$  y todo escalar  $\alpha \in K$ :

- simétrico conjugado:  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
- lineal:  $\langle \alpha x + z, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$ ,
- definido positivo:  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , y  $\langle x, x \rangle = 0$  si y solo si  $x = 0$ .

El producto escalar estándar en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es un ejemplo clásico de producto interno. Esto es, si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  son elementos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  es un producto interno sobre  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno sobre un espacio vectorial  $X$ , entonces el par  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se denomina espacio con producto interno.

Los espacios con producto interno pueden ser vistos como generalizaciones de los espacios euclidianos. Estos espacios retienen muchas de las propiedades geométricas y algebraicas familiares de los espacios euclídeos, como la noción de ángulos entre vectores, proyecciones ortogonales, y bases ortonormales. Sin embargo, los espacios con producto interno permiten una mayor abstracción y generalización, lo que los hace útiles en diversas áreas de las matemáticas y la física.

Por otro lado, una norma en un espacio vectorial  $X$  es una función  $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que satisface las siguientes propiedades:

- no negativa:  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in X$ , y  $\|x\| = 0$  si y solo si  $x = 0$ ,
- homogénea:  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  para todo escalar  $\alpha$  y vector  $x$ ,
- desigualdad triangular:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todos los vectores  $x, y$ .

Si  $\| \cdot \|$  es una norma sobre un espacio vectorial  $X$ , entonces el par  $(X, \| \cdot \|)$  se denomina espacio normado. Por ejemplo, para  $\mathbb{R}^n$  y  $1 \leq p < \infty$  la aplicación  $\|x\|_p = \{\sum_{i=1}^n |x_i|^p\}^{1/p}$  es una norma sobre  $\mathbb{R}^n$  denominada la norma  $p$ . Una

norma generaliza la noción de distancia euclídea y también induce una topología en un espacio vectorial, lo que permite definir conceptos como convergencia de sucesiones, continuidad de funciones, y muchas otras ideas fundamentales del análisis.

Existe una estrecha relación entre un producto interno y una norma, en el sentido que, dado un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en un espacio vectorial  $X$ , se puede definir una norma asociada de la siguiente manera  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Esta norma, se denomina norma inducida por el producto interno. Por ejemplo, la norma sobre  $\mathbb{R}^n$  inducida por el producto interno  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  es  $\|x\| = \{\sum_{i=1}^n |x_i|^2\}^{1/2}$  la cual se denomina norma euclídea y coincide con la norma  $p$  para  $p = 2$ .

En un espacio normado, el enunciado de la ley del paralelogramo (véase figura 2) es una ecuación que relaciona normas:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo  $x, y \in X$ .

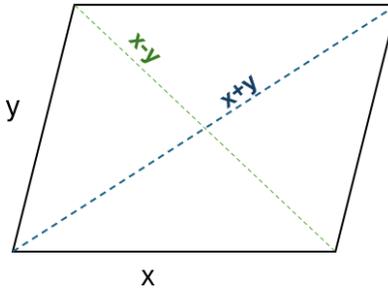


Figura 2: ley del paralelogramo en espacios normados

La ley del paralelogramo es equivalente al enunciado aparentemente más débil

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

para todo  $x, y \in X$ , porque la desigualdad inversa se puede obtener de ella sustituyendo  $\frac{1}{2}(x + y)$  por  $x$ , y  $\frac{1}{2}(x - y)$  por  $y$ , y luego simplificando. Con la misma prueba, la ley del paralelogramo también es equivalente a:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo  $x, y \in X$ .

Dado que todo producto interno induce una norma, se tiene que todo espacio con producto interno es un espacio normado. La norma que induce el producto interno satisface la ley del paralelogramo, esto es, si  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio con producto interno, la norma inducida verifica

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Entonces una manera de saber si una norma no proviene de un producto interno es verificando que no satisface esta ley. Por ejemplo, si consideramos  $\mathbb{R}^n$  con la norma  $p$ , con  $1 \leq p < \infty$  y  $p \neq 2$ , entonces para  $x = (1, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $y = (1, -1, 0, \dots, 0)$ , se tiene que  $\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}$ , pero

$$\|x + y\|_p = \|x - y\|_p = 2.$$

Por tanto, no se verifica la ley del paralelogramo, con lo cual no existe un producto interno sobre  $\mathbb{R}^n$  tal que la norma inducida coincida con la norma  $\| \cdot \|_p$ .

## LA LEY DEL PARALELOGRAMO EN ESPACIOS DE BANACH

Los conceptos de espacio de Banach y de espacio de Hilbert son conceptos fundamentales en el análisis funcional, una rama del análisis matemático que estudia los espacios vectoriales con estructuras adicionales. El concepto de espacio de Hilbert fue introducido por el matemático alemán David Hilbert (1904). Poco después, el matemático polaco Stefan Banach en su tesis doctoral (1920) amplió este concepto, definiendo lo que hoy día se conoce como espacios de Banach.

Un espacio de Banach es un espacio normado tal que toda sucesión de Cauchy (una sucesión en la que los términos se vuelven arbitrariamente cercanos) converge a un elemento del mismo espacio. Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno que es de Banach con la norma inducida por el producto interno. Por ejemplo,  $\mathbb{R}^n$  con el producto interno definido por el producto escalar es un espacio de Hilbert y  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_p)$  es de Banach.

La completitud es una propiedad crucial que distingue a los espacios de Banach de otros espacios normados. Garantiza que ciertas operaciones, como la integración y las series, puedan realizarse de manera consistente dentro del espacio.

Dado que todo producto interno induce una norma, se tiene que todo espacio de Hilbert es Banach. Para que un espacio de Banach  $X$  sea isométricamente iso-

morfo a un espacio de Hilbert es necesario y suficiente que la ley del paralelogramo se satisfaga. Este resultado fue demostrado por Jordan y Neuman (1935) y formalmente se enuncia de la siguiente manera:

Un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Hilbert si y solo si para todos los vectores  $x, y \in X$ , se cumple:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

La demostración de este resultado hace uso de las identidades de polarización las cuales establecen que si  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio con producto interno entonces

- $\langle x, y \rangle = 1/4[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$ , si  $X$  es real,
- $Re\langle x, y \rangle = 1/4[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$ ,  $Im\langle x, y \rangle = 1/4[\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2]$ , si  $X$  es complejo.

Un resultado fundamental debido a James (1964) establece que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y solo si cada uno de sus subespacios bidimensionales es un espacio de Hilbert. Esto significa que la ley del paralelogramo se cumple en todo el espacio si y solo si se cumple en cada subespacio bidimensional. Formalmente, si  $X$  es un espacio de Banach, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $X$  es un espacio de Hilbert.
- Para cada subespacio  $Y \subseteq X$  de dimensión 2, la restricción de  $\|\cdot\|$  a  $Y$  satisface la ley del paralelogramo.

Este teorema resalta la importancia de los subespacios bidimensionales en el estudio de la ley del paralelogramo y proporciona una caracterización útil de los espacios de Hilbert.

## Espacios uniformemente convexos

Un espacio de Banach uniformemente convexo es un espacio de Banach con una propiedad adicional de convexidad uniforme. Esta propiedad implica que, si dos vectores en el espacio están suficientemente lejos de ser paralelos, entonces el punto medio del segmento que los une está estrictamente más cerca del origen que cualquiera de los vectores. Estos espacios tienen propiedades geo-

métricas y topológicas interesantes, como la existencia de proyecciones métricas y la validez del teorema de punto fijo para ciertas clases de aplicaciones no expansivas. El concepto de convexidad uniforme (véase figura 3) fue introducido por primera vez por James A. Clarkson (1936).

Formalmente, un espacio de Banach  $X$  se dice que es uniformemente convexo si para cada  $0 < \varepsilon < 2$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in X$  con  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|y\| \leq 1$  y  $\|x - y\| \geq \varepsilon$ , entonces  $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$ .

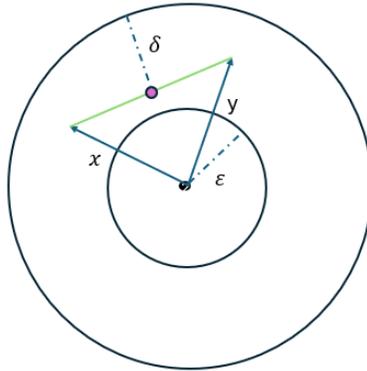


Figura 3: convexidad uniforme

Es decir, dados cualesquiera dos elementos  $x, y$  en la bola unidad de  $X$  cerrada y centrada en el origen, separados por una distancia superior a  $\varepsilon$ , el punto medio del segmento que los une cae siempre en el interior de la bola, a una distancia no inferior a  $\delta$  de la frontera de esta.

El ejemplo más inmediato de un espacio uniformemente convexo es un espacio de Hilbert. En efecto, dado que la norma inducida por el producto interno satisface la ley del paralelogramo, se tiene que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = 2 \left( \left\| \frac{x}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{2} \right\|^2 \right).$$

Con lo cual,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2,$$

en tal sentido, si  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|y\| \leq 1$  y  $\|x - y\| \geq \varepsilon$ , entonces

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^2.$$

De aquí obtenemos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \left( 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \right).$$

La convexidad uniforme es una propiedad geométrica de la norma, en el sentido que si  $(X, \|\cdot\|_1)$  es un espacio uniformemente convexo y  $\|\cdot\|_2$  es otra norma sobre  $X$  equivalente a  $\|\cdot\|_1$ , entonces no necesariamente  $(X, \|\cdot\|_2)$  es uniformemente convexo. Una propiedad topológica es una propiedad que si  $(X, \|\cdot\|_1)$  satisface dicha propiedad y  $\|\cdot\|_2$  es otra norma sobre  $X$  equivalente a  $\|\cdot\|_1$ , entonces  $(X, \|\cdot\|_2)$  también satisface dicha propiedad, un ejemplo de propiedad topológica es ser reflexivo. Los espacios uniformemente convexos permiten enlazar propiedades geométricas y propiedades topológicas de los espacios de Banach de una forma muy elegante, y es un ejemplo de algo poco común, que una propiedad geométrica implique una propiedad topológica, en el sentido que todo espacio uniformemente convexo es reflexivo. Este hecho fue demostrado por primera vez por Milman (1938) y luego por Pettis (1939) de forma independiente. Una demostración de este resultado puede ser consultada en el texto de Brezis (1984).

Un concepto que ayuda en el estudio de la convexidad uniforme es el del llamado módulo de convexidad, el cual se define como la función

$$\delta_X: [0,2] \rightarrow [0,1]$$

$$\epsilon \mapsto \delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \epsilon \right\}$$

y se demuestra lo siguiente:  $X$  es uniformemente convexo si y solo si

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \delta_X(\epsilon) > 0$$

La ley del paralelogramo también permite caracterizar los espacios de Hilbert mediante el módulo de convexidad:  $X$  es un espacio de Hilbert si y solo si

$$\delta_X(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} \quad 0 \leq \epsilon \leq 2$$

lo que significa que en un espacio de Hilbert el módulo de convexidad es constante en cada uno de sus subespacios bidimensional.

## Espacios $l_p$

Los espacios  $l_p$  para  $1 \leq p < \infty$ , son espacios de sucesiones de números reales o complejos  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$ , los espacios  $l_p$  dotado con la norma  $\|x\|_p = \{\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p\}^{1/p}$  son ejemplos importantes de espacios de Banach. En estos espacios, para  $p \neq 2$ , la ley del paralelogramo no se cumple, en efecto, si tomamos  $x = (1, 1, 0, \dots), y = (1, -1, 0, \dots)$ , entonces  $\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}$ , pero  $\|x + y\|_p = \|x - y\|_p = 2$  (véase figura 4). Por tanto, no se verifica la ley del paralelogramo, y por tanto  $(l_p, \|\cdot\|_p)$  para  $p \neq 2$  no es de Hilbert.

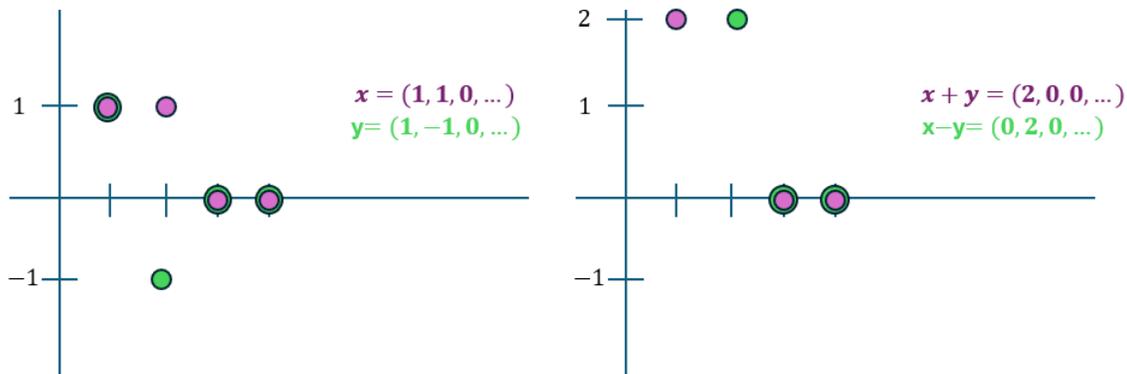


Figura 4: Puntos en  $l_p$

Sin embargo, existen resultados que relacionan propiedades de la norma con variantes atenuadas de dicha ley. Uno de los primeros resultados en esta dirección fue obtenido por Clarkson (1936), quien demostró que en los espacios  $l_p$  con  $1 < p \leq 2$ , se cumple la siguiente desigualdad:

$$2^{(p-1)}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \leq \|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p \leq 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)$$

Esta desigualdad se conoce como la desigualdad de Clarkson y es una versión débil de la ley del paralelogramo, ya que la igualdad se cumple solo en el caso  $p = 2$  (espacio de Hilbert). Clarkson también demuestra que para  $2 \leq p < \infty$  se cumple que:

$$2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \leq \|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p \leq 2^{(p-1)}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p).$$

Estos resultados muestran que, aunque la ley del paralelogramo no se cumple en los espacios  $l_p$  con  $p \neq 2$ , existen cotas superiores e inferiores que involucran potencias de 2 y que se ajustan a medida que  $p$  se acerca a 2.

## Espacios $L_p$

Para  $1 \leq p < \infty$ , el espacio de Banach  $L_p(0,1)$  o  $L_p$ , consiste (salvo en igualdad en casi todas partes) de las funciones medibles  $f$  definidas sobre  $(0,1)$  tales que  $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p} < \infty$  donde  $\mu$  denota la medida de Lebesgue sobre  $(0,1)$ . El espacio  $(L_p, \|\cdot\|_p)$  es de Banach. La primera desigualdad de Clarkson establece que para todo  $f, g \in L_p$  con  $2 \leq p < \infty$  se cumple que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

La desigualdad de Clarkson es usada para demostrar que  $L_p$  para  $2 \leq p < \infty$  es uniformemente convexo. En efecto, sean  $\varepsilon > 0$ ,  $f, g \in L_p$  tales que  $\|f\|_p^p \leq 1$  y  $\|g\|_p^p \leq 1$  y  $\|f - g\|_p \geq \varepsilon$ , entonces de la desigualdad de Clarkson se tiene que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Así  $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < 1 - \delta$ , donde  $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0$ .

Para  $1 < p < 2$  también es cierto que  $L_p$  es uniformemente convexo, y esto es consecuencia de la segunda desigualdad de Clarkson que establece que para todo  $f, g \in L_p$  con  $1 < p < 2$  se cumple que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q/p};$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

## Tipo y cotipo de un espacio de Banach

Otra propiedad geométrica importante y clásica de los espacios de Banach es el tipo y cotipo. El tipo y cotipo de un espacio de Banach están estrechamente relacionados con la convexidad uniforme (Lindenstrauss y Tzafriri, 2013). Un espacio de Banach se dice que es de tipo  $p$  para algún  $1 < p \leq 2$  (resp. de cotipo  $q$  para algún  $2 \leq q < \infty$ ) si existe una constante  $M > 0$  tal que para toda colección finita  $(x_j)_{j=1}^n$  de elementos de  $X$  se tiene que

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t)x_j \right\| dt \leq M \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p}$$

resp.

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t)x_j \right\| dt \leq M^{-1} \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{1/q}$$

donde  $(r_n)$  es la sucesión formada por las funciones de Radamacher las cuales se definen por  $r_n(t) = \text{sgn}(\text{sen}(2^n \pi t))$ . Para más detalles acerca de las funciones de Radamacher se puede consultar el texto de Albiac y Kalton (2006).

Por ejemplo, es bien sabido que el espacio  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , es de tipo  $\min\{2, p\}$  y cotipo  $\max\{2, p\}$  (Lindenstrauss y Tzafriri, 2013). Además, cualquier espacio de Hilbert es de tipo 2 y cotipo 2 debido a la identidad del paralelogramo. El recíproco de lo anterior también es cierto, cualquier espacio que sea simultáneamente de tipo 2 y cotipo 2, es isomorfo a un espacio de Hilbert, este resultado fue demostrado por Kwapien (1972). Por lo tanto, las nociones de tipo y cotipo miden cuán mal se comporta la identidad del paralelogramo, es decir, cuán lejos está un espacio de Banach de ser un espacio de Hilbert.

Todo retículo de Banach de cotipo 2 satisface otra propiedad geométrica relacionada con la existencia de subespacios isomorfos a  $l_2$ , esta propiedad se denomina la propiedad de Orlicz. Se dice que un espacio  $X$  satisface la propiedad de Orlicz si cada sucesión  $(x_n)$  semi-normalizada (acotada y  $\inf\{\|x_n\|\} > 0$ ) y débil nula (que converge débilmente a 0) en  $X$  tiene una subsucesión  $(x_{n_k})$  que satisface una 2-estimación inferior, es decir, si existe una constante  $C > 0$  tal que, para cada sucesión de escalares  $(a_k)$ ,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k} \right| \geq C \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

González y Salas-Brown (2010), utilizan la propiedad de Orlicz para mostrar una solución positiva al problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm. Este problema fue planteado por Gohberg et al. (1967) y consiste en determinar si la clase perturbación de los operadores semi-Fredholm superior y la clase de perturbación de los operadores semi-Fredholm inferior

coinciden con la clase de operadores estrictamente singulares y la clase de los operadores estrictamente cosingulares, respectivamente.

## REFERENCIAS

- Albiac, F. y Kalton, N. J. (2006). *Topics in Banach space theory* (vol. 233, pp. xii+-373). New York: Springer.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Brézis, H. y Funcional, A. (1984). *Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial.
- Clarkson, J. A. (1936). Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(3), 396-414.
- Gohberg, I. C., Markus, A. S. y Feldman, I. A. (1967). Normally solvable operators and ideals associated with them. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.*, 2(61), 63-84.
- González, M. y Salas-Brown, M. (2010). Perturbation classes for semi-Fredholm operators on  $L_p(\mu)$ -spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 370(1), 11-17.
- James, R. C. (1964). Uniformly non-square Banach spaces. *Annals of Mathematics*, 542-550.
- Jordan, P. y Neumann, J. V. (1935). On inner products in linear, metric spaces. *Annals of Mathematics*, 719-723.
- Hilbert, D. (1904). Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* 49-91.
- Kwapień, S. (1972). Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Mathematica*, 44(6), 583-595.
- Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. (2013). *Classical Banach spaces II: Function spaces*. Springer Science & Business Media.

# ¿UNA RECTA SIN PUNTOS? UNA PERSPECTIVA ALTERNATIVA DE LA GEOMETRÍA Y EL ANÁLISIS

**Francisco Vargas**

*Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Universidad El Bosque*  
fvargasmanquera@gmail.com

La visión dominante hoy en día en la matemática identifica el continuo con los números reales y desde allí aborda las distintas ramas de la geometría y el análisis. Presentamos un modelo para el continuo tal como fue teorizado por C. S. Peirce, en el que la noción de “punto” desaparece, indicando cómo surgen en ese modelo algunas nociones fundamentales de la geometría y del cálculo desde una perspectiva infinitesimal muy diferente, sin embargo, al análisis no-estándar.

## VISIONES DEL CONTINUO

### Dos versiones borgianas del infinito

La fascinación de Borges por el tema del infinito, que va desde el análisis de las paradojas de Zenón hasta las teorías del transfinito en Cantor, lo lleva a volver sobre el tema de manera insistente en su obra. Aquí, quiero detenerme a señalar que hay dos visiones del infinito que surgen de sus cuentos, que desde un punto de vista “geométrico” son radicalmente distintas.

La primera visión es la del *Libro de Arena*, publicado en 1975. Borges imagina cómo sería un libro infinito, inagotable y cambiante:

Me dijo que su libro se llamaba el Libro de Arena, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin.

Me pidió que buscara la primera hoja.

Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro. (*Libro de arena*)

Encontramos la segunda visión en su *Aleph*, publicado en 1949. Sin adentrarnos en los detalles de la historia, el autor nos ofrece la siguiente descripción:

Vargas, F. (2024). ¿Una recta sin puntos? Una perspectiva alternativa de la geometría y el análisis. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 35-48. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño.

[...] vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo. (*Aleph*)

Cito estas dos descripciones de Borges para ilustrar la diferencia que mencioné antes: en la primera encontramos las páginas del libro que tienen un orden lineal. Por estar limitado (“acotado”) en el espacio por las carátulas del libro, se trata de un orden denso. Sin embargo en este caso, las páginas son las componentes últimas en que podemos descomponer el libro. No así en el segundo ejemplo: en el fragmento citado encontramos el Aleph dentro del Aleph. No solo tenemos una infinitud en que los objetos se acumulan los unos *junto* a los otros (como las páginas del *Libro de Arena*), sino una infinitud en la que el objeto lleva *en su interior* el mundo, y el mundo al objeto. Lleva en su interior una copia de sí mismo, y esta copia a su vez lleva otra copia en su interior, y así iterativamente.

En este artículo hablaremos del continuo, el fundamento mismo de la geometría y del espacio en el sentido usual. Las dos imágenes de Borges nos ilustran dos concepciones radicalmente distintas del continuo: por un lado, un continuo analítico, descomponible en partes últimas, es decir, indivisibles; por otro lado, un continuo en que cada parte es a su vez de la misma naturaleza del todo. El debate sobre la estructura del continuo tiene una larga historia y encontramos ya en el mundo griego posiciones como las del mismo Euclides<sup>1</sup>, en contraste con las de Aristóteles que teorizaba un continuo sin puntos.

Todos sabemos que en la actualidad la primera posición es, de lejos, dominante, tanto como paradigma en las matemáticas, como en la enseñanza de la geometría a todos sus niveles.

El proceso histórico que pasa por el surgimiento de la geometría analítica y del cálculo, hasta la progresiva aritmetización del análisis y la introducción de la teoría de conjuntos, ha llevado a identificar la recta, el continuo, con los números reales (concebidos así, como puntos). La finalidad de este artículo es esbozar

---

<sup>1</sup> “Punto es lo que no tiene partes”, reza la definición de los *Elementos*.

un camino alternativo para abordar el continuo, así como su utilización en la geometría y el análisis.

## Otras visiones del continuo

A pesar del predominio de esa posición, ha habido a lo largo de la historia una enorme variedad de perspectivas alternativas hacia el continuo, o “los continuos”, como se puede ver en la reciente publicación de Shapiro y Hellman (2021).

En buena medida, muchas de estas aproximaciones<sup>2</sup> consideran necesaria la utilización de otro continuo como aproximación a realidades como el espacio físico y la naturaleza del tiempo. Esto, en oposición a visiones discretizadoras o atomísticas de lo real. Tenemos, así, visiones como la propuesta en la cosmología de A. N. Whitehead:

La continuidad de la naturaleza surge de la extensión. Todo acontecimiento se extiende sobre otros acontecimientos, y todo acontecimiento se extiende sobre otros acontecimientos [...] Así pues, no existe una estructura atómica de duraciones [...] (Whitehead, 1920)

Subyace a algunos planteamientos, por otra parte, la idea de que en la antinomia entre lo discreto y lo continuo, más allá de la visión analítica usual de construir lo continuo a partir de lo discreto, encontraríamos un camino opuesto, sintético (Zalamea, 2012b) en donde lo continuo estaría en un primer lugar, y lo discreto surgiría solamente a partir de cortes impuestos sobre el continuo. En este sentido, vemos a R. Thom (1992), por ejemplo, hablar de una “anterioridad ontológica de lo continuo sobre lo discreto” y de un “continuo arquetípico” carente de puntos. Es en esta dirección hacia donde apuntan también las ideas de C. S. Peirce.

---

<sup>2</sup> Por razones de espacio, no consideramos aquí gran parte de esta variedad, que incluye, por ejemplo, la aproximación intuicionista al continuo, y el muy conocido análisis no estándar (Robinson, 1974). Nos limitamos a mencionar que, al igual que los reales, en los hiperreales la recta se construye también a partir de puntos, a diferencia de lo que desarrollamos a continuación.

## El continuo peirceano

Entre los pensadores que postularon la conexión de lo continuo para nuestro entendimiento de la realidad, destacan particularmente Leibniz, quien formuló el conocido principio de continuidad<sup>3</sup>, y el norteamericano C. S. Peirce. La figura fascinante de Peirce (1839-1914) destaca por la amplitud y profundidad de sus intereses y aportes. Conocido sobre todo como fundador del pragmatismo como corriente filosófica y por sus trabajos en semiótica y lógica, Peirce se ocupó de las más diversas ciencias particulares, incluyendo las matemáticas. El elemento sintético y unificador dentro de esta pluralidad de ramificaciones está constituido por el «sinejismo», que define en 1893 como «la doctrina de que la continuidad rige todo el dominio de la experiencia» (manuscrito 946, p. 5, en Peirce, 2010). No es de extrañar entonces que el autor intentara insistentemente a lo largo de su vida, encontrar una definición matemática adecuada de continuo (Zalamea, 2012a).

El continuo, para Peirce, se caracteriza por ser “inextensible”, no analítico, y los puntos solo se conciben, si acaso, como límites ideales. Los puntos no tienen existencia real, o solo la asumen a través de la negación de la continuidad, rompiéndola. Más aun, como el Aleph de Borges, el continuo es “reflexivo” ya que toda parte contiene partes “isomorfas” a la totalidad:

Un continuo (como lo son realmente el tiempo y el espacio) se define como algo cuya parte, por pequeña que sea, tiene partes del mismo tipo. Toda parte de una superficie es una superficie, y toda parte de una línea es una línea. El punto del tiempo o del espacio no es más que el límite ideal hacia el que nos acercamos indefinidamente sin llegar nunca a dividir el tiempo o el espacio. (1873, en Peirce, 1982-2009, 3.106)

Peirce se vio profundamente influido por la aparición de la teoría de conjuntos cantoriana y contribuyó de distintas maneras a la conceptualización del infinito. En distintos puntos, las ideas de Peirce sobre el tema divergieron de los que se convirtieron en puntos de vista estándar sobre el mismo, como por ejemplo en lo que respecta a sus colecciones potenciales o «supermultitudinarias» (= mayores que cualquier cardinal infinito definido). La supermultitud resulta ser un rasgo característico del continuo, y el concepto se entrelaza con su naturaleza

---

<sup>3</sup> La *Lex continuitatis* según la cual “la naturaleza nunca da saltos”.

no puntual. Ir más allá de todos los cardinales transfinitos es también una trascendencia de la existencia real de puntos que conduce a la inextensibilidad.

[...] recordando que la palabra “potencial” significa indeterminado pero capaz de ser determinado en cualquier caso especial, puede haber un agregado potencial de todas las posibilidades que son consistentes con ciertas condiciones generales; y esto puede ser tal que dada cualquier colección de individuos distintos, de ese agregado potencial puede actualizarse una colección más multitudinaria que la colección dada. Así, el agregado potencial es, con la más estricta exactitud, mayor en multitud que cualquier multitud posible de individuos. Pero al ser solo un agregado potencial, no contiene ningún individuo en absoluto. Solo contiene las condiciones generales que permiten la determinación de los individuos. (Peirce, 1976)

Así, vemos que en Peirce las ideas de reflexividad e inextensibilidad del continuo se conjugan con su supermultitud y su carácter potencial. Una exposición más amplia y detallada de las ideas del continuo en Peirce se encuentra en Zalamea (2012a). Pueden también consultarse Vargas (2020; 2022).

## EL MODELO $C_{Ord}$

En esta sección veremos una construcción para un continuo que capture las ideas esenciales de Peirce (y de otros) llevada a cabo en el contexto usual de la teoría de conjuntos ZFC<sup>4</sup>. Podemos entender las definiciones a continuación, a partir de la idea de que queremos obtener una línea tan rica como se pueda y donde, a la vez, los puntos sean eliminados. Peirce proponía para ello partir de los reales como una especie de “embrión” de continuidad.

Lo que hacemos, es partir de  $\mathbb{R}$  y hacer que cada uno de sus puntos “explote” en otra copia de  $\mathbb{R}$ , con cuyos “puntos” a su vez hacemos lo mismo. Repetimos este proceso inductivamente a lo largo de la clase de todos los ordinales ( $Ord$ ). Obtenemos así toda una jerarquía de aproximaciones al continuo, partiendo de  $\mathbb{R}$  (que sería nuestro  $C_1$ ), pasando por cada ordinal  $\alpha$  (obteniendo los distintos niveles  $C_\alpha$ ), y tomando al final la unión de todos estos niveles (el modelo total, la clase propia  $C_{Ord}$ ).

*Nota.* Vemos aquí el proceso inductivo en que comenzamos con  $C_1$  (que coincide esencialmente con  $\mathbb{R}$  ya que cada sucesión de longitud 1 puede identificarse con el real correspondiente). En el siguiente paso tomamos las 2-sucesiones. El

---

<sup>4</sup> Consúltense, por ejemplo, Jech (1997).

orden está definido de tal manera que podemos visualizar este paso como un tomar cada uno de los “puntos” de  $C_1$  amplificando cada uno en una copia entera de  $\mathbb{R}$ . Y continuamos este proceso...

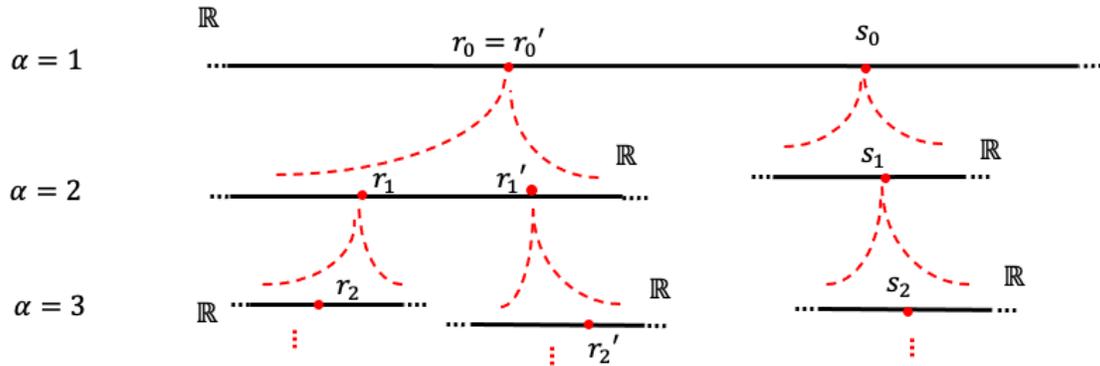


Figura 1: construcción de  $C_{Ord}$

Como vemos, en la figura 1, cada “punto” es tal, solo en apariencia: podemos “agrandar” cada punto aparente tanto como queramos, de acuerdo con la conocida imagen de la lupa o el microscopio recurrente en el análisis infinitesimal desde sus orígenes.

**Definición 1.** Para  $\alpha \in Ord \setminus \{0\}$  definamos  $\langle C_\alpha, <_\alpha \rangle$  como el conjunto de  $\alpha$  –sucesiones reales con el orden lexicográfico.

A continuación, tomamos la unión de todas estas aproximaciones parciales al continuo:

**Definición 2.** Sea  $\langle C_{Ord}, <_{Ord} \rangle$  definido por:

- $C_{Ord} = \bigcup_{\alpha \in Ord \setminus \{0\}} C_\alpha$
- Para cualquier  $x, y \in C_{Ord}$ , definimos  $x <_{Ord} y$  si, para  $\alpha = \min(\text{dom}(x), \text{dom}(y))$ ,  $x \upharpoonright \alpha <_\alpha y \upharpoonright \alpha$

La recta está dotada también de una estructura en la cual algunos “lugares” están ubicados “en” o “dentro” de otros lugares:

**Definición 3.** Para  $x, y \in C_{Ord}$ , tenemos que  $x E y$ , si  $\text{dom}(x) < \text{dom}(y)$ , y se cumple que  $x \upharpoonright \text{dom}(y) = y$ .

**Definición 4.** Para  $x \in C_{Ord}$ , definimos  $M_x$ , la mónada asociada a  $x$ , como la clase de elementos  $y \in C_{Ord}$  tales que  $y E x$ .

El siguiente resultado, de sencilla demostración<sup>5</sup>, captura la propiedad de reflexividad mencionada anteriormente:

**Teorema 1.** Para cualquier  $x \in C_{Ord}$

$$\langle M_x, \langle_{Ord}, E \rangle \simeq \langle C_{Ord}, \langle_{Ord}, E \rangle.$$

La construcción  $C_{Ord}$  formaliza la propuesta de Peirce esbozada en la sección anterior.  $\mathbb{R}$  es nuestro paso inicial, pero a continuación enriquecemos esta «línea» insertando sobre ella, en un proceso infinitario, copias de la misma. Esto da lugar a infinitesimales: ya en  $C_2$  obtenemos un orden no arquimediano pero, de hecho, es posible distinguir toda una jerarquía de diferentes órdenes de infinitesimales (considerando la construcción asociada a cada ordinal). Podemos ver la línea como cubierta por «microsegmentos infinitesimales» cada uno de los cuales, a su vez, puede estar cubierto de la misma manera (reflexividad). Los infinitesimales así obtenidos pueden desempeñar un papel en diferentes campos matemáticos, como veremos a continuación. El desarrollo estratificado del modelo, hasta obtener la clase propia  $C_{Ord}$ , nos lleva a una línea más allá de cualquier cardinal infinito, en un proceso que conjuga lo actual con lo potencial<sup>6</sup>.

## ASPECTOS MEREOLÓGICOS Y GEOMÉTRICOS

### La mereología

El análisis de Whitehead sobre la realidad y los fenómenos naturales se basa en la idea de que están constituidos principalmente por procesos y no por estados, tal como vimos en la cita de la primera sección. Esto conduce a una concepción de un espacio geométrico no constituido primariamente por entidades puntuales últimas, y por tanto muy próximo a lo que Peirce denomina “no composicional”, es decir, no determinado por puntos. En este contexto donde no todo es reducible a puntos, es fundamental la mereología, es decir, el estudio de las relaciones parte-parte y parte-todo.

Las ideas de Whitehead se exponen en un marco informal pero han dado lugar a varios intentos de formalización, constituidos ahora en la llamada “geometría

---

<sup>5</sup> Véase Vargas (2020; 2022).

<sup>6</sup> En Vargas (2022) se muestra de forma explícita cómo en el modelo subyace una estructura de modelo de Kripke para lógicas modales.

sin puntos”<sup>7</sup>. En este enfoque, los conceptos geométricos fundamentales se redefinen en términos de regiones extendidas en lugar de puntos indivisibles. Teniendo esto en cuenta, es interesante contrastar el modelo  $C_{Ord}$  con algunos de los axiomas más básicos propuestos para la geometría sin puntos. Para esto, la relación  $E$  introducida anteriormente puede extenderse de forma natural a una relación  $\Xi$  entre partes más generales de la línea, y no solo a los elementos de  $C_{Ord}$ .

Si consideramos los así llamados «espacios de inclusión de Whitehead», obtenemos que  $(P(C_{Ord}), \Xi)$  satisface los axiomas de este tipo de estructura como se muestra en Vargas (2022).

## Definición del plano

Una vez definida la recta, o continuo unidimensional, es natural extender la definición de continuo a más dimensiones. Para construir el plano, por ejemplo, podemos querer imitar la definición usual de plano cartesiano, pero encontramos que podemos seguir dos direcciones distintas: por un lado, podemos empezar por la construcción de  $C_\alpha$  y luego construir el conjunto de pares de elementos en este:  $C_\alpha^2 = C_\alpha \times C_\alpha$  (véase la figura 2). Luego podemos tomar la unión de estos.

---

<sup>7</sup> *Pointless geometry* o *point-free geometry* en inglés.

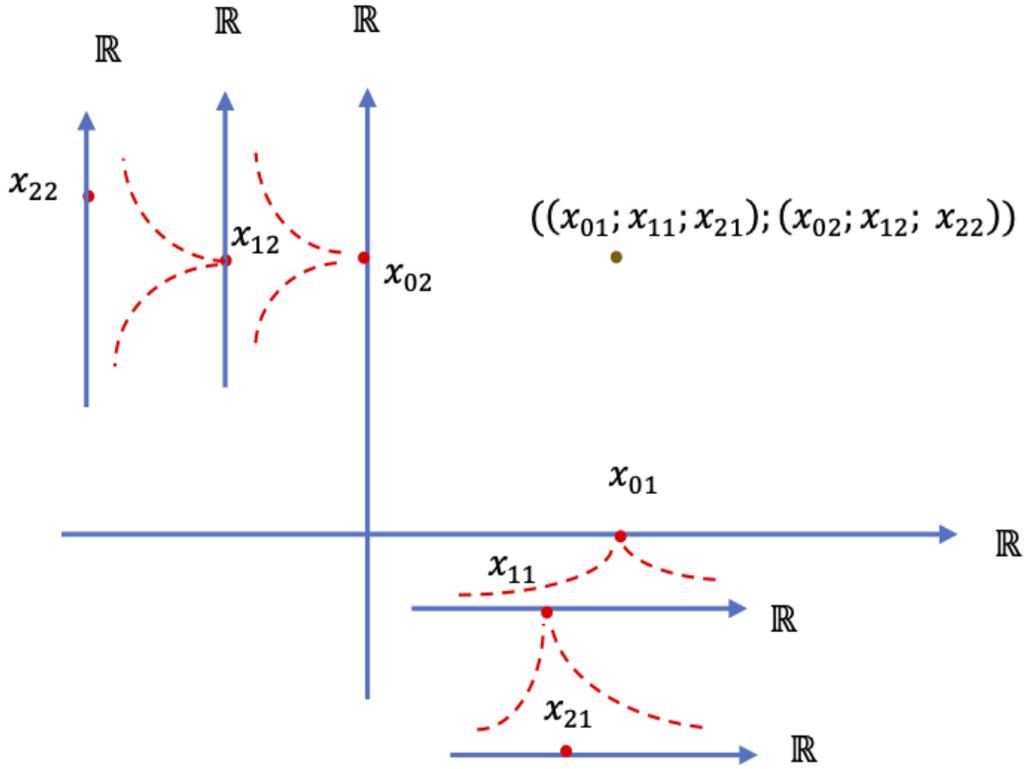


Figura 2: construcción de  $C_3^2$

Por otra parte, es posible repetir la construcción realizada con  $C_{Ord}$ , pero en lugar de utilizar elementos de  $\mathbb{R}$  para construir sucesiones, podemos utilizar elementos de  $\mathbb{R}^2$  (véase la figura 3). Lo que surge entonces es totalmente análogo al caso unidimensional: para el caso de dimensión 2, por ejemplo, lo que tenemos es una primera aproximación al plano habitual  $\mathbb{R}^2$ . En el paso siguiente lo que vemos es que cada punto aparente de  $\mathbb{R}^2$  tiene en su interior una copia entera de  $\mathbb{R}^2$ , etc., produciendo sucesiones de parejas de longitud  $\alpha$ , es decir, elementos de  $({}^\alpha(\mathbb{R}^2))$ .

Es muy útil que ambos caminos resultan ser equivalentes (Vargas, 2022):

**Teorema 2.** Las siguientes construcciones son isomorfas:

1.  $\langle \cup_{\alpha \in Ord} [C_\alpha^2], E \rangle$
2.  $\langle \cup_{\alpha \in Ord} [{}^\alpha(\mathbb{R}^2)], E \rangle$

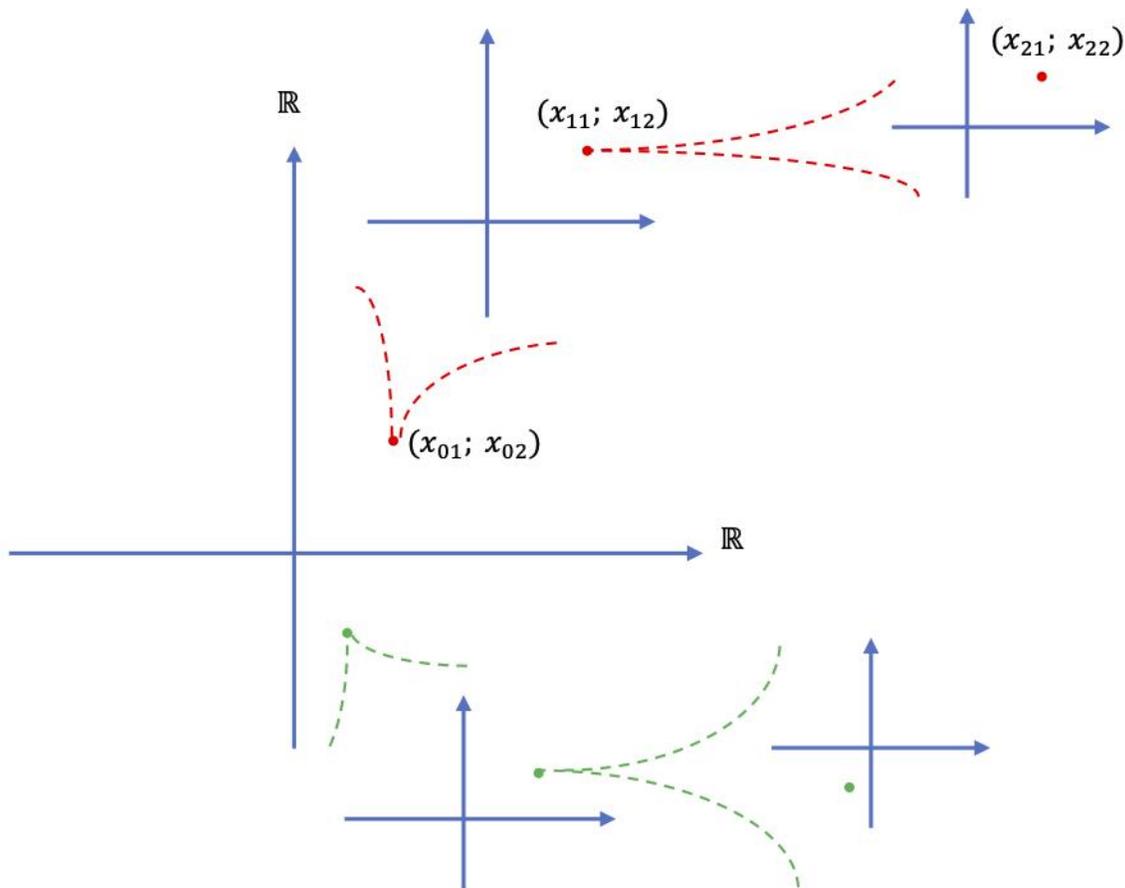


Figura 3: construcción de  $\langle {}^3(\mathbb{R}^2), E \rangle$

Dada la equivalencia obtenida en el Teorema 3, podemos realizar construcciones en el plano pensándolas y visualizándolas de las dos formas expuestas. Asimismo, adaptando de manera sencilla lo expuesto en este apartado, podemos definir y trabajar en general en espacios de dimensión superior a 2.

## Del álgebra a la geometría

Nos hemos concentrado hasta ahora en las propiedades de orden y mereológicas del modelo  $C_{Ord}$ . Sin embargo, el modelo también tiene toda una estructura algebraica heredada naturalmente de  $\mathbb{R}$ . Esto puede verse como una aproximación al continuo a través de una noción generalizada de número que abarca diferentes grados de infinitesimales. Para ello, podemos introducir inicialmente la noción de suma entre sucesiones definiéndola por componentes. Requiere, en cambio, más trabajo la definición de multiplicación. Omitimos aquí los detalles

técnicos de su definición<sup>8</sup>, limitándonos a decir que se trata de una multiplicación análoga a la de polinomios que indicaremos con  $\odot: C_{Ord} \times C_{Ord} \rightarrow C_{Ord}$ . La ilustramos mediante el siguiente ejemplo:

$$(r_0; r_1; r_2) \odot (s_0; s_1) = (r_0 s_0 ; r_0 s_1 + r_1 s_0 ; r_1 s_1 + r_2 s_0 ; r_2 s_1).$$

Podemos establecer que, desde el punto de vista algebraico, añadir ceros a la derecha de una sucesión es indistinguible de no añadirlos (al igual que en la notación decimal 2,24000000 es equivalente a 2,24). Teniendo en cuenta la relación de equivalencia derivada de esta consideración, que es compatible con las operaciones de suma y multiplicación, tenemos que<sup>9</sup>:

**Teorema 3.**  $C_{Ord} / \sim$  con las operaciones  $+$  y  $\odot$ , tiene estructura de anillo.

Es posible utilizar las definiciones desarrolladas hasta ahora para introducir nociones geométricas mediante un enfoque de geometría algebraica. Las curvas en el plano (o variedades en espacios  $\alpha$ -dimensionales) se definen como soluciones de ecuaciones. Los coeficientes y las soluciones pueden considerarse como pertenecientes a los distintos niveles de  $C_{Ord}$ . Es posible ver esto como una generalización de los números duales, introducidos por Johannes Hjelmslev como una forma de proporcionar un modelo para su «geometría de la realidad» (Lützen, 2021). Los números duales se denotan por  $\mathbb{R}[\varepsilon]$ , y están constituidos por números del tipo  $a + \varepsilon b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , donde  $\varepsilon$  es un infinitesimal (por tanto  $\neq 0$ ) tal que  $\varepsilon^2 = 0$ . Se pueden representar entonces como pares ordenados, o secuencias de longitud 2 de la forma  $(a; b)$ , y, por tanto, como miembros de  $C_2$ . Debemos añadir la condición adicional de que si  $a = 0$  entonces obtenemos elementos nilpotentes. En otras palabras, en el contexto del modelo  $C_{Ord}$ , los números duales pueden identificarse con la estructura  $\langle C_2, \leq, +, \odot \rangle$ , donde  $\odot$  se define como una operación  $\odot: C_2 \times C_2 \rightarrow C_2$  tal que los elementos infinitesimales son nilpotentes. De esta forma, obtenemos un anillo conmutativo con identidad.

La geometría desarrollada a partir de los números duales admite que dos rectas incidentes diferentes tengan en común más de un punto. Por tanto, falla el axioma euclidiano de la unicidad de una recta que pasa por dos puntos diferentes. De hecho, el fallo de este principio caracteriza lo que se conoce como geometrías de Hjelmslev o “de incidencia” (Veldkamp, 1995).

---

<sup>8</sup> Véase Vargas (2022).

<sup>9</sup> De nuevo, véase Vargas (2022) para la demostración.

Veremos en la siguiente sección que también es posible desarrollar el análisis mediante un enfoque infinitesimal utilizando números duales. Aun así, es posible y conveniente dejar el espacio abierto a diferentes extensiones y generalizaciones de los conceptos a los diferentes niveles de  $C_{Ord}$  (más allá de  $C_2$ ).

## UNA APROXIMACIÓN ALTERNATIVA AL CÁLCULO INFINITESIMAL

En el contexto de las nociones ya definidas, podemos también obtener los resultados tradicionales del cálculo mediante el uso de infinitesimales, como alternativa a otros enfoques que también recurren a estos, tales como el análisis no estándar (NSA) y el análisis infinitesimal suave (SIA). Muchas de las definiciones y resultados que se obtienen (Vargas, 2022) se acercan al espíritu del SIA tal como es desarrollado, por ejemplo, en Bell (1998). De hecho, podemos construir definiciones (al menos en el caso de las funciones elementales) de forma que funcione el denominado «principio de microrrectitud».

En Vargas (2022) se adopta el siguiente enfoque: tenemos un nivel “macroscópico” del plano  $\mathbb{R}^2$  usual, donde las funciones se definen de la manera estándar, y el nivel infinitesimal se especifica en  $(\mathbb{R}^2)^2$ . Dado un infinitesimal  $\varepsilon \in C_2$ , tendríamos por la definición del producto  $\odot$ , que  $\varepsilon^2 \in C_3$ . Dado que  $\varepsilon^2$  es infinitesimal con respecto a  $\varepsilon$ , podemos ignorar este valor, por lo que podemos definir ahora que  $\varepsilon^2 \approx 0$ . Si en lugar de aproximación tomamos igualdad, esto resulta ser muy cercano, en la práctica, al uso de elementos nilpotentes que se utilizan en SIA (y en las geometrías de Hjelmslev, mencionadas en el apartado anterior).

También, como en SIA, podemos obtener microrrectitud. En el presente contexto, la microrrectitud no se obtiene en general: las funciones pueden definirse arbitrariamente sin esta propiedad. No obstante, dada una función de valor real  $f$ , es posible asignar siempre una función  $f^*: C_2 \rightarrow C_2$  que sea microrrecta. En el caso de las funciones elementales, la microrrectitud se sigue de su fórmula definitoria. Esto nos permite introducir derivadas e integrales de forma natural en estos casos. La microrrectitud implica diferenciabilidad y continuidad local. No obstante, se puede concebir una clase mucho más amplia de funciones que son continuas en el sentido del NSA (según el llamado “criterio de Cauchy” para continuidad) pero que, sin embargo, no deberían llamarse continuas según la intuición leibniziana de “ausencia de saltos”. Por ejemplo, los teoremas del

valor intermedio en general no se cumplen. Es posible, sin embargo, dar definiciones de continuidad apropiadas para el desarrollo de una teoría de funciones en  $\mathcal{C}_{Ord}$  (Vargas, 2022).

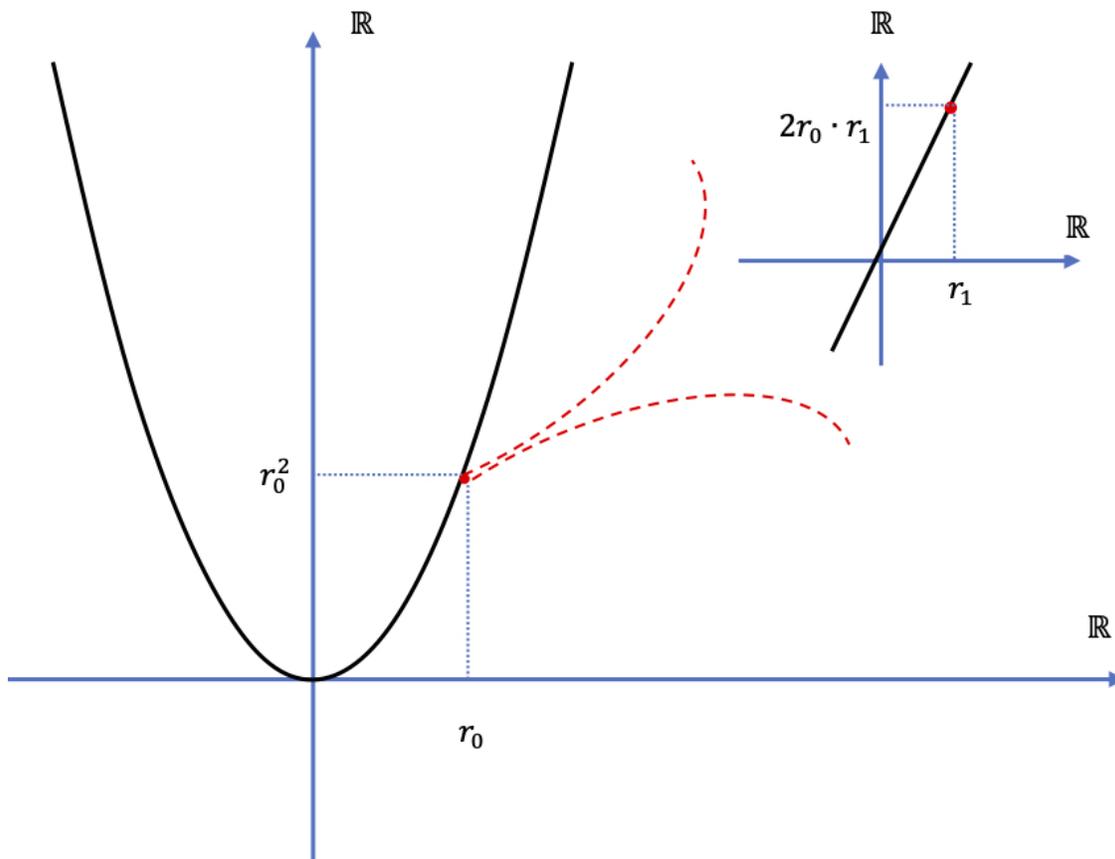


Figura 4: microrrectitud de la función  $f(x) = x^2$

Para ilustrar el comportamiento de microrrectitud, que nos permite introducir la definición de derivada a la manera de los padres del cálculo, tomemos como ejemplo la función a variable real  $f(x) = x^2$  (figura 4). Si tomamos  $f^*: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_2$  definida por la misma expresión, tenemos que  $f(r_0; r_1) = (r_0; r_1)^2 = (r_0; r_1) \odot (r_0; r_1) = (r_0^2; 2r_0r_1)$ . Así, dentro del lugar  $(r_0; r_0^2)$  (el punto sobre la parábola en el plano  $\mathcal{C}_1$ ),  $r_0$  está fijo y la expresión  $2r_0r_1$  es lineal en  $r_1$ , precisamente con coeficiente  $2r_0$ , la derivada de la función que es la pendiente de la recta que representa a la función dentro de  $(r_0; r_0^2)$ .

Un desarrollo más completo de las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integración en el cálculo se presenta en Vargas (2022), que concluye con una versión del teorema fundamental del cálculo. Esto ilustra que se pueden esperar

mayores desarrollos en distintas direcciones a partir del modelo aquí presentado.

## REFERENCIAS

- Bell, J. (1998). *A primer of infinitesimal analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Jech, T. (1997). *Set theory* (2.<sup>a</sup> edición). Berlin: Springer-Verlag.
- Lützen, J. (2021). Hjelmlev's geometry of reality. *Historia Mathematica*, 54, 95-116.
- Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics* (C. Eisele, ed.; vol. 1- 4). The Hague: Mouton.
- Peirce, C. S. (1982-2009). *Writings of Charles S. Peirce. A chronological edition* (E. C. Moore *et al.*, eds.; vol. 1-6, 8). Bloomington: Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (2010). *Philosophy of mathematics: Selected writings* (M. E. Moore, ed.). Indiana University Press.
- Robinson, A. (1974). *Non-standard analysis*. Amsterdam: North-Holland.
- Shapiro, S. y Hellman, G. (eds.) (2021). *The history of continua: Philosophical and mathematical perspectives*. Oxford University Press.
- Thom, R. (1992). "L'antériorité ontologique du continu sur le discret". En J.-M. Salanskis y H. Sinaceur (eds.), *Le Labyrinthe du Continu. Colloque de Cerisy* (pp. 137-143). Paris: Springer-Verlag.
- Vargas, F. (2022). A full model for Peirce's continuum. En F. Zalamea (ed.), *Advances in Peircean mathematics: The Colombian School* (pp. 55-104). Berlin, Boston: De Gruyter.
- Vargas, F. y Moore, M. E. (2020). The Peircean continuum. En S. Shapiro y G. Hellman (eds.), *The history of continua: Philosophical and mathematical perspectives* (pp- 328-346). Oxford University Press.
- Veldkamp, F. (1995). "Geometry over rings". En F. Buekenhout (ed.), *Handbook of incidence geometry. Buildings and foundations* (pp. 1033-1084). Amsterdam: North-Holland.
- Whitehead, A. N. (1920). *The concept of nature*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Zalamea, F. (2012a). *Peirce's logic of continuity. A conceptual and mathematical approach*. Boston: Docent Press.
- Zalamea, F. (2012b). *Synthetic philosophy of contemporary mathematics*. Falmouth and New York: Urbanomic and Sequence Press.
- Zalamea, F. (ed.) (2022). *Advances in Peircean mathematics: The Colombian School*. Berlin, Boston: De Gruyter.



Encuentro de  
**GEOMETRÍA**  
y sus **APLICACIONES**

**19 al 21 de junio de 2024**

**Cursos**





# ROMPECABEZAS: UN PROBLEMA DE CONSTRUCCIÓN PARA ENTRENAR EL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

**Mitchel Garzón**

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

[magarzont@udistrital.edu.co](mailto:magarzont@udistrital.edu.co)

En geometría existen problemas de dos tipos –de construcción y de demostración– y para resolverlos se deben generar las deducciones necesarias, sustentadas en leyes de la geometría. De ahí que sea importante diseñar secuencias de tareas que promuevan el razonamiento deductivo, cuando se descubren hechos geométricos, y que luego estos se utilicen para resolver problemas.

El problema “Rompecabezas” es un problema de construcción, que para este curso corto se aborda en dos momentos. En el primero se invalida la intuición y la percepción como estrategia para resolver este tipo de problemas; en el segundo momento se realizan actividades que buscan consolidar la estrategia teórica, como estrategia válida para resolver este tipo de problemas.

## INTRODUCCIÓN

La geometría como ciencia de las construcciones busca responder dos preguntas: ¿cómo producir una construcción exacta? y ¿cómo justificar que esa construcción es exacta? Con el propósito de responder estas preguntas y al mismo tiempo promover el razonamiento inductivo y deductivo, se deben diseñar actividades que le permitan al estudiante comprender qué es una construcción exacta, y afianzar una estrategia teórica. La estrategia teórica consiste en utilizar los hechos geométricos<sup>1</sup> explorados, en razonamientos deductivos, para poder resolver los problemas de geometría (Álvarez, Alonso, Gorina, 2012).

El trabajo con estudiantes me ha permitido identificar comportamientos predecibles concernientes a la rutina para resolver un problema de construcción: al momento de intentar solucionar el problema, emplean una estrategia intuitiva, o de ensayo y error, por lo que utilizan diferentes herramientas de construcción del *software* de geometría dinámica (SGD), que en algún momento producen la construcción deseada, estrategia perceptiva. Una vez que el estudiante cree que

---

Garzón, M. (2024). Rompecabezas: un problema de construcción para entrenar el razonamiento deductivo. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 51-58. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

logró realizar la construcción, acomodando los vértices de la figura, considera que solucionó el problema. La dificultad de utilizar esta estrategia para resolver un problema de geometría reside en que tal estrategia carece de rigor matemático y, por ende, la solución del problema no cumple con las condiciones geométricas requeridas.

Por lo anterior, se propone diseñar problemas que permitan tomar consciencia de la necesidad de utilizar estrategias teóricas; en ese sentido, se plantea el siguiente problema de construcción, en el que la estrategia perceptiva queda invalidada desde el principio, e invita a utilizar la estrategia teórica (Margolinas, 2009/1998).

## DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

El problema se soluciona en dos momentos: en el primero, se pretende inutilizar la estrategia perceptiva, utilizando el SGD; en el segundo momento se utiliza la estrategia teórica. Para el segundo momento se han diseñado varias tareas secuenciadas para descubrir y formular hechos geométricos necesarios para utilizarlos como argumento de justificación.

### Primer momento: inutilizar la estrategia perceptiva

*Tarea 1.* Formar un cuadrado con las cuatro piezas del rompecabezas.

Se entrega a cada asistente el triángulo de la imagen 1. Sobre las líneas se deben realizar cortes, con lo que obtendrán cuatro piezas.

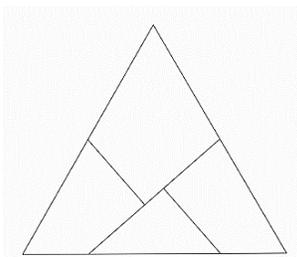


Imagen 1: rompecabezas formado por cuatro piezas

La primera tarea pide formar un cuadrado con las cuatro piezas obtenidas al recortar; es importante que encuentren la manera de formar el cuadrado realizando la menor cantidad posible de movimientos para pasar del triángulo al cuadrado.

Tarea 2. Modelar en el software DGPAD – Colombia las dos figuras en una construcción.

La segunda tarea pide representar en el SGD las dos figuras (el triángulo y el cuadrado) en una construcción. Para ello deben tener en cuenta las condiciones dadas y las condiciones que se puedan deducir de las dadas (véase tabla 1).

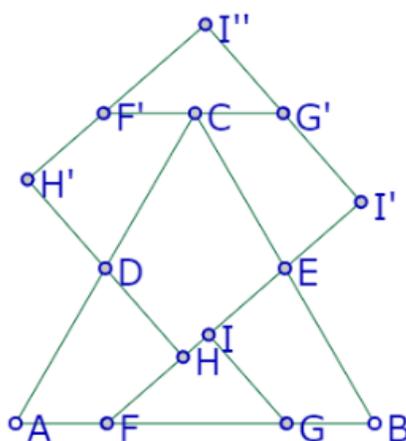
Condiciones dadas	Figura
<p>El triángulo <math>ABC</math> es equilátero.</p> <p>El punto <math>D</math> es el punto medio de <math>AC</math>.</p> <p>El punto <math>E</math> es el punto medio de <math>BC</math>.</p> <p>El segmento <math>FG</math> es igual al segmento <math>AD</math>.</p> <p>El segmento <math>DH</math> es perpendicular al segmento <math>EF</math>.</p> <p>El segmento <math>IG</math> es perpendicular al segmento <math>EF</math>.</p> <p>El cuadrilátero <math>HI'I'H'</math> es un cuadrado.</p>	 <p>The diagram shows an equilateral triangle <math>ABC</math> with vertices <math>A</math> (bottom left), <math>B</math> (bottom right), and <math>C</math> (top). Point <math>D</math> is the midpoint of <math>AC</math>, and point <math>E</math> is the midpoint of <math>BC</math>. A horizontal segment <math>FE</math> is drawn below <math>AC</math> and <math>BC</math>. Point <math>F</math> is on <math>AC</math> and point <math>G</math> is on <math>BC</math>. A segment <math>FG</math> is drawn below <math>FE</math>. Point <math>H</math> is on <math>FE</math> such that <math>DH \perp FE</math>. Point <math>I</math> is on <math>FE</math> such that <math>IG \perp FE</math>. A square <math>HI'I'H'</math> is constructed with vertices <math>H</math>, <math>I</math>, <math>I'</math>, and <math>H'</math>. Point <math>I''</math> is the top vertex of the square, and <math>H'</math> is the left vertex. Lines connect <math>H'</math> to <math>F</math>, <math>F</math> to <math>C</math>, <math>C</math> to <math>I''</math>, <math>I''</math> to <math>H'</math>, and <math>I''</math> to <math>I'</math>.</p>

Tabla 1: condiciones dadas del problema y representación de las dos figuras construidas

Aquí es importante la intervención del profesor para aclarar que el objetivo no es hacer una simulación del rompecabezas, donde las figuras se puedan mover, y con esto pasar del triángulo al cuadrado, sino realizar una representación de las piezas, donde se vean simultáneamente el triángulo y el cuadrado en una misma figura. De igual manera, es necesario que el estudiante conozca el SGD, para que realizar esta tarea no se convierta en una exploración del SGD.

Aunque la tarea del profesor es acompañar las posibles construcciones de los estudiantes, no se trata de que les indique cómo hacer la construcción, sino que facilite el uso de las herramientas de construcción de DGPAD. En esta parte es común que los estudiantes resuelvan el problema de 3 maneras (véase tabla 2).

Teniendo ya la aparente construcción exacta, se realiza la puesta en común de la experiencia, para conocer los hallazgos, las dificultades y las experiencias de los estudiantes frente al manejo del SGD (dado que algunos acababan de conocer el SGD).

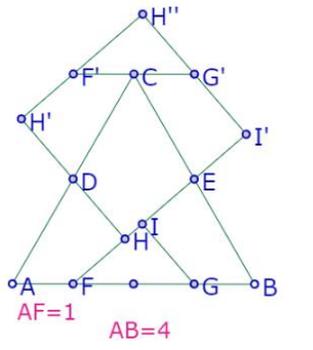
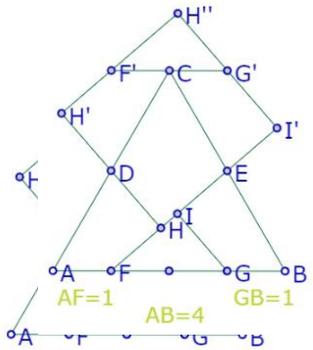
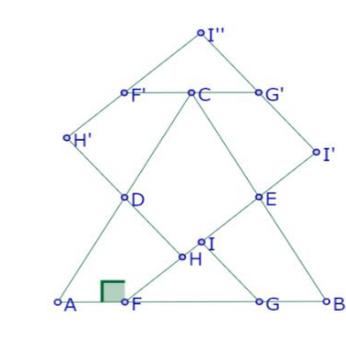
<p><math>AF</math> es un cuarto de <math>AB</math></p>  <p><math>AF=1</math> <math>AB=4</math></p>	<p><math>AF</math> es igual a <math>GB</math></p>  <p><math>AF=1</math> <math>AB=4</math> <math>GB=1</math></p>	<p><math>DF</math> es perpendicular a <math>AB</math></p> 
---	--	---

Tabla 2: condiciones añadidas por los estudiantes, al problema

La actividad del primer momento concluye tras la justificación por verificación. Es decir, se miden los lados del cuadrilátero para verificar que sea un cuadrado. Es aquí donde se espera que los estudiantes invaliden la estrategia perceptiva. Esto, debido a que luego de la medición, el cuadrilátero no es un cuadrado sino un rectángulo.

Es posible que los estudiantes duden de que el problema tenga solución, y que lo que construyeron con las piezas del rompecabezas físico, no era un cuadrado. Aquí es importante mostrar una construcción del problema (véase imagen 2), que afirme, que es posible realizar la construcción exacta.

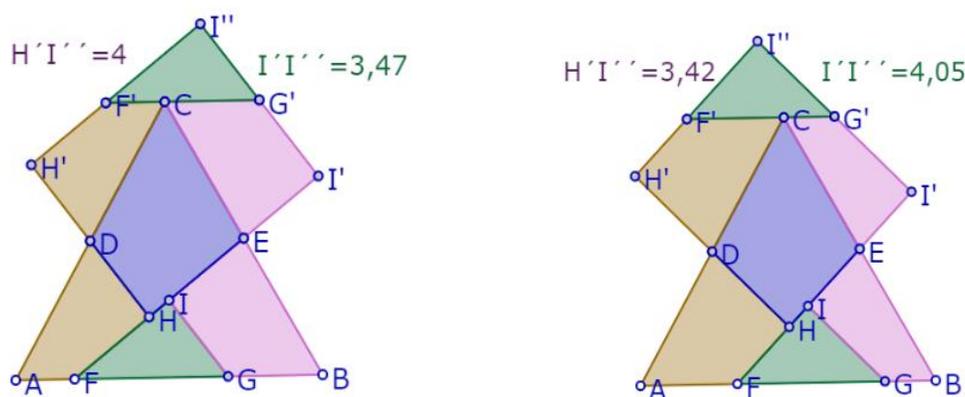


Imagen 2: construcción blanda del rompecabezas

Las dos figuras son la misma. Para comunicar que el problema sí tiene solución, se puso el punto  $F$  sobre el segmento  $AB$ , esto con el propósito de que el punto se pueda mover sobre el segmento. Lo que se quiere mostrar es que al poner a  $F$  sobre algún punto del segmento  $AB$ , un lado del cuadrilátero  $H'I''H'$  mide más que el lado adyacente, y moviendo  $F$  a otra posición del segmento  $AB$ , la

situación de los lados se invierte. Se concluye que ubicando a  $F$  en algún punto del segmento  $AB$ , los lados adyacentes miden lo mismo. Habiendo comunicado que el problema sí tiene solución, se da continuidad al desarrollo del problema pasando al siguiente momento.

## Segundo momento: utilizar la estrategia teórica

En el segundo momento se usa la estrategia teórica, que consiste en producir deducciones que permitan conocer cómo realizar la construcción exacta. Sin embargo, la producción de deducciones requiere tener disponibles dos hechos geométricos que se presentan más adelante. Con la intención de que el estudiante descubra y formule tales hechos geométricos se diseña una secuencia de tareas que será una oportunidad para entrenar el razonamiento inductivo. Luego, se espera que estos hechos geométricos se utilicen para resolver el problema.

Para descubrir cada hecho geométrico se plantea un problema, para cuya solución se utiliza como medio, el SGD DGPad – Colombia. El estudiante interactúa con el medio y pretende resolver el problema utilizando la técnica del hilvanado<sup>2</sup>. A través del hilvanado se puede observar qué propiedades parecen cumplirse; luego, en otra vista del mismo *software*, se debe verificar si tal propiedad forma el lugar geométrico<sup>3</sup> de todos los puntos que cumplen la propiedad solicitada, es decir, el hecho geométrico.

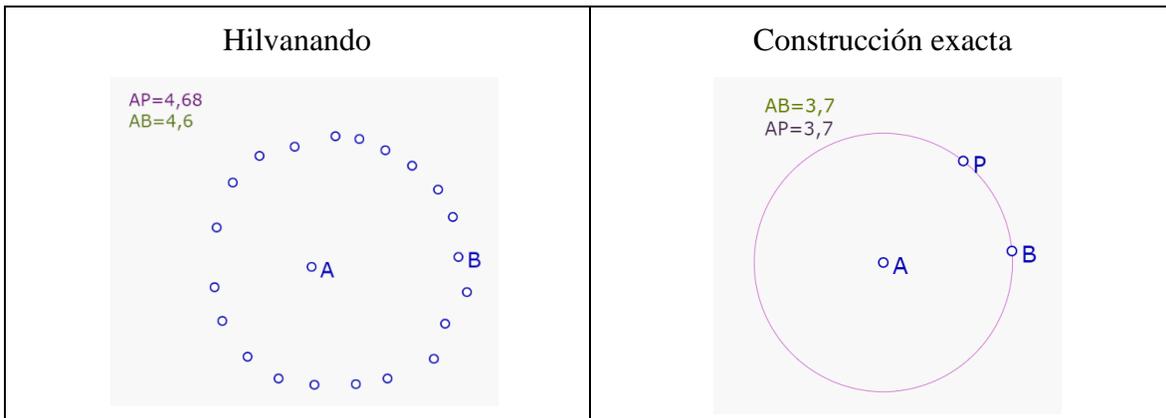
*Primer hecho geométrico:* Si dos puntos  $X$  y  $Y$  pertenecen a un mismo círculo de centro  $O$ , entonces  $OX = OY$ . (Igualdad de distancias)

*Tarea 1.* Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , construir 20 puntos  $P$  tales que  $AB = AP$ .

---

<sup>2</sup> En geometría la técnica del hilvanado consiste en dibujar muchos puntos de un lugar geométrico para poder caracterizarlo.

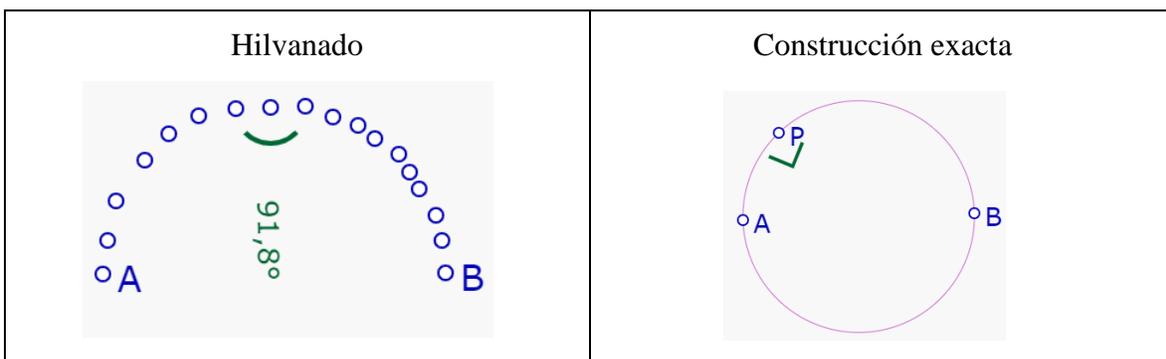
<sup>3</sup> Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.



Tarea para descubrir el primer hecho geométrico

*Segundo hecho geométrico:* Si  $P$ , es un punto diferente de  $A$  y  $B$ , y pertenece al semicírculo de diámetro  $AB$ , entonces  $\angle APB = 90^\circ$ . (Ángulo recto)

Tarea 2. Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , construir 20 puntos  $P$  tales que  $\angle APB = 90^\circ$ .



Tarea para descubrir el segundo hecho geométrico

Ya que se conocen los hechos geométricos, es tiempo de empezar con la producción de deducciones que permitan resolver el problema.

Tarea 3. Realizar, a mano alzada, el dibujo del rompecabezas con las dos figuras, en un documento en Word.

Realizar, a mano alzada, el dibujo del triángulo y el cuadrado en una sola figura exige pensar en las propiedades que cumplen las figuras, y no en lo que parece o imaginamos que se cumple, pero que no está dado por el problema.

Se debe realizar el dibujo a mano alzada en Paint, luego pegarlo en un documento Word y especificar las condiciones dadas en el problema. El documento

se utiliza para escribir las propiedades que se cumplen, y las que se pueden justificar a través de invocar leyes de la geometría (deducciones).

*Tarea 4. Realizar las deducciones.*

Es importante realizar la tarea 4 de manera colectiva, pues se debe privilegiar la discusión y argumentación como actividad principal en las clases de geometría. En consecuencia, se inicia con la producción de deducciones, se espera que estas queden escritas en el documento.

Para gestionar la producción de deducciones, es útil tener en cuenta a) las condiciones dadas en el problema, y b) los hechos geométricos descubiertos.

El sentido de las deducciones es que estas van arrojando información acerca de las propiedades que cumplen los puntos en el rompecabezas, por ende, se pretende que a medida que produzcan propiedades, se intente realizar la construcción exacta. En consecuencia, esta estructura deductiva es la que se espera que se utilice para resolver problemas de geometría (estrategia teórica).

*Tarea 5. Organizar las deducciones.*

Es posible que se tengan muchas deducciones, y aún no se haya logrado realizar la construcción exacta. Esto puede pasar por varios motivos: las deducciones hechas no tienen un sustento teórico, las deducciones no tienen un orden lógico deductivo, o se han producido deducciones sin un propósito claro. Por lo anterior, es indispensable que el profesor esté atento a las situaciones de trabajo y pueda intervenir para problematizar y orientar este proceso de resolución del problema.

El profesor debe intervenir para que se revise que las deducciones estén bien justificadas, luego, y cómo ejercicio preciso para que las deducciones gestionen la solución del problema, se pide que ordenen las deducciones a partir de los puntos del rompecabezas, es decir, que se organicen las deducciones teniendo en cuenta **qué puntos sé construir** (sea por las condiciones dadas o por las deducciones producidas), y que, en otra parte del documento, se escriban **qué puntos aún no sé construir**.

Lo anterior permite que los estudiantes cambien su forma de ver el problema y razonen de otra manera, identificando qué puntos están dados por el problema, y qué puntos se pueden construir a partir a de las deducciones realizadas.

En este punto de la actividad, se invita a verificar que el cuadrilátero es un cuadrado; sin embargo, es posible que, por el tratamiento de las deducciones y el proceso de resolución del problema, los estudiantes puedan anticipar, sin necesidad de medir, que el cuadrilátero sí es un cuadrado (véase imagen 3).

El desarrollo de la resolución del problema favoreció el entrenamiento del razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo. Confirma la potencia del uso de SGD en las clases de geometría, se privilegia la discusión y la argumentación, y finalmente, como se estableció, se logra comunicar que la estrategia perceptiva no favorece la solución de un problema de geometría, mientras que la estrategia teórica, sí garantiza una construcción exacta.

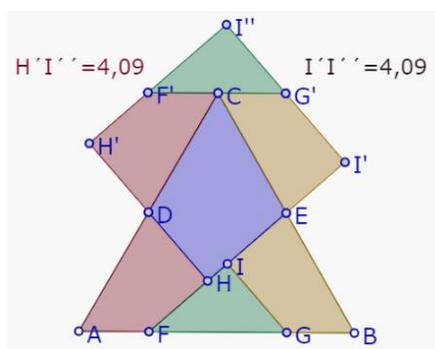


Imagen 3: solución del problema del rompecabezas

## REFERENCIAS

- Acosta, M. y Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Álvarez, M. Y., Alonso, I. y Gorina, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica (pp. 625-634). En R. Flores (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y CLAME.
- Margolinas, C. (2009/1998). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas* (Martín Acosta y Jorge Fiallo, trads.). Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

# ESPACIO Y TRAYECTORIAS: OPORTUNIDADES PARA COMPRENDER LA DIVERSIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**Olga León<sup>1</sup>, Angélica Devia<sup>2</sup>, Weimar Muñoz<sup>3</sup>, Paola Niño<sup>4</sup> y John Páez<sup>5</sup>**  
(<sup>1 2 4 5</sup>) *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, (<sup>3</sup>) *Universidad de La Salle*  
olleon@udistrital.edu.co

La diversidad se constituye en un rasgo que evidencia tanto espacios como trayectorias, para que una cantidad considerable de personas puedan aprender, enseñar o investigar las matemáticas para todos y todas. Este cursillo profundiza en tres trayectorias. La primera explora una relación geométrica subyacente en los trabajos de Newton y de Leibniz sobre el teorema fundamental del cálculo y su adaptación a herramientas tecnológicas actuales. La segunda trayectoria explora recursos geométricos para la eliminación de barreras en el aprendizaje de números enteros en ambientes con estudiantes con discapacidad intelectual. La última trayectoria es una inmersión en inteligencia artificial donde se propone una geometría para los espacios de problema, articulada a un modelado computacional para caracterizar rutas de jugadores en un juego estructurado matemáticamente.

## INTRODUCCIÓN

La reflexión sobre el espacio es connatural al desarrollo de la geometría y, a su vez, es fuente de experiencias para reconocer la diversidad como un ambiente de aprendizaje en la educación matemática. Las trayectorias son los caminos que se ofrecen como posibilidades para comprender formas alternativas de explorar objetos de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Las diferencias entre espacios y trayectorias no se constituyen en un obstáculo para la comprensión, sino en un valor que fortalece las condiciones que fomentan una educación matemática con todos. Al respecto, Blanco (1999, p. 55) señala que “Difícilmente se puede aprender a respetar las diferencias si no se convive con ellas, si las diferencias de cualquier tipo se obvian y se excluyen”. Se presentan a continuación tres experiencias con el espacio, en el marco de tres trayectorias de investigación.

León, O., Devia, A., Muñoz, W., Niño, P. y Páez, J. (2024). Espacio y trayectorias: oportunidades para comprender la diversidad en educación matemática. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 59-70. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## RELACIÓN GEOMÉTRICA EN LOS TRABAJOS DE NEWTON Y DE LEIBNIZ SOBRE EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y SU ADAPTACIÓN CON *SOFTWARES* EDUCATIVOS

El teorema fundamental del cálculo (TFC) es una piedra angular del análisis matemático (Dunham, 2005), pero citar el momento o fecha exacta de la emergencia de este teorema es una labor imposible. Adicionalmente, si se hace una investigación histórica de los objetos matemáticos que lo componen, habría que irse hasta la época de la matemática griega. No obstante, se señala en la sociedad académica que lo que actualmente se reconoce como cálculo diferencial e integral tuvo su apogeo a partir de la segunda mitad del siglo XVII con los trabajos desarrollados por toda una generación de matemáticos, entre los que sobresalen Isaac Newton y Gottfried Leibniz. El TFC emergió en los estudios de Newton y de Leibniz de manera independiente y por caminos distintos (Muñoz, León y Font, 2023). Sin embargo, ambos abordaron y resolvieron un problema común y de una alta dificultad en su época: el problema inverso de las tangentes y su relación con aquel de las cuadraturas (encontrar áreas) (Scriba, 2014). En sus manuscritos y publicaciones aparecen además ejemplos de la fuerza de los algoritmos que inventaron, esto es, lo que se reconoce actualmente como tablas de integración (Muñoz-Villate, 2021; Scriba, 2014; Bressoud, 2011). El argumento que se expondrá a continuación puede desarrollarse a partir del trabajo de Hendrick van Heuraet, publicado en la segunda edición de *La Géométrie* de Descartes (Panza, 2005) o a partir del escrito de Leibniz del *Acta Eruditorum* de 1693 (Muñoz, 2021). Se empleará la siguiente versión del TFC y el argumento geométrico subyacente en los trabajos de Newton y de Leibniz es el que permite presentar de una manera diversa su segundo ítem:

### Teorema fundamental del cálculo

Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ , entonces  $g'(x) = f(x)$ .  
 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , donde  $F$  es una antiderivada de  $f$ , es decir,  
 $F'(x) = f(x)$ . (Stewart, 2015)

Para una presentación alterna del primer ítem, podría consultarse, por ejemplo, el desarrollo propuesto por Newton en 1704 (Muñoz, 2022) o si se quiere una entrada aritmética, se podría estudiar desde la perspectiva de Leibniz como operadores inversos (Villate y Corredor, 2023). Adicionalmente, se dispone también de una presentación del TFC completo, a partir de los trabajos de Newton

de 1666 y de Leibniz de 1693 (Muñoz, 2021). Como puede advertirse, la oferta de presentaciones del TFC desde el punto de vista histórico es bien variada.

Se aprovecha entonces esta fuente de argumentos que suministra el estudio histórico del TFC para exponer la segunda parte del TFC. Desde los trabajos de Newton, el argumento geométrico que permitió resolverlo nació de una modificación del teorema de van Heuraet, es decir, el teorema que permitió calcular lo que se reconoce en la actualidad como la longitud de arco. Este era conocido como el problema de la rectificación de curvas que, al ser resuelto de manera geométrica, tiene una relación directa con el problema de las cuadraturas (Panza, 2005). Básicamente, el resultado de Newton al modificar el teorema de van Heuraet y que permite calcular el área bajo una curva, es el siguiente:

$$\int_a^b f'(x)dx = [f(b) - f(a)] \cdot K, \text{ para una cierta constante positiva } K.$$

En el caso de Leibniz, este argumento de comparar áreas con cuadraturas se evidencia en su escrito de 1693, donde además propone un argumento dinámico o de movimiento de tracción para resolver problemas del cálculo de áreas donde no es sencillo encontrar la primitiva de la función original (Muñoz, León y Font, 2023; Blåsjö, 2015). Se mostrará a continuación un ejemplo puntual sobre cómo desplegar este resultado en un *software* dinámico.

Ejemplo. Calcular la cuadratura de la curva  $f(x) = \frac{4}{x}$  sobre el intervalo  $[2,3]$ .

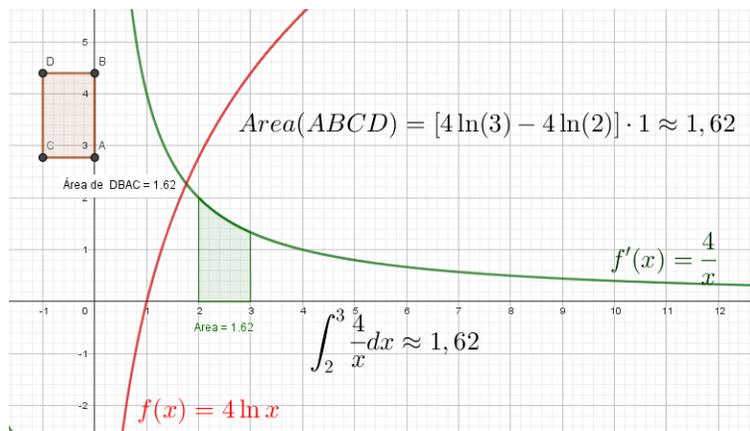


Figura 1: diagrama que muestra el cálculo de la cuadratura de una función

La idea tanto de Newton como de Leibniz fue calcular el área bajo una curva comparándola con el área de un rectángulo, es decir, explícitamente se calcula

la cuadratura: la aproximación de un área con aquella de un cuadrado (adecuado). Para esta función seleccionada, se realizan los siguientes cálculos (véase figura 1):

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_2^3 \frac{4}{x} dx = [f(b) - f(a)] \cdot K = [4 \ln(3) - 4 \ln(2)] \cdot 1 \approx 1.62$$

Analíticamente, el argumento parece trivial, porque el producto por ese 1, nunca se ha evidenciado. Sin embargo, al realizar las gráficas, en este caso en el *software* GeoGebra, se pueden comparar de manera geométrica las áreas obtenidas en ambos resultados, realizando la integral definida y aquella del rectángulo  $[f(b) - f(a)] \cdot K$ , para  $K = 1$  y  $f(x)$  la primitiva de la función original. Este argumento geométrico permite ver la integral definida desde la relación en su génesis, es decir, desde aquel que pretende encontrar la cuadratura de una curva. Como consecuencia del rescate de este argumento geométrico, se puede contar a la fecha con otro significado parcial de la integral definida (Muñoz y León, 2023). Este resultado es una muestra de cómo el trabajo histórico sobre un objeto matemático permite diversificar la manera de interpretarlo, de visualizarlo y manipularlo vía un *software* educativo adecuado. La propuesta es clara: diversificar la manera de enseñar un objeto matemático, retomando los estudios históricos como fuente para recuperar o recordar formas de resolver problemas (donde emergieron esos objetos) que pueden ser más intuitivas que aquellas formales que aparecen actualmente en los textos universitarios.

## UNA ENTRADA GEOMÉTRICA PARA ELIMINAR BARRERAS AL APRENDIZAJE DE NÚMEROS ENTEROS DE ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL

En el campo de la educación matemática emerge la necesidad de comprender la discapacidad intelectual (DI) en relación con los procesos de aprendizaje. La DI se identifica como un trastorno en el desarrollo intelectual, que incluye limitaciones en los dominios conceptual, social y práctico (OMS, 2001; Fernández, Cobacho, Berruezo y Gosálvez, 2010). En el área de matemáticas, la presencia de DI se asocia a dificultades que se manifiestan en el aprendizaje. No todas las experiencias de fracaso en educación matemática responden a razones neurológicas, algunas provienen de la enseñanza o de situaciones diversas vividas por los sujetos con o sin discapacidad. Las dificultades que presentan niños con bajo rendimiento en matemáticas pueden derivarse de una interacción de factores

ambientales como la calidad de la educación, las oportunidades de aprender, el desarrollo temprano y el entorno de aprendizaje en el hogar (Broitman y Sancha, 2021; Clements y Sarama, 2019). El diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA), que incorpora tres estrategias de entrada (aritmética, algebraica y geométrica), además de proporcionar modelos concretos (González y Palomá, 2014; González *et al.*, 1989), ofrece una oportunidad para el desarrollo de una experiencia de aprendizaje con un sistema numérico distinto al de los números naturales. La multiplicidad de representaciones ofrecida por las tres entradas se constituye en una posibilidad de participación de diferentes zonas cerebrales.

En la *estrategia aritmética*, el progreso de una niña con discapacidad se evidencia a partir de situaciones que evocan experiencias de desplazamientos espaciales. Por ejemplo, ella menciona para  $-4$ , “4 pasos a la izquierda”; para  $+2$ , “2 pasos a la derecha” o “2 lápices que gane”; para  $-7$ , “7 pasos hacia abajo”; y para  $+8$ , “8 pasos hacia arriba”. En la *estrategia algebraica* se usa el tablero de vectores; ella identifica cómo realizar comparaciones entre números relativos para hallar un elemento faltante (véase figura 2) y reconoce cómo realizar la representación de procesos aditivos y describe una regularidad (figura 2, derecha) en cuanto a las operaciones que se presentan, mencionando que “cuando se suma, se mantiene la dirección de las flechas dependiendo del color y cuando se resta se cambia la dirección”. En la *estrategia geométrica* se utiliza el circuito cerrado cuyo objetivo es encontrar un camino o circuito entre dos o más fichas. El juego, en el que hay un tablero cuadrado dividido en 16 casillas y 16 fichas en forma de flecha las cuales tienen tres características: 7 fichas valen 3 puntos, 8 fichas valen 2 puntos y 1 ficha vale 1 punto. Durante la solución se realizan diferentes transformaciones, reconociendo cuándo se cumple la condición del circuito y cuándo no. En el último nivel, la estudiante ubica las familias negativas hacia la parte izquierda y las familias positivas hacia arriba (véase figura 2c), la estudiante detecta patrones aritméticos cuando señala por colores que las familias de los números aparecen en “diagonal”.

En general, progresión de aprendizaje se evidencia en la trayectoria de aprendizaje real, es una evidencia de las posibilidades de aprendizaje que tienen los niños que siendo diagnosticados con discapacidad intelectual transitan por niveles de aprendizaje y experiencias fenomenológicas que para el caso de la trayectoria con los enteros les permitió transitar desde de las situaciones relativas hasta el dominio numérico propio de los números enteros.



a) estrategia aritmética

b) estrategia geométrica

c) estrategia algebraica

Figura 2: estrategias utilizadas en el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje

## EVOLUCIÓN EN EL USO DE ANALÍTICA DE DATOS E INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA COMPRENSIÓN DE TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE USANDO GRAFOS

En educación, los problemas son instrumentos didácticos. En el diseño de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, los problemas son el punto de partida que considera las habilidades de los sujetos antes de iniciar el proceso. Durante el proceso de solución, el sujeto recorre una o varias trayectorias previamente consideradas por los educadores. Si bien, hay problemas de diseño que consideran diversas trayectorias y puntos de solución, también hay problemas estructurados que tienen definidas características como estado inicial, estado meta, operadores y reglas. Estas restricciones son útiles en diseño didáctico por cuanto hay un control del ambiente educativo. Un ejemplo son los juegos matemáticos como las torres de Hanoi, cuatro caballos, la escalera, el problema de las ocho reinas, fichas deslizables, etc. Este tipo de juegos estructurados brinda una mayor certidumbre de las macro acciones de intervención didáctica. Sin embargo, los espacios de los problemas que representan esos juegos contienen gran cantidad de estados y transiciones de estados, con lo cual a los profesores que implementan estos juegos en las actividades de clase no les resulta sencillo realizar el seguimiento detallado de las trayectorias reales de aprendizaje de los estudiantes con respecto a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que los juegos reclaman. En un caso regular, los profesores traen a clase juegos estructurados con el ánimo de desarrollar diversas habilidades, sin embargo, la misma complejidad del grafo y la complejidad propia de las aulas de clase tienen como consecuencia que el seguimiento de cada una de las trayectorias de aprendizaje sea limitado, incluso no se logre. Para hacer un seguimiento detallado de las trayectorias reales de aprendizaje surge una pregunta acerca de cómo utilizar los grafos, que representan los espacios problema, para identificar y resaltar las condiciones de trayectorias reales de aprendizaje en los espacios problema. En esta línea surge en nuestro grupo de trabajo del Doctorado Interinstitucional en

Educación - Universidad Distrital Francisco José de Caldas (DIE), la analogía de “Waze cognitivo” para expresar la necesidad de diseñar propuestas visuales que representen la relación entre problema, restricciones del problema, trayectorias hipotéticas de aprendizaje y trayectorias reales de aprendizaje. Así, surgen nuestras propuestas de representación de los espacios problema de juegos estructurados con los siguientes propósitos: visualizar la geometría de los espacios problema, identificar la topología de los espacios problema, caracterizar la topología en función del comportamiento de los usuarios y finalmente, generar alternativas basadas en inteligencia artificial que realizar intervenciones asertivas.



Figura 3: página web desarrollada para el estudio de THA en juegos estructurados

*Visualizar la geometría de los espacios problema.* En nuestro trabajo hemos desarrollado una página web que contiene cinco juegos matemáticos (torres de Hanoi, la escalera, fichas deslizables, ocho reinas, cuatro caballos). La ventaja de nuestra página es que guarda los valores vinculados a las trayectorias reales de aprendizaje considerando variables como: tiempo, estados, transición de estados, intentos para resolver el juego y cantidad de movimientos. La página y los datos obtenidos son de acceso libre. La dirección es <https://juegosmatematicos.online/> (véase figura 3).

*Identificar la topología de los espacios problema.* De cada juego se diseñó un modelo computacional que tiene como base una función recursiva que llama las reglas de cada juego para generar todos los estados del espacio problema (León, Páez, Palomá, Romero, 2019). Los modelos fueron desarrollados en Matlab (véase figura 4). Las gráficas presentan cuatro modelos de espacio problema de cuatro juegos desarrollados. El juego cuatro caballos consiste en intercambiar la posición de cuatro caballos que pertenecen a dos equipos en un tablero de  $3 \times 3$ . El movimiento de los caballos se alterna por equipos. El juego la escalera

consiste en intercambiar la posición de dos grupos de fichas ordenadas de manera horizontal en un tablero de  $1 \times 2n + 1$ , donde  $n$  corresponde a la cantidad de bloques por grupo. El juego de las torres de Hanoi consiste en trasladar un grupo de discos de una columna a otra. El juego consta de tres columnas y un número de discos de diferentes tamaños que se pueden apilar uno sobre otro en dichas columnas. El juego fichas deslizables es un tipo de rompecabezas que implica mover fichas dentro de una cuadrícula hasta alcanzar una configuración específica. Hay diversas versiones, el juego implementado está compuesto por fichas de diferente tamaño.

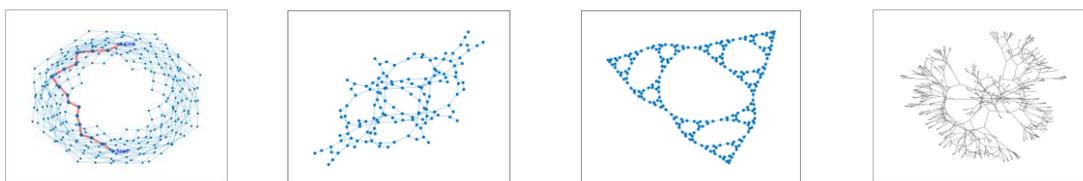


Figura 4: tipologías de los espacios de problema de los juegos cuatro caballos, la escalera, torres de Hanoi, fichas deslizables

*Caracterizar la topología en función del comportamiento de los usuarios.* Aunque estos juegos son utilizados en educación matemática, no es común encontrar representaciones del espacio del problema que utilizan la teoría de grafos, así como tampoco es común encontrar caracterizaciones de las topologías de los juegos utilizando técnicas de analítica de datos. Nuestro grupo ha desarrollado prácticas de recolección de datos para caracterizar las tendencias de trayectorias de los usuarios. Los sujetos entran a la página web mencionada anteriormente, y responden datos básicos como nombre, institución, edad, nacionalidad, y otras preguntas personalizables. A partir del análisis de los datos de los jugadores hemos caracterizado la topología de los grafos (véase figura 5), identificando las regiones de nodos en función de condiciones como transiabilidad, centralidad, índice para provocar ramificaciones, índice para provocar buclidad e índice para generar bloqueos en el juego (Páez, León, Cobos, Romero, Martínez, Betancur, 2021; Páez, Cobos, Aguirre, Molina y Liévano, 2022).

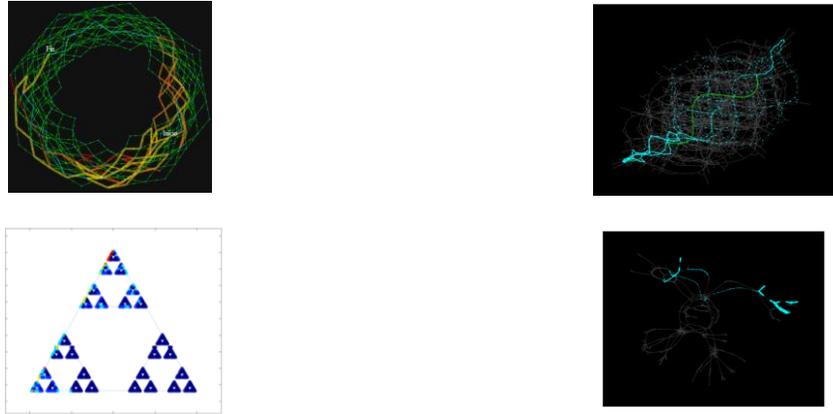


Figura 5: caracterización de la topología de los espacios problema

*Generar alternativas basadas en inteligencia artificial que realiza intervenciones asertivas.* Como resultado de procesos de caracterización hemos desarrollado una experiencia en la cual un agente inteligente realiza acciones de andamiaje para realizar intervenciones asertivas durante la solución del juego de las torres de Hanoi y la escalera (Páez y González, 2022; Páez, 2023). Por ejemplo, en las torres de Hanoi, las intervenciones están inspiradas en la teoría de andamiaje de Jerome Brunner y el comportamiento del agente está inspirado en la teoría de razonamiento práctico conocida como BDI (*Beliefs, Desires, Intentions*) propuesta por Jaques Ferber. El resultado de aplicar técnicas de inteligencia artificial durante el desarrollo de trayectorias de aprendizaje está relacionado con menores índices de ramificación y buclicidad durante la solución de juego (Páez, Aguirre e Impedovo, 2023).

Utilizando estos datos, los profesores pueden personalizar las estrategias de enseñanza para abordar dificultades de los estudiantes, como la retención de información o la focalización de la atención, además de monitorear continuamente los patrones de trayectoria puede proporcionar retroalimentación constante sobre el progreso de los niños, permitiendo ajustes rápidos y precisos en las estrategias de intervención.

## CONCLUSIONES

Hemos descrito una alternativa para analizar las trayectorias reales de aprendizaje en espacios de problema vinculados con juegos matemáticos. Consideramos que las opciones de visualización que se derivan de nuestra propuesta contribuyen en alternativas para lograr una mejor comprensión por parte de

profesores y estudiantes de las trayectorias reales de aprendizaje y del efecto de la implementación de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Consideramos que esta forma de representación, la cual usa principios de geometría, no solo configura las condiciones de interpretación de profesores y jugadores, sino que presenta una oportunidad de investigación de cómo los problemas tienen propiedades geométricas que inciden en el comportamiento de los jugadores y, además, cómo el análisis, a través de grafos, de grandes cantidades de datos de jugadores son una oportunidad que está cobrando interés en educación matemática.

## REFERENCIAS

- Artigas-Pallarés, J. (2003). Perfiles cognitivos de la inteligencia límite. *Fronteras del retraso mental. Rev Neurol*, 36(1), 161-167.
- Blåsjö, V. (2015). The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 16(1), 46-50. Disponible online: <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2015-16-1-046.pdf> (acceso 2021/08/01).
- Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *American Mathematical Monthly*, 118(2), 99-115. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099>.
- Broitman, C. y Sancha, I. (2021). Diálogos ineludibles entre didáctica de la matemática y educación inclusiva. En P. Cobeñas, V. Grimaldi, C. Broitman, I. Sancha y M. Escobar M. (eds.), *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad*. La Plata: Editorial EDULP.
- Clements, D. y Sarama, J. (2019). Executive function and early mathematical learning difficulties. En A. Fritz, V. Geraldi y P. Räsänen (eds.), *International handbook of mathematical learning difficulties*. Springer International Publishing AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3>
- Dunham, W. (2005). *The calculus gallery: Masterpieces. From Newton to Lebesgue*. New Jersey: Princeton University Press.
- Fernández, J., Cobacho, J., Berruezo, P. y Gosálvez, C. (2010). Definiciones, modelos explicativos y comorbilidad. En J. García, J. Pérez y P. Berruezo (eds.), *Discapacidad intelectual, desarrollo, comunicación e intervención*. Madrid, España: Editorial CEPE.
- González, E. y Palomá, N. (2014). *El desarrollo de procesos del lenguaje y las matemáticas con incorporación tecnológica. Una apuesta a la diversidad*. Tesis de pregrado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
- González, J. L., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortiz, A., Ortiz, A., Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1989). *Números enteros*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

- León, O., Páez, J., Palomá, N. y Romero, J. (2019). Integrating technology and didactic resources for enhancing learning processes. An exploratory study. En *Theory and practice: An interface or a great divide?* (pp. 318-323). WTM-Verlag.
- Muñoz, W. (2021). Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas. *Ciencia y Educación*, 5(1), 189-204.  
<https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i1.pp189-204>
- Muñoz-Villate, W. (2021). Relations between history of mathematics and training of engineers. *Revista Visión Electrónica*, 15(1). <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/visele/article/view/17471>
- Muñoz, W. y León, O. (2023) Significados parciales de la integral definida desde un estudio histórico en Newton y en Leibniz. En *xvi CIAEM-IACME*. Lima, Perú. Disponible en: <file:///C:/Users/wmunoz/Downloads/1481-8866-1-PB.pdf>
- Muñoz, W., León, O. y Font, V. (2023). A visualization in GeoGebra of Leibniz's argument on the fundamental theorem of calculus. *Axioms*, 12(10):1000.  
<https://doi.org/10.3390/axioms12101000>
- OMS (2001). *Clasificación internacional del funcionamiento, de la discapacidad y de la salud: CIF*. (WHO Library Cataloguing-in-Publication Data)
- Páez, J., Aguirre, D. e Impedovo, M. (2023). Effect of the scaffolding done by a BDI agent on the evolution of learning trajectories. En Z. Kubincová, A. Melonio, D. Durães, D. Rua, M. Rizvi y L. Lancia (eds.), *Methodologies and intelligent systems for technology enhanced learning*, Talleres, 12<sup>th</sup> International Conference. MIS4TEL 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 538. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-20257-5\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-031-20257-5_4)
- Páez, J., Cobos, J., Aguirre, D., Molina, R., Liévano, L. (2022). Learning AnalyTICs: Exploring the hypothetical learning trajectories through mathematical games. En F. de la Prieta *et al.*, *Methodologies and intelligent systems for technology enhanced learning*, 11th International Conference. MIS4TEL 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 326. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86618-1\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86618-1_16)
- Páez, J. y González, E. (2022). Human-robot scaffolding: An architecture to foster problem-solving skills. *J. Hum.-Robot Interact*, 11(3). <https://doi.org/10.1145/3526109>
- Páez, J., León, O., Cobos, J., Romero, J., Martínez, E. y Betancur, J. (2021). Use of digital tools to promote understanding of the learning process in the tower of Hanoi game. En *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Big Data Research (ICBDR '20)*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 26-29.  
<https://doi.org/10.1145/3445945.3445950>
- Panza, M. (2005). *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

- Scriba, C. (2014). Method the inverse of tangents: A dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677). En *Archive for History of Exact Sciences*, 2(2), 113-137.
- Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.

# GEOMETRÍAS ASOCIADAS A ALGUNOS SISTEMAS DE CONTROL

**Nicolás Martínez**

*Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, carrera 45 N.º 26-85, Bogotá, 111321*

*nmartineza@unal.edu.co*

Es sabido que varios sistemas físicos se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero hay una clase particular de estos sistemas –los *sistemas de control*– en los que se tiene de forma explícita una función de control (o de retroalimentación, en algunos textos) que impone más información al sistema. Desde el inicio del estudio de estos sistemas, varios métodos se han establecido, en su mayoría métodos analíticos; sin embargo, estos se pueden replantear por medio de técnicas de geometría diferencial y así explorar nuevas herramientas en estos modelos.

El cursillo que aquí se presenta se divide en dos partes: 1) planteamiento clásico de algunos sistemas de control; 2) elementos básicos de geometría necesarios para los modelos geométricos. El cursillo es una invitación a indagar en métodos modernos de estudio de sistemas tanto físicos como geométricos, pues la exposición tiene como culmen una descripción de una geometría común para todos los modelos descritos en las dos sesiones.

## INTRODUCCIÓN

Los *sistemas de control* son una familia particular de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden (es decir, se encargan de calcular los primeros cambios o velocidades) que están sujetas a una variable adicional, la función de control  $u(t, x)$ , que permite escribir la primera derivada como

$$x' = f(t, x, u).$$

Varios ejemplos se pueden incluir en esta familia de EDO. Sin embargo, lo relevante para nuestro cursillo, no es la variedad de problemas, sino los diferentes métodos de solución de estos y, en especial, su parte geométrica, o *geometrización* de la solución. En este documento veremos, en particular, dos ejemplos que difieren en su método clásico de solución, pero que al introducir el lenguaje adecuado de geometría diferencial notaremos los términos comunes a estas dos situaciones. En el minicurso mostraremos otros ejemplos de sistemas de control, cuya geometrización comparte nuevamente los mismos conceptos en el planteamiento del problema y métodos similares para la solución.

Martínez, N. (2024). Geometrías asociadas a algunos sistemas de control. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 71-79. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

El contenido de estas notas es el siguiente. La primera sección se dedica a la exposición de dos problemas clásicos, seguida de un método de solución. En la segunda sección, se introducen los conceptos mínimos para el planteamiento y posterior solución por medio de geometría diferencial. La última sección contiene comentarios adicionales sobre las geometrías que se pueden asociar a estos sistemas y se plantea una estructura geométrica novedosa con potencial aplicación para entender estos sistemas en su generalidad. Vale la pena aclarar que por exigencias de extensión de las notas no se incluye la explicación de los conceptos y definiciones nuevas, pero sí sus referencias para los lectores interesados.

## DOS PROBLEMAS CLÁSICOS: PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN

En esta sección se aborda el planteamiento de sistemas físicos que son modelados por sistemas de control y se muestra una solución clásica a estos problemas.

### Movimiento de un carro

Entender el desplazamiento de un carro en un plano (modelo más simple por el momento) es un problema interesante y con diversos campos de aplicación. Por ejemplo, se puede recrear para el movimiento de un robot de entrega<sup>1</sup> o de un carro autónomo. En matemáticas es posible encontrar varios planteamientos a este problema; sin embargo, para esta exposición nos concentraremos en el problema geométrico. Nuestro espacio de configuración será  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$  donde  $\mathbb{R}^2$  será el espacio de posición y  $\mathcal{S}^1$  el grado de libertad de giro (angular) del carro. El sistema de control en este caso depende de los movimientos permitidos de un carro (véase figura 1); por ejemplo, desplazamientos adelante-atrás o giros que son movimientos usuales (y permitidos), pero hay movimientos prohibidos como el desplazamiento perpendicular (salvo prototipos que no están en uso comercial en esta época).

---

<sup>1</sup> Para más información sobre este tema se pueden buscar varios recursos en línea, por ejemplo, la sección 13.3.2. *Controllability of Wheeled Mobile Robots* (videos 1 a 4) del curso *Modern Robotics* en coursera.

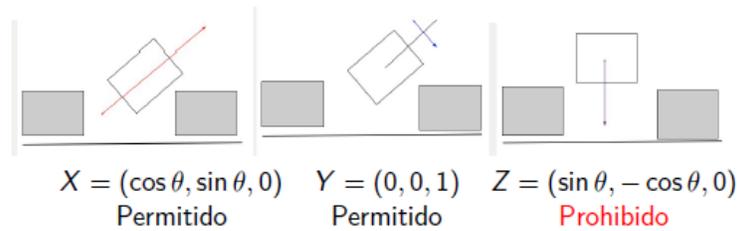


Figura 1: movimiento de un carro

En este caso el sistema de control está definido por las direcciones tangentes al desplazamiento y giro, y está descrito así:

$$x' = uX + vY.$$

## Problema de aceleración

Considere un cohete, que también acelera y frena (desacelera), pero en este caso particular (al no tener fricción o gravedad) frenar también consume combustible. El caso del cohete presenta un problema de optimización, pues acelerar y frenar se traduce en consumo de combustible y en el espacio (fuera del globo terráqueo) no se puede repostar, lo que hace al combustible un recurso limitado. El sistema de control asociado se puede describir por medio de la variable de posición y velocidad. Como es usual en mecánica clásica, la derivada de la posición es la velocidad y la derivada de la velocidad es la aceleración, la cual es la función objetivo a optimizar. El sistema de control queda entonces como:

**Variabes de estado:**  $x$  posición y  $y$  velocidad.

**Variable de control:**  $u \in [a_{min}, a_{max}]$  aceleración.

Con estas variables, el sistema de aceleración queda planteado así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

donde  $u$  optimiza el funcional de energía  $J(u) = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt$ .

Teniendo el planteamiento de los dos casos, se procede a entender su solución.

## Solución al movimiento de un carro

El problema que se puede plantear para este sistema de control es si dado un espacio de tamaño suficiente para el carro, ¿podemos parquearlo? La solución es **sí**. Esto se ve todos los días, pero ¿cuál es el concepto matemático que nos

permite entender esta solución? Lo primero por resaltar en este caso, es que el sistema de control está definido por las tangentes a las curvas (curvas posición o curva dada por el giro); por lo tanto, debemos considerar los **espacios tangentes**. Para esto, introducimos el concepto de **distribución geométrica**. Toda variedad geométrica  $M$  tiene asociado un espacio tangente en cada punto,  $T_p M$  el cual es un espacio vectorial de la misma dimensión de la variedad. Una distribución tangente  $D$  es una función que a cada punto de la variedad se le asigna  $D_p$  un subespacio vectorial de  $T_p M$ . La distribución  $D$  se dice de **rango constante**, si la dimensión de  $D_p$  no cambia.  $D$  se dice **integrable**, si en cada punto  $p \in M$  existe una subvariedad  $L$  conexa e inmersa en  $M$  tal que  $T_p L = D_p$ . El siguiente paso, es el concepto más importante asociado a este problema: el **corchete de Lie** de dos **campos vectoriales**  $X$  y  $Y$ <sup>2</sup>. Esta operación mide cuánto *no conmutan* los caminos generados por los campos.

Vamos a entender los caminos generados por un campo vectorial  $X$  a todas las curvas cuyos vectores tangentes coinciden con  $X$ . Denotaremos  $c_X$  a estas curvas. Nótese que  $c_X$  tiene como variables  $t$  (entendido como tiempo o dominio de la curva) y  $p$  en  $M$ , la que garantiza que la curva pasa por el punto (figura 2).

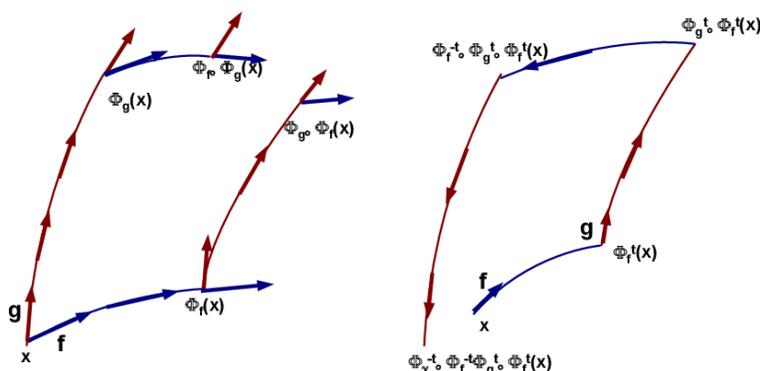


Figura 2: imagen tomada de Ermal Feleqi (2015): *Commutators of smooth and nonsmooth vector fields*

<sup>2</sup> La noción de campo vectorial es el mismo que en cálculo: una función que a cada punto se le asigna un vector.

Para un sistema de control lineal  $x' = \sum_{i=1}^k u_i X_i$ , del cual el problema del carro es un caso particular, definimos conjunto alcanzable como

$$R(p) = \{c_{X_k}(t_k, \cdot) \circ \dots \circ c_{X_1}(t_1, \cdot) | t_j \geq 0\}.$$

Y con esto, se tiene el primer gran resultado:

### Teorema de Rashevsky-Chow

Para el sistema de control lineal  $x' = \sum_{i=1}^k u_i X_i$  en  $M$  conexa, si  $Lie\{X_1, \dots, X_m\} = TM$ , entonces  $R(p) = M$  para todo  $p \in M$ .

Donde la operación Lie significa la iteración finita de todos los campos vectoriales  $X_i$  por medio de los corchetes de Lie. Este resultado lo que dice es que si se genera todo el espacio tangente por medio de los corchetes de Lie, entonces dos puntos en  $M$  arbitrarios se pueden conectar siguiendo los caminos generados por los campos  $X_i$ .

Nótese que en el caso del carro se tiene que  $[X, Y] = Z$ , y por dimensión del espacio de configuración, se tiene que el sistema es alcanzable; por lo tanto, con movimientos adelante-atrás y giros el carro puede llegar a cualquier punto del plano, en particular, puede parquear.

Observación: los conceptos de distribución, campos vectoriales, derivación por campos vectoriales, corchete de Lie, derivadas exteriores y productos (para la siguiente sección) y otros asociados tienen un componente de *diferenciabilidad* o *suavidad* como funciones u operadores derivables. Estos conceptos están fuera del objetivo de estas notas, pero se recomienda al lector los siguientes textos (Lee, 2011) como complemento adecuado a estos temas.

### Solución al problema de aceleración

El sistema de control asociado al cohete tiene la restricción de optimizar el consumo de combustible. Esta situación es similar al caso de optimización con restricciones para funciones de varias variables, que en cálculo vectorial tiene un método conocido como multiplicadores de Lagrange (Marsden y Tromba, 2004). En este caso, toda solución del problema debe tener asociadas tres funciones auxiliares tales que:

$$x'_0 = y_0, y'_0 = u_0, y, \gamma' =, \gamma'_0 = -\gamma_1$$

$$|u_0(t)| + \gamma_0 u_0 \leq |u(t)| + \gamma_0 u.$$

Este es un caso particular de lo que se conoce como *principio del mínimo de Pontryagin*: Sea  $x' = f(t, x, u)$  un sistema de control con variables de estado y control (con puntos extremos) respectivamente

$$x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n, u: [t_0, t_1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n.$$

Si existe  $u_0$  función minimizando el funcional

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt$$

y  $x_0$  solución del sistema, entonces existen funciones  $\gamma^0, \gamma_0^0: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que

$$\begin{aligned} x'_0 &= \nabla_\gamma H(x_0, u_0, \gamma^0, \gamma_0^0), \gamma_0^{0'} = -\nabla_x H(x_0, u_0, \gamma^0, \gamma_0^0) \\ H(x_0, u_0, \gamma^0, \gamma_0^0) &\leq H(x_0, u, \gamma^0, \gamma_0^0) \end{aligned}$$

para  $u \in U$ , y donde  $H(x, u, \gamma, \gamma_0) = \gamma L(x(t), u(t), t) + \gamma_0^T f(x(t), u(t), t)$ , es conocida como función *hamiltoniana del sistema*.

Esta solución se puede esquematizar en el siguiente diagrama conmutativo (véase figura 3), con hamiltoniano  $H = \langle \gamma, f \rangle + L$ .

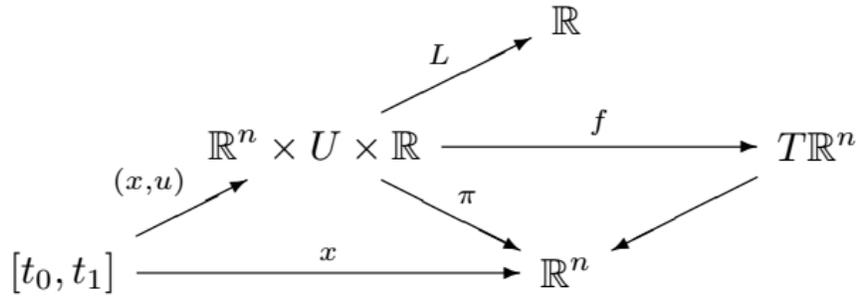


Figura 3: esquema de optimización de Pontryagin

Esta misma situación se puede promover a variedades diferenciales, donde cambiamos el espacio de configuración euclidiano por una variedad arbitraria  $P$

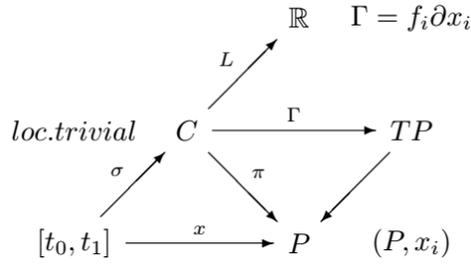


Figura 4: fibrado de Pontryagin

y la variedad  $C$  codifica (localmente) el espacio de control con variable de control dada por  $u(t) \in \pi^{-1}(x(t))$  (véase figura 4).

Continuando con los ingredientes geométricos de la solución al principio de Pontryagin, debemos considerar, adicional a los campos vectoriales, los campos co-vectoriales y su álgebra exterior. Para más detalles en estos temas, se recomienda consultar la referencia (Lee, 211). En todo caso, recordemos que un co-vector (o funcional) es una aplicación lineal de un espacio vectorial en el campo escalar. Por notación tomaremos el producto interno o contracción  $i_X\alpha$  como la evaluación  $\alpha(X)$ . Adicional a esto, se puede considerar el producto anti-simétrico (también conocido como producto cuña o producto exterior) dado por

$$i_X i_Y \alpha \wedge \beta = (\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$$

y se extiende de forma lineal y a producto de finitos co-vectores. En principio, esta operación se puede definir a nivel de álgebra lineal, pero también se puede adaptar en variedades usando adecuadamente el espacio de co-vectores tangentes  $T_p^*M$  y sus productos externos al variar suavemente en  $p$  en el mismo sentido que se mencionó previamente en la observación. Como último comentario, antes de plantear el resultado geométrico, se tiene que  $T^*M$ , entendido como la unión disyunta de todos los espacios tangentes  $T_pM$ , forma una nueva variedad diferencial, que en particular viene dotada de un *co-vector tautológico*  $\alpha_T$  que genera un 2-covector  $d\alpha_T$  (es decir, ahora se evalúa en dos campos vectoriales) por la operación

$$i_X i_Y d\alpha_T = d\alpha_T(X, Y) = X\alpha_T(Y) - Y\alpha_T(X) - \alpha_T([X, Y]).$$

Este es un caso particular de lo que se conoce como *forma simpléctica*. Ahora sí, podemos establecer el resultado geométrico a este sistema de control:

### Teorema de extremos

Una curva  $\gamma: [0, T] \rightarrow M$  es extremo del funcional  $J(\sigma) = \int_0^T L(\sigma(t))dt$  si y solamente si existe  $X \in TM$  tal que  $i_X\Omega = dH$  para  $H(\alpha, c) = i_{\Gamma(c)}\alpha - L(c)$ .

Donde  $M = T^*P \times_P C \xrightarrow{\tau} T^*P$  es conocido como *fibrado de Pontryagin* y  $\Omega = \tau^*d\alpha_T$  es la extensión de  $d\alpha_T$  a  $M$  y  $H$  hace el papel de la función hamiltoniana en el planteamiento original del principio de óptimo de Pontryagin.

Observación: en este caso, las soluciones están asociadas a la relación  $i_X\Omega = dH$ , la cual genera un ejemplo de lo que se conoce como el teorema de Frobenius para la distribución  $\Delta = \ker(\Omega)$ .

### Teorema de Frobenius

Una distribución regular  $\Delta$  es integrable si y solo si  $[\Gamma(\Delta), \Gamma(\Delta)] \subset \Gamma(\Delta)$ , donde  $\Gamma(\cdot)$  es el espacio de campos vectoriales en dirección de  $\Delta$ .

## COMENTARIOS ADICIONALES

Ya hemos visto lo versátil que pueden ser los operadores diferenciales en geometría, con los que hemos planteado soluciones a los dos ejemplos tratados aquí. Lo interesante es que una metodología similar puede ser aplicada a otros sistemas de control que aparecen de forma natural cuando se modelan otros sistemas físicos. En particular, en el minicurso se presentan los siguientes casos.

Sistemas hamiltonianos: es un ejemplo de mecánica clásica donde la segunda ley de Newton (una EDO de segundo orden) se puede reducir de orden para obtener un sistema de EDO como sistema de control. Este caso tiene la peculiaridad de poderse equipar con una acción por un grupo de simetrías que reduce la dimensión del problema (por ejemplo, considere la rotación de la tierra). La solución viene dada por las curvas asociadas a los campos vectoriales hamiltonianos, además se satisface la condición original de Jacobi, la que afirma que hay una operación en la cual dos constantes de movimiento, al operarse, su resultado también es constante de movimiento.

Circuitos eléctricos: en circuitos RLC con voltaje inicial, las leyes de Kirchof producen un sistema de control conocido como sistema port-hamiltoniano con un término adicional de campo eléctrico. Las soluciones de sistemas port-hamiltonianos están asociadas a secciones auto-ortogonales (asociadas a operaciones anti-simétricas) de un fibrado que agrupa los campos vectoriales y campos co-vectoriales.

En cada uno de estos casos, podemos incluir términos geométricos adicionales que interpreten la solución a cada problema. Yendo aún más allá en términos geométricos, todos estos términos pueden incluirse en una estructura que abarca (o interpola) las geometrías anteriormente citadas. Esta nueva estructura fue planteada originalmente por Ted Courant (y de forma casi simultánea, con otras motivaciones por Irene Dorfman) y fue el punto de origen para lo que en la actualidad se conoce como *geometría generalizada*. Para una discusión de lo anterior con referencias completas se recomienda la lectura de Gualtieri (2011).

Solo para mencionar lo principal de esta nueva geometría, vamos a considerar  $L$  como subfibrado de  $TM \oplus T^*M$  (es decir, una colección de subespacios vectoriales de  $T_pM \oplus T_p^*M$  en cada punto de  $M$ ) que satisface las siguientes dos condiciones.

*Auto-ortogonal.* En  $TM \oplus T^*M$  se puede definir un producto interno dado por la evaluación  $\langle X \oplus \alpha, Y \oplus \beta \rangle = \alpha(X) + \beta(Y)$ , para el cual se cumple que  $L = L^\perp$ .

*Involutivo.* Para secciones de  $L$ , se tiene que es cerrado (en el mismo sentido que el teorema de Frobenius ya mencionado) para el corchete

$$[X \oplus \alpha, Y \oplus \beta] = [X, Y] \oplus \text{Lie}(X)\beta - i_Y d\alpha.$$

Satisfechas de forma simultánea estas dos condiciones, constituyen las *estructuras de Dirac*, que contienen como casos particulares, los fibrados de Pontryagin, el teorema de Frobenius, los corchetes dinámicos del ejemplo de sistemas hamiltonianos y por-hamiltonianos, y una extensión del teorema de Rashesvki-Chow. Como se mencionó al inicio del documento, es una nueva geometría que involucra todos los métodos geométricos de las soluciones de sistemas de control presentados. Para más información en esta dirección se recomienda la lectura de van der Schaft (2007).

## REFERENCIAS

- Gualtieri, M. (2011). Generalized complex geometry. *Annals of Mathematics*, 174, 75-123.
- Lee, J. M. (2011). *Introduction to topological manifolds*. Springer.
- Marsden, J. y Tromba, A. (2004). *Calculo vectorial*. Addison Wesley.
- van der Schaft, A. (2007). Port-hamiltonian systems: An introductory survey. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Madrid, España: European Mathematical Society.



# MODELACIÓN GEOMÉTRICA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

**Oswaldo Rojas y Luz Fonseca**

*Universidad Antonio Nariño, IED Nuestra Señora de la Salud*

[orojasv69@uan.edu.co](mailto:orojasv69@uan.edu.co), [lfonseca54@uan.edu.co](mailto:lfonseca54@uan.edu.co)

Este artículo da a conocer los resultados de una investigación cuyo objetivo fue contribuir al desarrollo del pensamiento matemático, a través de la modelación geométrica y la resolución de problemas, en estudiantes del grado octavo, de una institución de Cundinamarca. Los resultados demuestran que los estudiantes lograron un progreso notable en el desarrollo de habilidades para resolver problemas tanto en contextos simulados como reales, a través de los cuales construyeron conceptos matemáticos sólidos y con sentido. Por tanto, la organización y la planificación cuidadosa de las actividades prácticas en la enseñanza de las matemáticas contribuyeron de manera significativa al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

## INTRODUCCIÓN

Abordar, en la escuela, situaciones problemáticas centradas en el mundo real es un método esencial para acercarse al conocimiento matemático y una oportunidad para aplicar todo lo aprendido. Uno de los procesos que lo dinamiza es la resolución de problemas retadores, apoyados por la modelación, debido a que existe una conexión esencial entre estos (Fonseca y Rojas, 2023). El modelado relaciona el mundo real y las matemáticas; por ende, es importante generar momentos en el aula para modelar, donde se permita desarrollar habilidades para la resolución de problemas por medio de situaciones en contextos auténticos.

Un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática que incluya la resolución de problemas mediante la modelación geométrica necesita una metodología de clase que integre estos enfoques. Esta integración concede el desarrollo oportuno y adecuado del saber matemático, donde se fortalece el aprendizaje significativo y el interés de los estudiantes hacia el conocimiento (Stillman, Kaiser y Lampen, 2020).

A través de la aplicación de métodos empíricos e instrumentos como encuestas a profesores, entrevistas a expertos y la revisión de la literatura, se constatan

dificultades de la resolución de problemas en los estudiantes: limitado reconocimiento de variables y las relaciones entre ellas (Sol, Giménez y Rosich, 2011), escasas estrategias de abordaje para el análisis y la justificación, falta de habilidades para la comprensión y contextualización de un problema (Socas, Hernández y Palarea, 2014), y la limitada comprensión para explicar las relaciones entre objetos reales y las matemáticas. Además de las restringidas destrezas para explorar un problema social y abordarlo matemáticamente (Edo, Putri y Hartono, 2013; Kadjevich, 2009).

En este sentido, la investigación involucra contextos reales y auténticos, cercanos a los estudiantes, en la medida en que favorecen la construcción de conceptos relacionados con la matemática discreta, la geometría computacional, entre otras, de manera significativa y motivadora apoyada en el uso de recursos tecnológicos.

## PERSPECTIVAS DE LA MODELACIÓN GEOMÉTRICA

Considerando los resultados investigativos de Bliss y Libertini (2020), Stillman (2015) y Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007), el modelado es el medio para relacionar las matemáticas y la realidad, logrando despertar afinidad en el estudiante por conocer temas matemáticos en un contexto específico. De este modo, la modelación puede ser vista como una forma mediadora entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela, debido a sus conexiones con la realidad, pues según Bliss y Libertini (2020), la modelación permite usar el lenguaje de las matemáticas para cuantificar fenómenos del mundo real y analizar comportamientos.

Reconociendo que la modelación geométrica es propia de la modelación matemática, se registran algunas definiciones presentadas por autores que han vinculado la modelación geométrica en la práctica educativa de las matemáticas. Es así como Alsina (2008), Zapata, Cano y Villa (2017), Herbst y Boileau (2018), Ludwig y Jablonski (2019) y Baldín (2021), en términos generales, consideran que podría apreciarse como un proceso donde el conocimiento de la geometría se utiliza para representar objetos de la realidad, así como una forma de representar experiencias en el espacio y la forma. En este sentido, los investigadores resaltan la “representación” como un eje fundamental de la modelación y enfatizan en la importancia que esta tiene para la resolución de problemas.

En el estudio sobre el que reporta este documento, la modelación geométrica se establece como un proceso intencional de representación, donde se utilizan conocimientos y recursos para llevar a cabo el análisis, formulación y elaboración de un modelo, el cual brinda elementos para hacer inferencias que favorecen la solución de un problema en un contexto geométrico (Fonseca, 2024).

La modelación geométrica por ser un caso particular de la modelación matemática trae inmersos dos procesos significativos en la educación matemática: la cognición y la metacognición (Kaiser, 2020). Los procesos cognitivos se encargan del procesamiento, almacenamiento, construcción y autorreflexión de la información, y, sobre todo, de la construcción del conocimiento. Para González y León (2013), la cognición se activa en procesos que permiten al individuo apropiarse de la realidad, uno de los cuales es la resolución de problemas en contextos auténticos (contextos propios del estudiante). De esta manera, puede la cognición relacionarse, según Stillman (1996), con la cantidad de información necesaria para alcanzar una solución y los métodos que deben combinarse para producir un resultado provisional o final del problema.

La relevancia de la modelación geométrica en la escuela reside en su utilidad como estrategia didáctica, ya que permite la creación y el uso de modelos que facilitan la resolución y el planteamiento de problemas en contextos reales o simulados. Esto da sentido a la aplicación de las matemáticas en un entorno de aprendizaje enriquecido. De este modo, la modelación geométrica en el aula puede darse desde dos procesos cognitivos y dos campos por modelar (véase tabla 1).

Proceso cognitivo	Campo por modelar	
	Intramatemático	Extramatemático
Intencional	<p>Los estudiantes poseen dominio de determinados conocimientos de geometría.</p> <p>Aplican recursos de geometría apoyados en la exploración, la visualización matemática, la manipulación geométrica, la conjeturación, y la heurística, en la resolución de problemas.</p>	<p>Los estudiantes aplican sus conocimientos geométricos a situaciones del contexto y a la construcción de nuevos conceptos.</p> <p>Se apoyan en herramientas como la visualización matemática, la manipulación geométrica y la heurística, donde modelan con recursos analíticos y de interpretación geométrica, para alcanzar la solución a un problema.</p>

Fortuito	Los estudiantes llegan de forma inesperada, durante la vía o camino de solución del problema. La lógica puede conducir a una expresión, que permite un cambio de variable, para conseguir una expresión equivalente a la inicial.	Este proceso puede ocurrir en el aula en la resolución de problemas de contexto, por casualidad y, sin reconocerlo, los estudiantes hacen uso del modelado.
----------	---	---

Tabla 1: clasificación de la modelación geométrica según proceso cognitivo y campo por modelar (Fonseca, 2024, p. 58)

Por ende, se adopta el “enfoque holístico” considerado por Stillman, Kaiser y Lampen (2020), en el cual, el modelador trabaja en grupo con problemas donde se evalúa el modelo como un todo, adoptando un ciclo simplificado, como el propuesto por Brown y Stillman (2017) (véase figura 1).

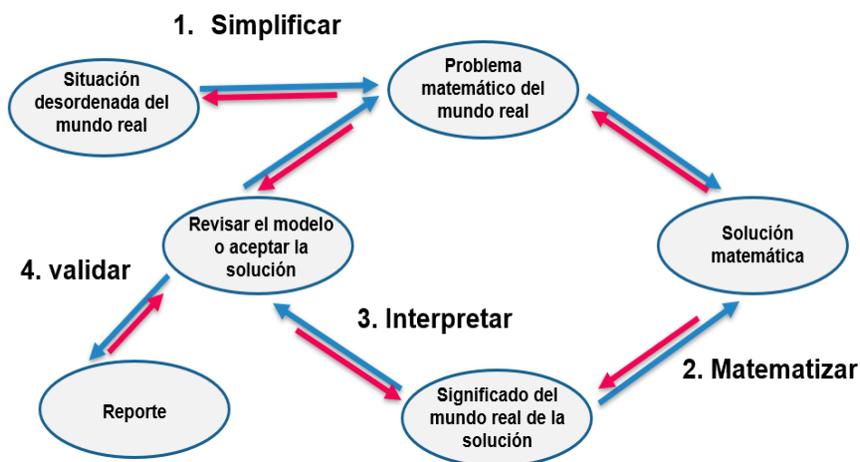


Figura 1: ciclo de modelado simplificado por Brown y Stillman (2017, p. 358)

En este ciclo se proporciona a los modeladores una manera retadora de solucionar problemas cotidianos. Por consiguiente, se presentan fases claves, que van desde la concepción de una situación desordenada del mundo real en la cual se identifica un problema, y terminan con una exposición final sobre la actividad de modelación y la resolución del problema. En el ciclo que presenta la figura 1, las flechas de color rojo muestran el proceso de la actividad cognitiva y las azules el proceso metacognitivo. Para este estudio se definen de la siguiente manera las fases del ciclo de modelado.

- *Simplificar*: los estudiantes idean modelos y eligen matemáticamente la manera de representarlos.

- *Matematizar*: los estudiantes hacen uso de sus conocimientos matemáticos, del modelo propuesto y de estrategias heurísticas para dar solución a un problema matemático.
- *Interpretar*: los estudiantes relacionan los resultados matemáticos con un problema extra-matemático, de tal manera que puedan llegar a una generalización con base en situaciones específicas.
- *Validar*: los estudiantes analizan sus soluciones en relación con sus pares y reflexionan sobre los aciertos o las oportunidades de mejora, y reconocen qué otras soluciones al problema son posibles.

## FUNDAMENTOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL CONTEXTO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas se ha fortalecido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula con el transcurrir de los años, convirtiéndose en una metodología de trabajo en varios países del mundo. En este sentido, para Stanic y Kilpatrick (1988), los problemas han ocupado un lugar fundamental en el currículo matemático en la escuela, aunque los términos “problema” y “resolución de problemas” se han asumido con diversos significados. Entre estos, los autores señalan los siguientes: resolver problemas como contexto, como habilidad y para hacer matemáticas.

A partir de las definiciones de problemas retadores abordadas por diversos investigadores (*e. g.*, Krulik y Rudnik, 1987; Falk, 1980; Díaz y Poblete, 2001), los problemas retadores son aquellos que deben integrar conceptos coherentes y hacer vínculos con otros pensamientos de las matemáticas y que para encontrar su solución obligan a los estudiantes a construir redes o mapas conceptuales que favorezcan el aprendizaje, además de profundizar su comprensión de las matemáticas.

El desarrollo del pensamiento matemático ha cobrado interés en toda la comunidad académica, que busca, sin duda, un avance en las habilidades matemáticas de los individuos. En este sentido, Sfard (1991), desde la perspectiva biológica, explica que desarrollar las habilidades para aprender matemáticas implica un esfuerzo continuo. Este trabajo vincula procesos cerebrales simples, como la atención, la memorización o procesos mentales más complejos, como organizar ideas, comparar, analizar, razonar, generalizar, seguir pasos, asumir reglas y tomar decisiones.

Por su parte, para Schoenfeld (2016) aprender a pensar matemáticamente tiene dos tipos de significados. El primero hace referencia a la valoración que debe darse a los procesos de matematización, abstracción y habilidad para aplicarlos. El segundo aborda el desarrollo de competencias para usar herramientas con el objetivo de comprender. Por eso, ambos tipos se dirigen a la creación de sentido matemático, para percibir y usar las matemáticas. Es así como “el conocimiento matemático de un individuo es el conjunto de hechos y procedimientos matemáticos que puede usar de manera confiable y correcta” (Schoenfeld, 2016, p. 105).

De Guzmán (1996) expone algunas razones, por las cuales considera importante la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático. Entre estas razones se tienen la autonomía, el aporte que ofrece a los procesos efectivos de adaptación a los cambios, el trabajo autorregulador y creativo. Además, mantiene un valor no restringido al mundo de las matemáticas. Por consiguiente, “los hábitos mentales de resolución de problemas preparan a las personas para problemas reales, situaciones que requieren esfuerzo y pensamiento” (Rigelman, 2007, p. 311).

En esta medida, Ersoy (2012) sostiene que el desarrollo del pensamiento matemático comienza cuando un individuo trata de resolver problemas, correlacionando conceptos para llegar a una solución. En este proceso interviene de manera asertiva la selección de estrategias, la experiencia del estudiante y su conocimiento matemático. Entre tanto, Ayllón, Gómez y Ballesta (2016) aseguran que, tanto la resolución como el planteamiento son herramientas potentes que muestran el pensamiento matemático y el nivel creativo. De ahí que, “el pensamiento matemático es una forma ordinaria de pensar y resolver problemas que juega un papel especialmente importante en las matemáticas” (Watson, 2001).

En este sentido, el proceso de resolución de problemas que incorpora la modelación geométrica enriquece y promueve el desarrollo del pensamiento matemático. Wickstrom y Roscoe (2020) sostienen que tanto la modelación geométrica como la resolución de problemas brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar su creatividad y enriquecer su comprensión de las matemáticas. Para Sozcu, Ziatdinov e Ipek (2013), la combinación de estos dos procesos permite la conexión de los conceptos matemáticos, lo que, a su vez, mejora las habilidades de construcción de conceptos y fortalece el pensamiento matemático. Por su parte, Balyakin y Chempinsky (2020) subrayan que el modelado geométrico

tiene un impacto positivo en el pensamiento visual y lógico, además de impulsar las habilidades heurísticas que enriquecen el pensamiento matemático de los estudiantes. Según Herbst (2019), el modelado geométrico robustece el pensamiento matemático al proporcionar oportunidades de aprendizaje a través de la resolución de problemas que conectan el mundo real con el contexto matemático.

## METODOLOGÍA

La investigación se llevó a cabo utilizando un enfoque cualitativo y un diseño de investigación-acción participativa. Este enfoque se centró de manera integral en los sujetos, empleando un proceso inductivo de indagación e interacción con los participantes, y analizando los datos descriptivos recolectados conforme avanzaban los acontecimientos. Además, se busca construir la realidad tal como se observa, de manera objetiva durante todo el proceso, sin alterar ni imponer, donde nos apropiamos de una realidad epistémica en relación con los individuos partícipes (PISA, 2020) Su objetivo fue transformar la realidad, brindando una oportunidad para mejorar y fortalecer el desarrollo del conocimiento matemático en los estudiantes participantes.

El estudio se realiza con 30 estudiantes de secundaria de la Institución Educativa Nuestra Señora de la Salud (Supatá, Colombia) del octavo grado. Esta unidad de análisis se selecciona de manera intencional, según características específicas del grupo, la condescendencia y oportunidad de acercamiento por parte de los investigadores, organizados en 10 grupos equitativos, nombrados como G1, G2 hasta llegar a G10.

Se implementaron ocho actividades didácticas, cada una de las cuales contempló 4 momentos: de exploración, donde se desarrollan ejercicios de visualización mental de objetos geométricos; momento de motivación, donde se llevan a cabo experiencias sencillas en las que se usa material concreto estructurado y no estructurado; momento de estructuración, donde se proponen problemas retadores en base a contextos simulados; y el momento de transferencia, donde se proponen problemas retadores en contextos reales auténticos (lugares conocidos por los estudiantes). El proceso de resolución de problemas se estudia con base en tres fases propuestas por Alsina (2008): abordaje, ataque y revisión. En cuanto, al proceso de modelación se hizo bajo el ciclo simplificado propuesto por Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007) (simplificar, matematizar, interpretar y validar).

Para la recolección de datos se utilizaron ocho rúbricas destinadas a evaluar de manera objetiva y crítica el aprendizaje y las habilidades desarrolladas por los estudiantes durante el proceso. Además, se aplicó una encuesta con preguntas cerradas y algunas abiertas, con el propósito de identificar las percepciones de los estudiantes respecto a la implementación de las actividades en el aula. Además, se lleva a cabo el análisis de las grabaciones en video y la observación participante para la identificación de argumentos relacionados con los logros y dificultades en el proceso de aprendizaje.

## RESULTADOS Y DISCUSIONES

El análisis de los resultados muestra un dominio efectivo del contenido matemático tratado. Los estudiantes utilizan sus conocimientos previos para no solo adquirir nuevos conocimientos, sino también para reforzar aquellos que aún no dominaban completamente. A pesar de que los temas abordados no forman parte del currículo y son de un nivel avanzado, se nota que los estudiantes logran una comprensión sólida de los mismos y se muestran motivados en la exploración y la consolidación de nuevos aprendizajes (véase tabla 2). La planificación y ejecución de las actividades en las cuatro etapas (motivación, exploración, estructuración y transferencia) evidencian un progreso cognitivo notable por parte de los estudiantes.

N.º de actividad	Objetivo	Logros
1. Camino hamiltoniano	Construir el concepto de camino hamiltoniano a través de un contexto real auténtico.	L1. Usaron el concepto de camino para encontrar rutas y patrones en situaciones que implican conexiones entre puntos o lugares. L2. Identificaron las características de un camino hamiltoniano. L3. Reconocieron caminos hamiltonianos en un contexto real.
2. Ciclo hamiltoniano	Construir el concepto de ciclo hamiltoniano a través de un contexto real auténtico.	L1. Entendieron cómo un recorrido puede comenzar y terminar en el mismo vértice, formando un ciclo cerrado. L2. Establecieron diferencias entre un camino y un ciclo hamiltoniano a partir de representaciones visuales.

3. Triangulación de polígonos	Encontrar el área de figuras bidimensionales a través de la descomposición en triángulos por un conjunto máximo de diagonales.	L1. Analizaron cómo los triángulos pueden conformar un polígono de mayor área. L2. Descompusieron figuras en partes más pequeñas y reconstruyeron la figura original al sumar las áreas de los triángulos.
4. Teorema de Chvatal	Usar la triangulación del área de una figura bidimensional y la coloración de sus vértices para representar afirmaciones del enunciado del teorema de la galería de arte de Chvatal.	L1. Descompusieron el área de un polígono en áreas de triángulos. L2. Determinaron el número cromático donde exploran propiedades estructurales de los grafos. L3. Reconocieron que un polígono de $n$ vértices se puede vigilar utilizando con un máximo $\lceil n/3 \rceil$ cámaras.
5. Diagramas de Voronoi	Identificar el concepto de punto, plano, semiplano, segmento, mediatriz y circuncentro en la construcción de un diagrama de Voronoi.	L1. Representaron la división de un espacio en regiones basado en la proximidad a un conjunto de puntos determinados. L2. Reconocieron los límites o fronteras de las regiones de Voronoi como resultado de la división del espacio en función de la distancia a los puntos.
6. Teorema de Viviani (1)	Reconocer las características a partir de las posibles ubicaciones de un punto en una región triangular equilátera para la visualización de afirmaciones enunciadas en el teorema de Viviani.	L1. Identificaron que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados es igual a la altura del triángulo. L2. Reconocieron que independientemente de la posición del punto dentro del triángulo equilátero, la suma de las distancias a los lados siempre será igual a la altura del triángulo.
7. Teorema de Viviani (2)	Reconocer las características dadas a partir de las posibles ubicaciones de un punto en una región cuadrangular.	L1. Reconocieron que independientemente de la posición del punto dentro de un cuadrado, la suma de las distancias a los lados siempre será igual al semiperímetro. L2. Aplicaron conceptos matemáticos para resolver situaciones del mundo real y simuladas.
8. Teorema de las alfombras	Encontrar la congruencia de figuras bidimensionales a través de la des-	L1. Identificaron cómo se superponen dos alfombras y cómo se divide el piso en regiones distintas.

	composición del área para visualizar afirmaciones enunciadas en el teorema de la alfombra.	<p>L2. Comprendieron el concepto de superficie y cómo se puede dividir una superficie en diferentes partes usando objetos geométricos.</p> <p>L3. Calcularon áreas de figuras geométricas que se superponen.</p>
--	--	--

Tabla 2: logros en el aprendizaje, alcanzados por los estudiantes en cada actividad didáctica

Con respecto, a la resolución de problemas en la fase de abordaje, los estudiantes identifican estrategias para resolverlos, hacen uso de la parte experiencial que se da en los primeros momentos de la actividad. En la fase de ataque, se apoyan en reglas geométricas, construyen modelos para llegar a la solución; y en la fase de revisión reconocen sus aciertos y descubren las variadas formas de resolver los problemas.

Enfatizando en las fases de la resolución de problemas, 72% de los grupos en la competencia de abordaje logran un nivel desempeño alto (DA) y 28% en (DM); en la fase de ataque 73% en DA y 27% en DM; y en la fase de revisión un 81% en DA y 19% en DM. En esta medida, se encuentran progresos significativos en cada una de esas fases. Por su parte, la fase con mayor dificultad para los grupos es el abordaje, debido a sus pocas habilidades en la comprensión de un problema y la identificación de variables, lo cual se optimiza a medida del trabajo en aula, como se muestra en el gráfico 1.

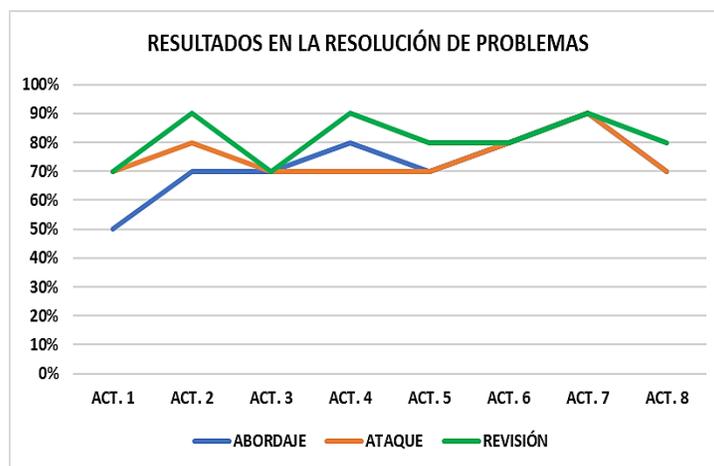


Gráfico 1: desempeño de los grupos en el proceso de resolución de problemas (Fonseca, 2024)

Durante el desarrollo de las actividades, la resolución de problemas es un proceso dinámico que estimula la creatividad de los estudiantes, permitiéndoles

aplicar los conocimientos adquiridos para dar sentido a la realidad. Este proceso demuestra la capacidad de los estudiantes para analizar, comprender, razonar y generalizar a partir de diversos contextos. Así, la resolución de problemas matemáticos desafiantes incorpora la modelación matemática, desarrollándose ambos procesos de manera inherente en los estudiantes.

En relación con la modelación geométrica, en la fase de simplificar, los grupos logran comprender los problemas, por medio de preguntas heurísticas e identifican los aspectos claves. En la fase de matematizar crean diversos modelos y usan algoritmos matemáticos para acercarse a la solución. En la fase de interpretar, a partir de los resultados obtenidos en cada grupo y en la puesta en común con sus pares, consolidan los conceptos previstos para cada actividad. En este sentido, los grupos relacionan estas interpretaciones con el contexto real del problema y en la fase de validar, los estudiantes revisan sus respuestas, identificando si son acertadas y si dan una solución al problema, además comunican a sus compañeros de forma clara sus resultados y cómo llegaron a ellos.

En las fases de la modelación geométrica, la evolución es relevante a medida en que se avanza en la implementación; en la fase de simplificar, 70% de los grupos logran el desarrollo de competencias en un DA y 30% en un DM; en la fase de matematizar, un 73% en DA y 27% en DM; en la fase de interpretar, 75% logra un nivel DA y 25% en DM; y en la fase de validar, 81% se encontró en un DM y 19% en DA. Por consiguiente, las fases de simplificar y de matematizar fueron de mayor exigencia para los grupos, como se muestra en el gráfico 2.

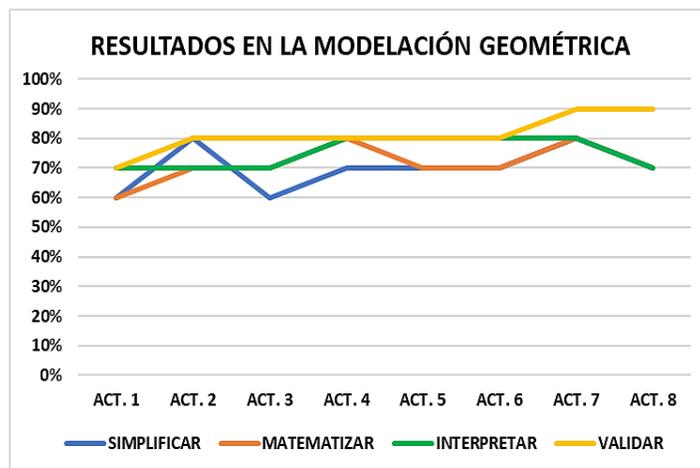


Gráfico 2: desempeño de los estudiantes en el proceso de modelación geométrica (Fonseca, 2024)

La modelación geométrica contribuye sustancialmente a la comprensión de las matemáticas, otorgando significado a la realidad simplificada, que pueden los estudiantes transformar en la formalidad matemática –como lo admite Stillman (2015)–. Los modelos geométricos desarrollados establecen vínculos estrechos con la resolución de problemas, el sentido y el pensamiento matemático.

En consecuencia, la modelación geométrica y la resolución de problemas ofrecen a los estudiantes la capacidad de reconocer la importancia y los beneficios de las matemáticas, mejorando la motivación y la comprensión, lo cual evidencia lo expresado por Díaz y Poblete (2001). Además, les permite seleccionar y utilizar adecuadamente herramientas matemáticas, tanto en entornos reales como simulados. Asimismo, facilita la conexión entre la teoría y la práctica, fomentando un aprendizaje significativo que contribuye al sólido entendimiento de los conceptos matemáticos.

La encuesta (véase gráfico 3) realizada a los estudiantes luego de la intervención en el aula evidencia que 70% de los estudiantes reconocen en un alto grado la motivación para la construcción del aprendizaje, 80% considera que las actividades les generó motivación para el trabajo autónomo, 90% afirman que los problemas trabajado en el aula son retadores y les permite la construcción de conceptos matemáticos nuevos y 70% identifica que existen mejoras en las habilidades y capacidades en los procesos de resolución de problemas y modelación geométrica. En esta medida, existe un buen consenso de los grupos de trabajo y una validación positiva a las actividades didácticas trabajadas.

Con respecto a la pregunta abierta sobre los aspectos que consideran interesantes en las actividades, los grupos dan diversos argumentos. Entre estos, un estudiante del grupo 3 (G3) sostiene que “Los problemas fueron interesantes. Aunque, algunos fueron difíciles, pero pudimos resolverlos”. Por su parte, G7 asegura que “Fue interesante usar la computadora y programas para solucionar los problemas”.

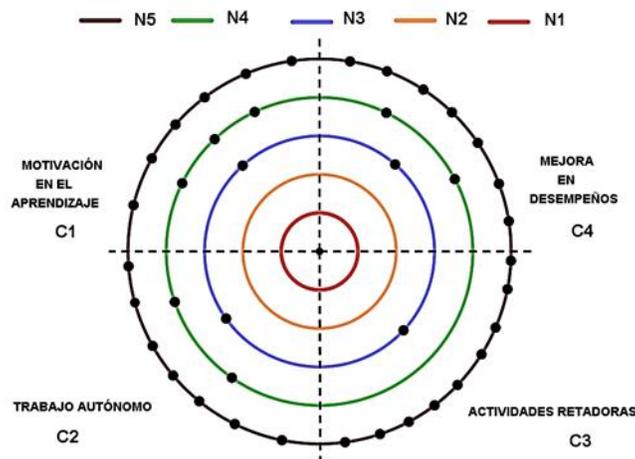


Gráfico 3: resultados de la encuesta de satisfacción (Fonseca, 2024)

## CONCLUSIONES

El conjunto de actividades propuestas favoreció el proceso de aprendizaje, facilitando el desarrollo de habilidades cognitivas, capacidades y la construcción de significado de conceptos de manera integral. Esto permitió que el estudiante integrara exitosamente la tecnología, la comunicación efectiva, la creatividad y el trabajo en equipo en su aprendizaje.

Los estudiantes desarrollaron habilidades para solucionar problemas, utilizando estrategias para encontrar la información clave en cada caso. Además, lograron descomponer los problemas en partes más pequeñas, aplicando conceptos matemáticos a situaciones reales o simuladas. También mejoraron su comunicación al explicar ideas matemáticas de forma clara.

En las fases de modelado geométrico, los estudiantes enfrentaron problemas matemáticos utilizando principios geométricos. Planificaron y crearon modelos precisos que les permitieron analizar situaciones del mundo real, simplificando las complejidades en modelos geométricos más manejables para buscar la abstracción y la generalización. La interacción entre los estudiantes enriqueció su comprensión del tema, y su desempeño en la implementación del sistema de actividades fue mejorando constantemente.

Se considera que el desarrollo de las actividades en cada uno de los momentos que las componen (motivación, exploración, estructuración y transferencia) hizo aportes importantes en el aprendizaje. Por tanto, la organización y la planificación de la acción práctica de la enseñanza de la matemática contribuyó

significativamente al desarrollo robusto del pensamiento matemático de los estudiantes.

## REFERENCIAS

- Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *Sigma*, 33, 165-179.
- Ayllón, M., Gómez, I. y Ballesta, J. (2016). Mathematical thinking and creativity through mathematical problem posing and solving. *Journal of Educational Psychology-Propositus y Representations*, 4(1), 195-218.
- Baldín, Y. (2021). La resolución de problemas y el modelado geométrico. En persona. Colombia.
- Balyakin, A. y Chempinsky, L. (2020). Experience of teaching geometric modeling at schools and universities. *Journal of Physics*, 1691(1)12042.
- Bliss, K. y Libertini, J. (2020). *Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática*. Gaimme. Society for industrial and applied mathematics (SIAM).
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. MA: Springer US.
- Brown, J. y Stillman, G. (2017). Developing the roots of modelling conceptions: ‘Mathematical modelling is the life of the world. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 353-373.
- De Guzmán, M. (1996). “El papel de la visualización”. En *El rincón de la pizarra*. Madrid, España: Pirámide.
- Díaz, M. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, 45, 33-41.
- Edo, S., Putri, R. I. y Hartono, Y. (2013). Investigating secondary school students’ difficulties in modeling problems PISA-model level 5 and 6. *Journal on Mathematics Education*, 4(1), 41-58.
- Ersoy, E. (2012). *The effects of high level thinking abilities on emotional acquirements in learning process based on problem*. Disertación doctoral, Dokuz Eylül University, Social Science Institution. Izmir.
- Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.
- Fonseca, L. (2024). *Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas y la modelación geométrica*. Tesis de doctorado publicada, Universidad Antonio Nariño, Colombia.

- Fonseca, L. y Rojas, O. (2023). *La modelación geométrica en la resolución de problemas de teoría de grafos en un contexto auténtico*. XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Perú: Universidad de Lima
- González, B. y León, A. (2013). Procesos cognitivos: de la prescripción curricular a la praxis educativa. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, 19, 49-67.
- Herbst, P. (2019). Geometric modeling tasks and opportunity to learn geometry: The ranking triangles task revisited. En *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (pp. 123-143). Springer, Cham.
- Herbst, P. y Boileau, N. (2018). Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake: The role of spatial reasoning in mathematical thought En *Visualizing Mathematics*. Springer, Cham.
- Kadijevich, D. (2009). Simple spreadsheet modeling by first-year business undergraduate students: Difficulties in the transition from real world problem statement to mathematical model. En M. Blomhj y S. Carreira (eds.), *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education*. IMFUFA 461 (pp. 241-248).
- Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 553-561). Springer, Cham.
- Krulik, S. y Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon
- Ludwig, M. y Jablonski, S. (2019). Doing math modelling outdoors-A special math class activity designed with MathCityMap. En *5<sup>th</sup> International Conference on Higher Education Advances* (pp. 901-909). Valencia, España: Universitat Politècnica de València.
- Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.
- Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012) *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María, pp. 155, 2012.
- Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) (2020). Colombia. [https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018\\_CN\\_COL\\_ESP.pdf](https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf)
- Rigelman, N. (2007). Fostering mathematical thinking and problem solving: The teacher's role. *Teaching Children Mathematics*, 13(6), 308-314.
- Schoenfeld, A. (2016). *Mathematical thinking and problem solving*. Routledge.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sigarreta, J. y Marcia, J. (2003). Modelo didáctico para la formación axiológica a través de la resolución de problemas matemáticos. *Matemática, Educación e Internet*, 4(1).

- Socas, M., Hernández, J. y Palarea, M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria. En *Funes*, 145-154.
- Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4, 329-343.
- Sozcu, O. F., Ziatdinov, R. e Ipek, I. (2013). The effects of computer-assisted and distance learning of geometric modeling. *European Researcher*, 39(1-2).
- Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum En R. I. Charles y E. A. Silver (eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.
- Stillman, G. (1996). Mathematical processing and cognitive demand in problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 8(2), 174-197.
- Stillman, G. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? En *Selected regular lectures from the 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education* (pp.791-805). Springer, Cham.
- Stillman, G., Kaiser, G. y Lampen, C. (2020). *Mathematical modelling education and sense-making*. Springer.
- Watson, A. (2001). Instances of mathematical thinking among low attaining students in an ordinary secondary classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(4), 461-475.
- Wickstrom, M. y Roscoe, M. (2020). Geometric modeling: Determining the largest lake. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 113(8), 643-650.
- Zapata, F., Cano, N. y Villa, J. (2017). *Art and geometry of plants: Experience in mathematical modelling through projects*. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 585-603.



Encuentro de  
**GEOMETRÍA**  
y sus **APLICACIONES**

**19 al 21 de junio de 2024**

**Comunicaciones**





# ¿HEURÍSTICAS –SINTÉTICA Y ANALÍTICA– EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA EN GEOMETRÍA?

**Cynthia Acosta, Francisco Páez y Édgar Guacaneme**

*Universidad Pedagógica Nacional*

cracostal@upn.edu.co, fjpaezs@upn.edu.co, guacaneme@pedagogica.edu.co

Se exponen algunas acciones y reflexiones relacionadas con heurísticas empleadas en la solución de un problema geométrico relacionado con la circunferencia. En estas heurísticas se reconocen diferentes niveles de uso del razonamiento sintético o del razonamiento analítico. Estas formas de razonamiento usualmente se asocian como características fundamentales de la geometría sintética y analítica, respectivamente. A partir de ello, emerge el cuestionamiento sobre la esencia de las heurísticas analíticas y la naturaleza de la geometría analítica.

## INTRODUCCIÓN

Los dos primeros autores somos estudiantes becados por el Programa BECAL de Paraguay para cursar la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) y profesores de las Universidades Nacional de Asunción y Caaguazú (Paraguay), respectivamente. Lo expuesto en este documento surge en el desarrollo de nuestro trabajo de grado de la Maestría, provisionalmente titulado “Diseño de tareas de formación profesional que involucren el uso de GeoGebra para el estudio de la circunferencia desde el punto de vista de la Geometría Analítica” y asesorado por el tercer autor.

Como parte del desarrollo inicial de dicho trabajo de grado, tomamos una decisión metodológica: estudiar la circunferencia desde el punto de vista de la geometría euclidiana y desde la geometría analítica, con el fin de sentar las bases para identificar semejanzas y diferencias en el tratamiento matemático de este objeto en cada geometría considerada.<sup>1</sup> Así, hemos estudiado la circunferencia en *Elementos* de Euclides y haremos lo propio en la *Geometría* de Descartes.

---

<sup>1</sup> Las diferencias y semejanzas las suponemos esenciales en la formación matemática de los futuros profesores de matemáticas. Consideramos que la actividad de estudio realizada puede ser organizada y emulada como un conjunto de tareas en un programa de formación profesional inicial de profesores de matemáticas.

Lo que vamos a presentar enseguida, recapitula y organiza lo sucedido en unas de las sesiones de asesoría del trabajo de grado, lo cual visto retrospectivamente configura, para nosotros, una experiencia significativa de formación profesional. Específicamente, la experiencia refiere al estudio de un problema propuesto en *Elementos* –Proposición III-1: “Hallar el centro de un círculo dado” (Puertas, 1991, p. 293)–, la estrategia de solución empleada por Euclides y dos estrategias a través de las cuales se podría solucionar haciendo uso diferenciado de la geometría analítica. Además, discutimos de qué dependen tales estrategias, resaltando el tipo de geometría en el que se ubica la solución y un cierto “nivel de *sinтетicidad* o *analiticidad*” implicado en cada estrategia.

## EL CONTEXTO DEL PROBLEMA GEOMÉTRICO

El contexto matemático en el que aparece el problema es *Elementos* de Euclides. Al aproximarnos al estudio de los primeros cuatro libros de esta obra, hemos constatado que Euclides exhibe dos formas esenciales de tratamiento de la circunferencia, a saber: como elemento de una heurística y como objeto de estudio.

En efecto, por un lado, la asume como un elemento vinculado a la heurística conocida como “regla y compás”; es decir, asume la circunferencia como uno de los dos objetos que se puede/debe emplear como herramienta en la solución de problemas geométricos. Por ejemplo, en la primera proposición del Libro I (Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada) la usa para describir sendos círculos centrados respectivamente en los extremos de la recta finita y emplea su condición fundamental de equidistancia para postular la existencia de cortes que constituirán el tercer punto del triángulo requerido.

Euclides hace un tratamiento de la circunferencia como objeto en sí mismo; esto es en esencia lo que expone en los Libros III y IV. En estos libros, Euclides desarrolla su teoría de la circunferencia a través de dos tipos de proposiciones: problemas por resolver y propiedades geométricas. En el Libro III establece 11 definiciones y 37 proposiciones, 6 de las cuales son problemas; en el Libro IV expone 7 definiciones y 16 proposiciones, todas ellas problemas.

## TRES ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

### Estrategia 1

Esta estrategia es la empleada por Euclides e involucra una heurística plenamente sintética, ya que emplea lo dado para identificar lo desconocido o construir lo requerido. Veámosla de manera panorámica.

Inicialmente Euclides presenta el círculo  $AB\Gamma$  y manifiesta que se debe encontrar su centro. Posteriormente, dispone trazar la recta  $AB$  y dividirla en dos partes alícuotas, considerando  $\Delta$  como punto de división. A partir de ese punto traza una recta  $\Delta\Gamma$  perpendicular a  $AB$  y la prolonga hasta el punto  $E$ ; divide esta recta  $\Gamma E$  en dos partes iguales por medio de  $Z$ . Luego enuncia que  $Z$  es el centro del círculo. Lo anterior lo acompaña de la imagen de la figura 1.

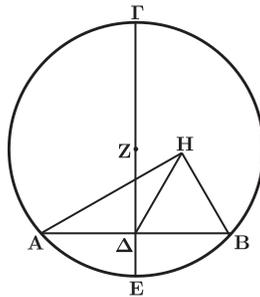


Figura 1: dibujo que acompaña la proposición III-1 (tomado de Puertas, 1991, p. 293)

Para argumentar la validez de lo hecho y enunciado, Euclides utiliza el método de reducción al absurdo; supone que el centro es otro punto, al cual denomina  $H$  y traza los segmentos  $HA$ ,  $H\Delta$ ,  $HB$ . Muestra entonces que los triángulos  $A\Delta H$  y  $B\Delta H$  deben ser congruentes; pero si esto es así, entonces los ángulos  $A\Delta H$  y  $H\Delta B$  tendrían que ser rectos y corresponderse con el ángulo  $Z\Delta B$ . Ello lo lleva a establecer que  $H$  debe estar en la recta  $\Gamma E$  y debe ser precisamente  $Z$ .

### Estrategia 2

Esta estrategia incluye una alusión a aspectos de la geometría sintética e incorpora un trabajo con ecuaciones, característico de la geometría analítica escolar. Así, se hallan los puntos medios de dos parejas de puntos dados de la circunferencia (*i. e.*, los puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ ), se obtienen las dos ecuaciones de las rectas determinadas por dos de las parejas de puntos; luego se establecen las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos determinados por las parejas de puntos y se establece el centro de la circunferencia como la intersección de esas

rectas o como la solución de los sistemas de ecuaciones. Para demostrar que las coordenadas identificadas corresponden a las del centro, se calculan las distancias del punto determinado a los tres puntos dados y se verifica su igualdad. La imagen de la figura 2 contiene información de referencia sobre el problema y su heurística de solución.

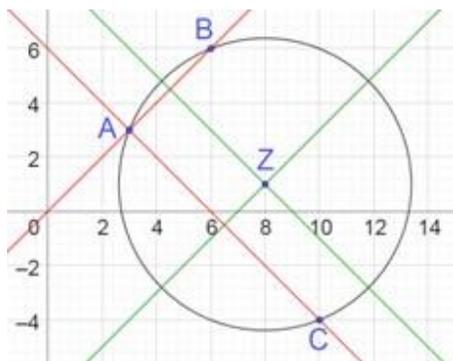


Figura 2: dibujo de la solución mediante la Estrategia 2

Veamos esto para un caso particular. Sean  $A(3, 3)$ ,  $B(6, 6)$  y  $C(10, -4)$  los tres puntos de la circunferencia, para la cual hay que establecer su centro. Calculemos las coordenadas  $x_m$  y  $y_m$  del punto medio de  $\overline{AB}$ :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2}.$$

Así, las coordenadas del punto medio de  $\overline{AB}$  son  $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ . Análogamente, se establecería que las coordenadas del punto medio de  $\overline{AC}$  son  $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$ .

Ahora, utilizando la ecuación cartesiana de la recta, hallamos la pendiente  $m_1$  de la recta que contiene a  $\overline{AB}$  y la pendiente  $m_2$  de una recta perpendicular a ella.

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \therefore \frac{y - 3}{6 - 3} = \frac{x - 3}{6 - 3} \quad \therefore \frac{y - 3}{3} = \frac{x - 3}{3} \quad \therefore y = x \\ y &= mx + b \quad \therefore m_1 = 1 \text{ y como } m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \therefore m_2 = -1. \end{aligned}$$

Empleando la “ecuación punto pendiente” y considerando el punto medio  $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$  y la pendiente  $m_2 = -1$ , hallamos la ecuación de la mediatriz:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \quad \therefore y - \frac{9}{2} = -1x + \frac{9}{2} \quad \therefore 2y - 9 = -2x + 9 \\ \therefore 2x + 2y - 18 &= 0 \quad \therefore x + y - 9 = 0. \quad [1] \end{aligned}$$

De manera semejante para el caso de la recta que contiene a  $\overline{AC}$ , obtenemos como su ecuación  $y = -x + 6$  y, en consecuencia, la pendiente de la mediatriz del  $\overline{AC}$  será 1. Igualmente, empleando la “ecuación punto pendiente” hallamos como ecuación de la mediatriz la siguiente:  $x - y - 7 = 0$  [2].

Buscamos la intersección de las rectas descritas por las ecuaciones [1] y [2], generando y resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 7 \end{cases} \therefore 2x = 16 \therefore x = 8.$$

Substituyendo este valor de  $x$  en la ecuación [1] se obtiene que  $y = 1$ . Por lo anterior, las mediatrices se intersecan en el punto  $Z(8, 1)$ , que es el centro de la circunferencia que pasa los puntos dados.

Para verificar esto procedemos a calcular el radio, que está dado por la distancia del centro  $Z(8, 1)$  a un punto de la circunferencia; en este caso utilizamos el punto  $A(3, 3)$ . Así:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \therefore r = \sqrt{(3 - 8)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{29}.$$

Análogamente se establece que  $\sqrt{29}$  es la distancia entre  $Z$  y  $B$  o entre  $Z$  y  $C$ .

### Estrategia 3

Esta considera una heurística plenamente simbólica, pues aborda el problema a través del uso de la ecuación general de la circunferencia y la determinación de sus coeficientes. Además, emplea las relaciones entre tal ecuación y la ecuación canónica, para obtener el centro y el radio. Veamos cómo procede esta:

En la ecuación general de la circunferencia  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ , reemplazamos por los valores de las coordenadas de cada uno de los puntos. Para:

$$A(3, 3) \text{ se obtiene } 18 + 3D + 3E + F = 0. \quad [3]$$

$$B(6, 6) \text{ se obtiene } 72 + 6D + 6E + F = 0. \quad [4]$$

$$C(10, -4) \text{ se obtiene } 116 + 10D - 4E + F = 0. \quad [5]$$

El sistema de ecuaciones [3] y [4] lo resolvemos obteniendo la ecuación [6]:

$$\begin{cases} 18 + 3D + 3E + F = 0 \\ 72 + 6D + 6E + F = 0 \end{cases} \therefore -54 - 3D - 3E = 0. \quad [6]$$

Igualmente procedemos con [4] y [5], generando la ecuación [7]:

$$\begin{cases} 72 + 6D + 6E + F = 0 \\ 116 + 10D - 4E + F = 0 \end{cases} \therefore -44 - 4D + 10E = 0. \quad [7]$$

Establecemos el valor de  $E$  con el sistema las ecuaciones [6] y [7]:

$$\begin{cases} -54 - 3D - 3E = 0 \\ -44 - 4D + 10E = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} -18 - D - E = 0 \\ -22 - 2D + 5E = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 36 + 2D + 2E = 0 \\ -22 - 2D + 5E = 0 \end{cases}$$

$$\therefore 14 + 7E = 0 \therefore 7E = -14 \therefore E = \frac{-14}{7} \therefore E = -2.$$

Reemplazando este valor en la ecuación  $-18 - D - E = 0$  se establece que el valor del parámetro  $D$  es  $-16$ .

Disponer de los valores de  $D$  y  $E$  nos permite establecer el de  $F$ ; en efecto, reemplazando estos en la ecuación [3] se obtiene que  $F = 36$ .

Con los valores de  $D$ ,  $E$  y  $F$ , y aprovechando las relaciones entre la ecuación general de la circunferencia y la ecuación canónica de esta, podemos obtener el centro  $Z(h, k)$  y el radio  $r$  de la circunferencia, esto es:

$$h = -\frac{D}{2} = -\frac{-16}{2} = 8 \quad \text{y} \quad k = -\frac{E}{2} - \frac{-2}{2} = 1 \therefore D(8, 1)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 36} = \frac{1}{2}\sqrt{256 + 4 - 144} = \frac{1}{2}\sqrt{116} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 29} = \sqrt{29}.$$

## UNA MIRADA AL CONJUNTO DE ESTRATEGIAS Y SUS HEURÍSTICAS

En este punto debe ser claro que lo acontecido en las asesorías, en relación con el problema geométrico en cuestión, permite advertir la “potencial existencia” de al menos tres heurísticas diferentes, asociadas a sendas estrategias de solución presentadas antes. Sin embargo, hasta este punto no es explícito el vínculo de las formas de razonamiento sintético y analítico con/en las estrategias.

Teniendo en cuenta que el razonamiento sintético se caracteriza por usar *lo dado* –y la teoría construida previamente– para encontrar *lo desconocido*, no es difícil reconocer que la Estrategia 1 procede a través de esta forma de razonamiento. En efecto, en esta estrategia se parte de presentar el círculo y sobre este hacer construcciones de segmentos, puntos y rectas que permiten encontrar el centro. Luego, se presenta una cadena de argumentos que garantiza que el punto encontrado efectivamente es el centro del círculo; en esta cadena deductiva no se asume como conocido el centro. Por otra parte, el hecho de que la solución se plantee en el contexto teórico de la geometría euclidiana hace que la estrategia esté totalmente ligada a la geometría sintética.

Asumiendo que el razonamiento analítico se caracteriza por trabajar con *lo dado* y con *lo desconocido como supuestamente conocido*, para con ello establecer el valor de *lo desconocido*, se esperaría que las Estrategias 2 y 3, en las que las ecuaciones son protagonistas, incluyan un tratamiento analítico del problema.

En la Estrategia 2 ubicamos una solución sintética del problema y *algo* de solución analítica. Claramente, la estrategia incorpora pensar en el corte de dos mediatrices de sendos segmentos definidos por puntos sobre la circunferencia; acá no se usa el punto solución como parte de la estrategia y, por tanto, se reconoce el empleo de un razonamiento sintético, a pesar de que la solución se reconoce en el marco de la geometría analítica. Sin embargo, la incorporación de ecuaciones y sistemas de estas (mediadas por un sistema de referenciación, como lo es el plano cartesiano), lleva a pensar que hay *algo* analítico. Veamos esto con más detalle.

A través del análisis de la Estrategia 2 advertimos que *usamos* la expresión  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$  para calcular las coordenadas del punto medio de los puntos de coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . El hecho de usar variables (*i. e.*,  $x$  y  $y$ ) nos hace pensar que estamos empleando un razonamiento analítico, sin embargo, no logramos reconocer qué es lo desconocido que estamos suponiendo conocido y con lo cual trabajamos para determinarlo. Quizá si hubiéramos tenido que *deducir* la expresión citada, allí sí hubiéramos empleado un razonamiento analítico, pero definitivamente al solo *usar* la expresión nos limitamos a hacer una sustitución y un cálculo numérico. Algo similar ocurre tanto cuando *usamos* la ecuación cartesiana de la recta y hallamos la pendiente de esta y de la perpendicular a esta, como cuando *usamos* la ecuación punto pendiente para hallar la ecuación de la mediatriz. El *algo* analítico, citado antes, aparece cuando solucionamos el sistema de ecuaciones por el método de simplificación, por cuanto (aunque implícitamente) suponemos que las variables  $x$  y  $y$  pertenecen a  $\mathbb{R}$  y aún sin conocer sus valores operamos con ellas para determinarlos. Así, lo analítico de/en la Estrategia 2 está conectado a lo algebraico, más que a lo geométrico. Quizá por ello, en algún momento quisimos reconocerla como una estrategia ligada a una heurística sintético-analítica, pero advertimos que sobre esta denominación caería un halo de duda, por cuanto no termina siendo transparente cómo, en la globalidad de la estrategia, lo desconocido se supone como conocido y se trabaja con este –y con lo conocido– para determinarlo.

Queda entonces la esperanza de que la Estrategia 3 sí esté orientada por una heurística globalmente analítica. A favor de ello se podría argumentar que el

problema se ubica en la geometría analítica y que en su solución intervienen ecuaciones generales y canónicas y sistemas de ecuaciones que no requieren de una representación gráfica o geométrica, pues lo que se busca es la obtención de valores numéricos para unos parámetros, a través de los cuales se establezcan las coordenadas del centro. Ahora bien, reconocemos que en la Estrategia 3 (al igual que lo mencionamos para la Estrategia 2) hay *algo* analítico al momento de solucionar los sistemas de ecuaciones, pues los parámetros ( $D$ ,  $E$  y  $F$ ) se suponen y fungen como variables reales, lo cual permite operar con ellas para establecer así sus valores numéricos específicos. Acá también, entonces, no existe un tratamiento global analítico, pero, en comparación con la Estrategia 2, se acentúa el carácter algebraico de la estrategia y una notoria disminución del tratamiento geométrico.

Por lo anterior, surge la necesidad de precisar qué es lo que esencialmente caracteriza a la geometría analítica y en qué se basa tal carácter analítico. Algunas aproximaciones conceptuales al trabajo de René Descartes en su *Geometría*, en las que actualmente estamos profundizando, indican que precisamente tal carácter refiere al uso del razonamiento analítico, entendido como lo hemos expresado antes, y no precisamente al uso de ecuaciones y un sistema de ejes cartesianos. Esperamos disponer pronto de elementos de juicio para precisar una respuesta sólida a la pregunta que titula este artículo.

Por otra parte, debemos señalar que nos estamos cuestionando acerca de la naturaleza de la heurística vinculada a una estrategia adicional a las anteriores, que incorpora el uso de GeoGebra; allí, se ubican los tres puntos en su plano coordenado y se construye la circunferencia que pasa por estos obteniéndose, de manera automática, la ecuación canónica y con ello las coordenadas del centro.

En un ámbito diferente, nos interrogamos sobre la pertinencia e importancia de trabajos como el exhibido acá, a favor de la construcción de un conocimiento matemático *por* enseñar y *para* enseñar, como esencia de la formación matemática del profesor de matemáticas. Tenemos la sospecha sí de que precisamente el conocimiento matemático especializado del profesor de matemáticas debe contemplar elementos como los acá presentados y discutidos.

## REFERENCIAS

Puertas, M. L. (1991). *Euclides. Elementos. Libros I-IV*. Editorial Gredos S.A.

# EL PODER DE MIS MANOS, UNA EXPERIENCIA MULTISENSORIAL CON LA GEOMETRÍA

**Santiago Aldana, Sara Rodríguez y Tania Plazas**

*Universidad Pedagógica Nacional*

[saldanav@upn.edu.co](mailto:saldanav@upn.edu.co), [sarodriguezc@upn.edu.co](mailto:sarodriguezc@upn.edu.co), [tplazas@pedagogica.edu.co](mailto:tplazas@pedagogica.edu.co)

Este artículo expone la experiencia obtenida en el desarrollo del trabajo de grado “El poder de mis manos, una experiencia multisensorial con la geometría” para optar por el título de Licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se centra en el diseño y la evaluación del material didáctico *kit triralta supples* y las tareas que acompañan el uso del material en el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático triángulo con estudiantes con discapacidad visual. Adicionalmente se presentan algunos resultados que se enmarcan en tres aspectos importantes en el trabajo de grado, a saber: potencial del *kit triralta supples*, impacto profesional y personal, y contribuciones a la educación matemática y a la educación inclusiva.

## CONTEXTO

El derecho a la educación ha sido reconocido como un derecho social fundamental, que establece la formación permanente, integral, social y cultural de las personas en Colombia. En la Constitución Política de Colombia de 1991, la educación se establece como un derecho fundamental, entre los derechos económicos, sociales y culturales, que atiende y brinda garantías a los niños, niñas y jóvenes en Colombia. En este sentido, la educación en Colombia debe garantizar el acceso y la cobertura de la educación en sus diferentes niveles escolares, asimismo, atender a cada una de las necesidades presentes en la sociedad colombiana.

Actualmente se evidencia un aumento de niños, niñas y jóvenes con discapacidad visual en las instituciones educativas, lo que nos hace cuestionar si realmente se cuenta con los recursos y conocimientos necesarios para poder cumplir con las normas de inclusión y formación integral en el aula de clase.

De acuerdo con lo anterior, se realiza un acercamiento a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con estudiantes con discapacidad visual, a través del diseño e implementación de un material didáctico que permita desarrollar algunas habilidades o conocimientos tanto en ellos como en nosotros.

Aldana, S., Rodríguez, S. y Plazas, T. (2024). El poder de mis manos, una experiencia multisensorial con la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 107-114. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Justificando lo anterior, Segura (2018) señala que son pocas las investigaciones realizadas sobre este tema en el aula, así como la escasa información existente en la actualidad sobre la metodología o los recursos más útiles y eficaces en el aprendizaje matemático para niños con discapacidad visual. Con base en lo anterior, se propone el material educativo *kit triralta supples* como recurso para estudiar el objeto geométrico del triángulo.

## SOBRE LA EXPERIENCIA

### Población

El Colegio Centro Integral José María Córdoba (JOMACO), situado en Tunjuelito, a través de su departamento de tiflogología, ofrece un entorno educativo que se ajusta a las necesidades específicas de cada alumno, proporcionando recursos especializados. En el marco de la prueba piloto del *kit triralta supples*, se seleccionaron estudiantes de diversos grados de la básica secundaria, como Santiago, Sara, Sharit y Danna, quienes presentan discapacidad visual debido a diferentes condiciones, incluyendo retinopatía de la prematuridad. Estos alumnos participaron en la implementación del material didáctico.

### Propósitos

El propósito de esta propuesta (Aldana y Rodríguez, 2024) es diseñar un material didáctico que contribuya al proceso de definir en el estudio del objeto matemático triángulo. En este sentido, se presenta detalladamente el material didáctico *kit triralta supples*, resaltando sus características específicas y su adaptación para estudiantes con discapacidad visual. Además, se describe el proceso de la prueba piloto del material y las tareas, destacando la población focal en la que se llevó a cabo y cómo se gestionó su implementación.

Adicionalmente, se realizará la evaluación de la viabilidad de este material didáctico con el objetivo de garantizar que esta herramienta educativa cumple con los estándares de accesibilidad, efectividad y relevancia para el aprendizaje de los estudiantes con discapacidad visual, contribuyendo así a su desarrollo académico y personal de manera integral.

## FUNDAMENTACIÓN

### Educación inclusiva

En el contexto de la educación y la sociedad, en general, la inclusión según Páez (2006) se refiere al proceso y la práctica de garantizar que todas las personas, independientemente de sus diferencias o características únicas, sean aceptadas, valoradas y tengan igual acceso a oportunidades para participar socialmente. Se debe centrar en eliminar las barreras físicas, sociales y educativas que pueden excluir o marginar a determinados grupos de personas; este es un componente clave de la inclusión.

Dicho esto, el aula de clase se debe centrar en la igualdad de oportunidades, estudiando las necesidades y aceptando la diversidad con el propósito de hacer cambios en las prácticas educativas, sociales y culturales dentro de la sociedad contemporánea. Entendiendo al profesor como un generador de cambios sociales, es necesario que este centre sus prácticas educativas en escenarios donde se garantice una paridad que atienda tanto a las generalidades dentro del aula de clase y a las particularidades de los niños, niñas y jóvenes en los procesos educativos, es así como Herrera, Parrilla, Blanco y Guevara (2018) establece que la formación de los profesionales para la educación debe ser considerada como un espacio de reformulación, análisis y reconstrucción. Está vinculada a todo un proceso de cambio educativo que se realiza en la educación y que responde al enfoque de atención a la diversidad social y cultural.

Atender los principios de igualdad y cambio en escenarios educativos no solo implica la incorporación de los niños, niñas y jóvenes, sino también, la articulación de sus contextos, la vinculación de toda la comunidad educativa, y la interculturalidad de estos, para obtener atmósferas que apunten a una educación inclusiva y de calidad.

En síntesis, se debe entender el aula de clase como un universo de posibilidades, donde las diferencias son el hilo conductor del acto pedagógico para promover la igualdad de oportunidades y la atención de la diversidad. Es intentar eliminar las barreras que pueden limitar la participación y el progreso de los niños, niñas y jóvenes, ya sea por etnia, género, discapacidad o habilidades, entre otros factores. El énfasis está en adaptar las estrategias de enseñanza, los materiales educativos y el entorno físico para atender las necesidades de todos los estudiantes.

## Material didáctico para población con discapacidad visual

Se ha caracterizado el impacto que tiene el uso de material didáctico en niños, niñas y jóvenes dentro de sus procesos formativos. Sin embargo, es importante estudiar los alcances de este en la población con discapacidad visual, dado que, al presentar una limitación sensorial que restringe la interacción y uso de la vista, se provoca la necesidad de usar otros sentidos diferentes a este. El olfato, oído, gusto y tacto adquieren un protagonismo en sus experiencias sensoriales, sociales, culturales y educativas.

El tacto es un sentido fundamental, garantiza la derivación de otros sentidos y contribuye a la configuración de la realidad. Raya (2009) señala que “El tacto permite una recogida de la información bastante precisa sobre los objetos próximos, pero es mucho más lento que la vista y, por ello, la exploración de los objetos grandes es fragmentada y secuencial” (p. 2). Asimismo, potencia la habilidad estereognosia, es decir, la capacidad que tienen los seres humanos para percibir mediante el tacto objetos de su entorno y construir esquemas mentales que les permitan describir características generales y específicas de estos.

Entre las experiencias educativas y cognitivas de la población con discapacidad visual, la incorporación y el diseño de materiales didácticos en el aula han permitido atender y ajustar sus procesos de enseñanza y aprendizaje, es así como Salinas (2013) afirma que:

Para los niños con discapacidad visual, y principalmente para quienes son ciegos, los materiales didácticos representan una especial necesidad dentro del aula, debido a que la manera más efectiva en la que pueden conocer es a través de la experiencia corporal, por lo tanto, deben contar con materiales y/o bien recursos que le permitan interactuar de manera activa y consciente. (p. 16)

Mencionado lo anterior, el material didáctico debe contemplar experiencias que garanticen la interacción con los sentidos, mediando los saberes y los procesos formativos. Esta idea la soporta Fernández (1986) quien afirma que “La consideración de alumnos ciegos simplemente conduce a subrayar o resaltar determinados objetivos o aspectos dentro de una Pedagogía previamente elegida; pero no suprime ninguno. Eso sí: exige la utilización de técnicas didácticas adecuadas y materiales hápticos” (p. 68). La percepción háptica posibilita experiencias sensoriales al contacto, determinando el “*arte de palpar*” que prevalecerá y apoyará los procesos de enseñanza y aprendizaje.

## Proceso de definir

En el contexto matemático, el proceso de definir hace referencia al acto de asignar de manera sistemática características y propiedades a un objeto matemático. Este proceso implica proporcionar una descripción clara y precisa del concepto en cuestión, utilizando un lenguaje matemático apropiado. Las definiciones matemáticas están formuladas de manera concisa y precisa, con el objetivo de evitar ambigüedades y vaguedades que pueden llevar a interpretaciones erróneas.

Este proceso desempeña un papel esencial en la construcción de un lenguaje preciso y coherente en la actividad matemática, suministrando una base sólida de competencias y habilidades que permiten la comprensión y evaluación de ideas matemáticas. Lo anterior, admite que los estudiantes puedan interactuar con los objetos matemáticos y sus representaciones de manera precisa y profunda, facilitando así un aprendizaje significativo en la actividad matemática. Acevedo, Cifuentes, Casasbuenas, Pérez y Pedraza (2012) establecen que cuando se involucra el proceso de definir en matemáticas se pueden construir vínculos entre las nociones informales y el lenguaje de las matemáticas, apoyando importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y tabulares de los objetos matemáticos.

Con lo anterior, la construcción de estos vínculos involucra la caracterización de dos modalidades para llevar a cabo el proceso de definir en matemáticas. Basados en de Villiers (1998), la primera modalidad por medio de *definiciones descriptivas*, donde se enfatiza el estudio de la imagen o representación del objeto, para posteriormente realizar una discriminación de las propiedades que caracterizan al objeto en estudio. La segunda por medio de *definiciones constructivas* donde se establece una definición del concepto, para posteriormente realizar una reconstrucción de este, cuestionando aspectos particulares y generales del objeto matemático estudiado. Finalmente, se realiza una exploración que permita sintetizar la representación del objeto estudiado y encontrar otras propiedades de este.

En el proceso de la construcción de una definición de objeto matemático se pueden establecer dos tipos de definiciones, las personales y las formales. Silva (2013) menciona que sin importar si a un estudiante se le ha dado una definición o si ha sido construida por él mismo, él usa sus propias palabras para dar su

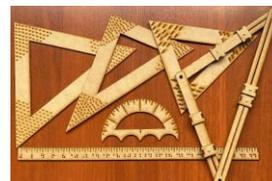
explicación de la imagen del concepto, este tipo de definición es llamado definición personal. En contraste, cuando una definición es aceptada por una comunidad matemática es denominada definición formal.

Desde cualquier perspectiva el proceso de definir debe contemplar experiencias de aprendizaje necesarias para la constitución de intervenciones didácticas que accedan a la construcción y apropiación de definiciones adecuadas en matemáticas, considerando que una definición es “óptima” cuando es apropiada desde una perspectiva didáctica, y correcta desde una perspectiva matemática (Winiicki-Landman y Leikin, citado en Aya y Echeverry, 2009).

## METODOLOGÍA

El material *kit triralta supples* se desarrolló mediante un proceso metodológico que abarcó diferentes fases, entre ellas una revisión de literatura, una etapa de diseño y una prueba piloto. Durante la revisión bibliográfica, se examinaron los trabajos previos relacionados con la enseñanza de geometría a estudiantes con discapacidad visual, identificando así los desafíos y las estrategias fundamentales para afrontar estos retos de manera efectiva.

En la segunda fase, el material se diseñó en madera de calibre medio y consta de seis piezas. Esta composición está determinada por los siguientes elementos: tri-uno (triángulo equilátero), tri-dos (triángulo isósceles), tri-tres (triángulo escaleno), cada uno con texturas específicas; triralta, un triángulo que permite ampliar y contraer sus lados para la construcción y exploración de tres tipos de triángulos; además de una regla y un transportador. Se desarrollaron cuatro prototipos para este diseño, incluyendo el prototipo final mencionado anteriormente. Este material ofrece experiencias que fomentan la interacción con otros sentidos, ya que la percepción háptica en estudiantes con discapacidad visual apoya los procesos de enseñanza y aprendizaje. Según Raya (2009), “El tacto permite recopilar información precisa sobre objetos cercanos, pero es mucho más lento que la vista, lo que hace que la exploración de objetos grandes sea fragmentada y secuencial” (p. 2).



Adicionalmente, se diseñaron tres tareas para acompañar el material creado, las cuales permiten a los estudiantes lograr lo siguiente: reconocer los elementos a través de preguntas incluidas en tres subtarefas (reconocimiento de triángulos

modelos, de “Triralta” y de los elementos de medida); comparar, medir y explorar algunas propiedades de los triángulos y los tipos de triángulos con “Triralta” y los elementos de medida; y finalmente, establecer las propiedades de los triángulos y algunos tipos específicos de triángulos.

Para finalizar, durante la prueba piloto del *kit triralta supplies*, se realizó el análisis de la intervención utilizando diversos criterios. En primer lugar, se examinó la accesibilidad del material en la población, considerando aspectos como el tamaño, la forma, la textura, así como la facilidad de manipulación y uso. En segundo lugar, se identificó el nivel de relevancia de los estudiantes con los materiales y las tareas asignadas. En tercer lugar, se analizó la efectividad de los materiales para promover resultados de aprendizaje relacionados con las propiedades de los triángulos, y finalmente, se evaluó la usabilidad del material tanto para los estudiantes como para los profesores, considerando la claridad de las instrucciones. Para llevar a cabo este análisis, se recopilaron datos de manera audiovisual durante la intervención.

## RESULTADOS

La implementación de este material ha arrojado resultados positivos, ya que los estudiantes pudieron identificar correctamente los tipos de triángulos y desarrollar habilidades como la exploración y comparación de los elementos proporcionados. Las tareas planificadas y el material diseñado no solo permitieron a los estudiantes involucrarse en un escenario de exploración y análisis reflexivo del objeto matemático triángulo, sino que también les brindaron herramientas para integrar enfoques descriptivos y constructivos en el proceso de definición. Se deben realizar ajustes en la planificación del tiempo y la distribución de actividades para garantizar una mejor exploración, así como la participación autónoma de los estudiantes. Además, de refinar las instrucciones y preguntas planteadas en las tareas para guiar de manera más efectiva el proceso de aprendizaje y fomentar una comprensión clara de los conceptos abordados.

El *kit triralta supplies* presenta un potencial significativo como herramienta educativa en contextos inclusivos, al promover el aprendizaje significativo y la participación activa de los estudiantes con discapacidad visual. Su adaptabilidad podría permitir su utilización en varios niveles educativos, facilitando la integración con diferentes objetivos de aprendizaje relacionados con la geometría y la educación inclusiva.

A nivel personal y profesional, este estudio ha representado una oportunidad significativa de crecimiento académico y desarrollo profesional para los investigadores, además de ser un compromiso con la promoción de la educación inclusiva y el acceso equitativo a la enseñanza de la geometría para personas con discapacidad visual. En este sentido, se resalta la importancia de seguir explorando y mejorando los recursos y prácticas educativas destinadas a asegurar una educación de calidad para todos los estudiantes, sin importar sus capacidades o limitaciones.

## REFERENCIAS

- Acevedo, M., Cifuentes, V., Casasbuenas, C., Pérez, M. C. y Pedraza, P. (2012). *Procesos matemáticos. Estándares curriculares de Matemáticas del MEN*.
- Aldana, S. y Rodríguez, S. (2024). *El poder de mis manos, una experiencia multisensorial con la geometría*. Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Aya, O. y Echeverry, A. (2009). *Geometría dinámica en el proceso de definir*. Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Constitución Política de Colombia [Const]. Art. 44. 7 de julio de 1991 (Colombia).
- de Villiers, M. (1998). The construction of concepts in language development. *Journal of Child Language*, 25(3), 637-660.
- Fernández, J. E. (1986). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. Madrid: ONCE.
- Herrera, J. I., Parrilla, Á., Blanco, A. y Guevara, G. (2018). La formación de docentes para la educación inclusiva. Un reto desde la Universidad Nacional de Educación en Ecuador. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 12(1), 21-38.
- Páez, O. (2006). *El maestro y el estudiante con limitación visual*. Bogotá, Colombia: INCI.
- Raya, A. (2009). Desarrollo psicológico del discapacitado visual. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, 25, 1-10.
- Salinas, P. B. (2013). *Material didáctico háptico para niños con ceguera: el sapito de 4 ojos y el ciclo de vida de un anfibio*.
- Segura, M. (2018). *Propuesta de intervención de geometría plana para alumnos con diversidad funcional visual*. Tesis de pregrado, Universidad de Sevilla, Sevilla, España.
- Silva, P. C. (2013). Definiciones personales y definiciones formales: un estudio de caso en el contexto de la geometría euclidiana. *Revista de Educación Matemática*, 34(3), 435-452.

# DESCIFRANDO PATRONES: GEOMETRÍA COMPUTACIONAL COMO LLAVE PARA EL APRENDIZAJE AUTOMÁTICO

**Nicolás Avilán**

*Universidad Central*

[navilanv@ucentral.edu.co](mailto:navilanv@ucentral.edu.co)

La sinergia entre la geometría computacional y el aprendizaje automático ha abierto un abanico de posibilidades para mejorar el análisis de datos y el reconocimiento de patrones. En este artículo, se explora el profundo impacto de los conocimientos geométricos en diversas aplicaciones del aprendizaje automático. Desde algoritmos geométricos para la extracción de características hasta modelos geométricos de aprendizaje profundo, se muestra cómo las herramientas de geometría computacional brindan soluciones innovadoras a problemas complejos en múltiples métodos. Esta perspectiva les puede facilitar a los estudiantes de geometría entender mejor los algoritmos de inteligencia artificial.

## INTRODUCCIÓN

En la intersección de la geometría y la informática hay un mundo de posibilidades. En este universo de datos y algoritmos, la geometría computacional emerge como una poderosa disciplina que permite descifrar patrones ocultos en conjuntos de datos aparentemente caóticos. En el centro de esta sinergia se encuentra el aprendizaje automático (*machine learning*), un campo en constante evolución que busca comprender y predecir estructuras en datos de una manera automatizada.

En este artículo se explora el papel crucial que desempeña la geometría computacional en el contexto del aprendizaje automático. Desde la representación de datos hasta la extracción de características y el modelamiento de fenómenos complejos, se examina cómo los principios geométricos fundamentales impulsan los avances en este campo multidisciplinario. Como lo mencionan Dobkin y Gunopulos (1996), la geometría computacional actúa como medio indispensable para analizar y comprender la estructura geométrica inherente a los datos, abriendo así nuevas perspectivas para futuros desarrollos.

## GEOMETRÍA COMPUTACIONAL: ABRIENDO LA PUERTA A LA ABSTRACCIÓN Y LA GENERALIZACIÓN

La geometría computacional es un actor central en el escenario del aprendizaje automático, actuando como la columna vertebral sobre la cual se construyen modelos matemáticos y algoritmos de gran complejidad. En su esencia, la geometría computacional busca comprender las estructuras y relaciones geométricas mediante la aplicación de métodos algorítmicos, buscando procedimientos que reduzcan la cantidad de recursos computacionales necesarios para su ejecución (de Berg, 2000).

Un ejemplo destacado de la aplicación de la geometría computacional en el aprendizaje automático es el concepto de *incrustaciones* (*embeddings*, en inglés). Las incrustaciones son representaciones vectoriales de datos que capturan características clave y relaciones semánticas entre ellos. En el corazón de estas incrustaciones yace la geometría computacional, que permite mapear datos de alta dimensionalidad a un espacio vectorial de menor dimensión, preservando al mismo tiempo la estructura y las relaciones entre los datos originales.

En resumen, la geometría computacional actúa como una llave maestra que desbloquea el potencial del aprendizaje automático, proporcionando herramientas poderosas para crear modelos, analizar e interpretar datos en una amplia gama de aplicaciones. Al comprender y aprovechar las complejas interacciones geométricas en nuestros conjuntos de datos, podemos avanzar hacia sistemas de aprendizaje automático más eficientes, robustos y adaptativos.

## APRENDIZAJE AUTOMÁTICO: MÁS ALLÁ DE LAS SUPERFICIES, HACIA LA ESENCIA DE LOS DATOS

En el amplio escenario del aprendizaje automático, la búsqueda de patrones es la tarea clave para encontrar la solución de múltiples problemas complejos. En su esencia, el aprendizaje automático tiene que ver con programar máquinas para que tengan capacidad de identificar y comprender patrones que nos permitan transformar datos en decisiones informadas para resolver problemas complejos.

La geometría computacional se entrelaza íntimamente con el aprendizaje automático, actuando como guía hacia la comprensión de la estructura subyacente en los datos. La clave está en el concepto de representación geométrica de datos:

la idea de que los datos pueden ser modelados y analizados en términos de su estructura geométrica, revelando así relaciones y patrones que de otro modo podrían pasar desapercibidos.

Un ejemplo importante de esta sinergia entre geometría computacional y aprendizaje automático es el campo de las redes neuronales convolucionales (CNN). Las CNN utilizan filtros convolucionales para detectar características significativas en datos de entrada, como imágenes, estos filtros pueden interpretarse geoméricamente como operadores que exploran y capturan la estructura local de la imagen, permitiendo así que la red identifique patrones complejos y realice tareas como la clasificación de objetos o el reconocimiento de patrones.

Otro ejemplo está en el uso de métodos de reducción de dimensionalidad, como el análisis de componentes principales (PCA), que se basa en conceptos geométricos para proyectar datos de alta dimensionalidad en un espacio de menor dimensión mientras se preservan las relaciones entre ellos.

#### ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LOS ALGORITMOS EN APRENDIZAJE AUTOMÁTICO: NAVEGANDO POR EL ESPACIO DE CARACTERÍSTICAS

En el mundo del aprendizaje automático, los algoritmos no solo procesan datos; también exploran y comprenden la estructura geométrica subyacente en ellos. Esta comprensión geométrica es esencial para el éxito de muchos algoritmos, ya que permite identificar patrones, separar clases y realizar predicciones precisas en conjuntos de datos complejos.

Un ejemplo destacado de cómo los aspectos geométricos influyen en los algoritmos de aprendizaje automático es el algoritmo de máquinas de vectores de soporte (SVM). En SVM, el objetivo es encontrar el hiperplano óptimo que maximice el margen de separación entre clases en un espacio de características de alta dimensión. Geométricamente, este hiperplano actúa como una frontera de decisión que separa las instancias de datos en diferentes clases, lo que permite clasificar nuevos datos con precisión.

Otro ejemplo es el algoritmo de k-vecinos más cercanos (k-NN), que se basa en la idea geométrica de proximidad. En k-NN, las instancias de datos se representan como puntos en un espacio de características, y la predicción para una nueva instancia se realiza según la clase predominante entre sus k vecinos más cercanos. Esta noción de proximidad geométrica es fundamental para la eficacia del

algoritmo, ya que asume que instancias similares están cerca en el espacio de características.

Los aspectos geométricos desempeñan un papel fundamental en el diseño y la eficacia de los algoritmos de aprendizaje automático. Al comprender la geometría subyacente en los datos y cómo los algoritmos interactúan con ella, podemos desarrollar modelos más robustos y precisos que capturen la esencia de los patrones presentes en conjuntos de datos complejos.

## ASPECTOS GEOMÉTRICOS EN K-MEANS: EXPLORANDO LA ESTRUCTURA ESPACIAL DE LOS DATOS

El algoritmo de K-Means es uno de los métodos de agrupamiento más utilizados en el aprendizaje automático. Este algoritmo reconoce un conjunto de  $K$  *clusters* en el espacio de características, asociados a  $K$  centroides. Geométricamente, K-Means encuentra una solución en la que se maximiza la distancia entre los centroides, al tiempo que se minimiza la varianza intra-cluster, lo que permite una partición en la que los puntos dentro de cada grupo sean lo más similares posible entre sí y lo más diferentes posible de los puntos en otros grupos.

Una vez que se han asignado los centroides iniciales, el algoritmo procede mediante iteraciones alternas de asignación de puntos al centroide más cercano y recálculo de los centroides basados en la media de los puntos asignados. Este proceso converge hacia una solución en la que la varianza intra-cluster se minimiza y se obtienen grupos coherentes y bien definidos en el espacio de características.

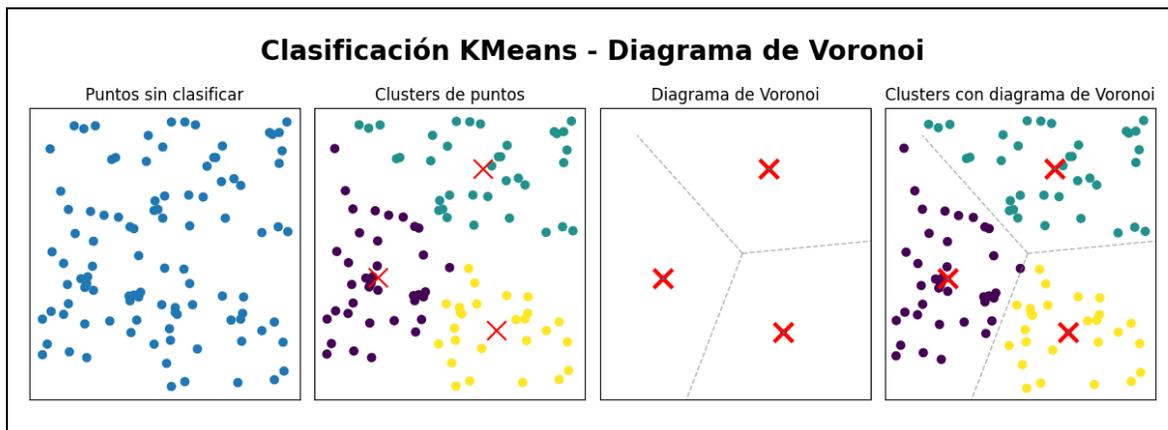


Figura 1: ilustración del proceso de identificación de centroides (cruces rojas) y grupos de puntos en K-Means junto con la ilustración del diagrama de Voronoi asociado a los mismos centroides

Múltiples referencias, como la de Vattani (2011), muestran que el algoritmo K-Means se utiliza de manera efectiva para descubrir patrones y estructuras subyacentes en conjuntos de datos complejos. Existe una interesante relación entre el algoritmo K-Means y los diagramas de Voronoi. En K-Means, los centroides definen grupos de puntos en el espacio de características, mientras que los diagramas de Voronoi definen regiones basadas en la proximidad a los mismos centroides. Al sobreponer los dos diagramas, los puntos cercanos a un centroide, en K-Means, se ubican dentro del polígono generado por el mismo centroide en el diagrama de Voronoi (véase figura 1).

## ASPECTOS GEOMÉTRICOS EN MÁQUINAS DE SOPORTE VECTORIAL: NAVEGANDO POR ESPACIOS DE CARACTERÍSTICAS DE ALTA DIMENSIÓN

Las máquinas de soporte vectorial (SVM) son un poderoso modelo de aprendizaje automático que se basa en una comprensión profunda de los aspectos geométricos de los datos para llevar a cabo tareas de clasificación y regresión. La clave de SVM está en la búsqueda del hiperplano óptimo que maximice el margen de separación entre clases en un espacio de características de alta dimensión.

Según se presenta en Hsu, Chang y Lin (2008), el objetivo de SVM es encontrar el hiperplano de decisión que maximice el margen entre las instancias de datos de diferentes clases, donde el margen se define como la distancia perpendicular desde el hiperplano a las instancias de datos más cercanas, también conocidas como vectores de soporte. Este hiperplano actúa como una frontera de decisión que separa eficientemente las clases en el espacio de características, permitiendo así una clasificación precisa de nuevas instancias.

La elección del hiperplano óptimo se reduce a resolver un problema de optimización convexa, donde se busca minimizar la norma del vector de pesos del hiperplano sujeto a ciertas restricciones, incluyendo la correcta clasificación de las instancias de datos y la maximización del margen. Este enfoque geométrico garantiza que el hiperplano de decisión sea lo más generalizable posible y que la clasificación sea robusta ante nuevos datos.

Además, SVM puede manejar eficazmente conjuntos de datos no lineales mediante el uso de funciones de kernel, que mapean los datos originales a un es-

pacio de características de mayor dimensión donde pueden ser linealmente separables. Geométricamente, esto equivale a encontrar un hiperplano de decisión en un espacio de características de mayor dimensión que pueda separar las clases de manera lineal, incluso si las instancias de datos en el espacio original no son separables linealmente.

## ASPECTOS GEOMÉTRICOS EN ALGORITMOS DE PROCESAMIENTO DE LENGUAJE NATURAL: MAPEANDO LA SEMÁNTICA EN ESPACIOS VECTORIALES

Los algoritmos de procesamiento de lenguaje natural (PLN) son fundamentales para comprender y procesar el lenguaje humano en forma de texto. En los últimos años, el enfoque geométrico ha ganado popularidad en el PLN, especialmente en la representación semántica de palabras y documentos, donde los modelos basados en geometría computacional han demostrado ser altamente efectivos.

Como muestran Mikolov, Chen, Corrado y Dean (2013), uno de los enfoques más destacados es el uso de incrustaciones de palabras (*word embeddings*), donde las palabras se representan como vectores en un espacio de características de alta dimensión. Estos vectores capturan la semántica y la relación entre palabras, lo que permite realizar operaciones algebraicas en el espacio vectorial para inferir significado y contexto.

Geométricamente, el espacio vectorial de incrustaciones de palabras se organiza de tal manera que palabras similares en términos de significado están más cerca entre sí, mientras que palabras con significados diferentes están más separadas. Este mapeo geométrico permite capturar relaciones semánticas complejas, como sinónimos, antónimos, y relaciones de hiperonimia e hiponimia.

Un ejemplo de esto es el famoso algoritmo de Word2Vec, que utiliza una red neuronal para aprender incrustaciones de palabras distribuidas en función del contexto en el que aparecen las palabras en un corpus de texto. Word2Vec mapea palabras a un espacio vectorial donde operaciones geométricas como la suma y resta de vectores pueden utilizarse para inferir relaciones semánticas. Un frecuente ejemplo es la operación “rey - hombre + mujer  $\approx$  reina”.

En resumen, los aspectos geométricos desempeñan un papel fundamental en el PLN al permitir la representación semántica de palabras y documentos en espacios vectoriales de alta dimensión. Al comprender y aprovechar la geometría subyacente en estos modelos, podemos realizar tareas de análisis de texto y procesamiento del lenguaje natural de manera más efectiva, abriendo así nuevas fronteras en la comprensión automática del lenguaje humano.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este artículo, hemos explorado el papel crucial que desempeña la geometría computacional como llave para el aprendizaje automático, revelando cómo los aspectos geométricos subyacentes en los datos son fundamentales para comprender y descifrar patrones ocultos. Desde la representación de datos hasta la construcción de modelos y algoritmos, hemos visto cómo la geometría computacional impregna cada aspecto del proceso de aprendizaje automático, proporcionando herramientas poderosas para analizar, interpretar y predecir fenómenos complejos en una amplia gama de aplicaciones.

Hemos examinado cómo la geometría computacional se entrelaza con algoritmos clave como las máquinas de soporte vectorial (SVM), el análisis de componentes principales y K-Means para identificar patrones y estructuras en conjuntos de datos complejos. Desde la maximización del margen en SVM hasta la minimización de la varianza intra-cluster en K-Means, hemos visto cómo los aspectos geométricos son fundamentales para la eficacia y el rendimiento de estos algoritmos en la clasificación y agrupamiento de datos.

Además, exploramos cómo los aspectos geométricos se aplican en el procesamiento de lenguaje natural (PLN), permitiendo la representación semántica de palabras y documentos en espacios vectoriales de alta dimensión. Modelos como Word2Vec ilustran cómo la geometría computacional puede capturar la riqueza y la complejidad del lenguaje humano, abriendo nuevas fronteras en la comprensión automática del texto.

En conclusión, la geometría computacional emerge como una llave poderosa que facilita el potencial del aprendizaje automático, proporcionando una base sólida para comprender y descifrar patrones en datos complejos. Al comprender y aprovechar los aspectos geométricos subyacentes en los algoritmos y modelos

de aprendizaje automático, podemos avanzar hacia sistemas más eficientes, robustos y adaptables que nos permitan explorar y entender el mundo que nos rodea de una manera más profunda y significativa.

## REFERENCIAS

- de Berg, M. (2000). *Computational geometry: algorithms and applications*. Springer Science & Business Media.
- Dobkin, D. y Gunopulos, D. (1996, mayo). Geometric problems in machine learning. En *Workshop on Applied Computational Geometry* (pp. 121-132). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Hsu, C., Chang, C. y Lin, C. (2008). A practical guide to support vector classification.
- Mikolov, T., Chen, K., Corrado, G. y Dean, J. (2013). Efficient estimation of word representations in vector space. *arXiv preprint arXiv:1301.3781*.
- Vattani, A. (2011). K-Means requires exponentially many iterations even in the plane. *Discrete Comput Geom*, 45, 596-616. <https://doi.org/10.1007/s00454-011-9340-1>

# DISEÑO DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRANSFORMACIÓN ROTACIÓN Y LA CONSTRUCCIÓN DEL DISEÑO DE UNA MANDALA

**Ashly Berrío y Hannel Vila**

*Universidad del Valle*

[ashly.berrio@correounivalle.edu.co](mailto:ashly.berrio@correounivalle.edu.co), [hannel.vila@correounivalle.edu.co](mailto:hannel.vila@correounivalle.edu.co)

El presente reporte está dirigido a investigadores y profesores interesados en la enseñanza de la geometría. Se presenta el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje que aborda la relación entre la transformación rotación y la construcción de diseños en el plano, para promover el pensamiento espacial en estudiantes de sexto grado. El diseño se fundamenta en la teoría de la mediación semiótica y un ambiente de geometría dinámica. Se han observado avances en el reconocimiento de algunas características de la transformación rotación, aunque se identifican desafíos en la implementación. Se plantea la necesidad de reflexionar sobre la efectividad de la trayectoria y realizar ajustes en función de los resultados observados.

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El trabajo de investigación sobre el que se informa propone el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) que integra un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), que tiene como objeto matemático de estudio la transformación rotación. El propósito del diseño es lograr que los estudiantes relacionen las características de la transformación de rotación y sus propiedades invariantes, con la construcción del diseño de una mandala. Se promueven los procesos de razonamiento y comunicación, junto con el estándar básico de competencias “conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños” (MEN, 2006, p. 82).

Se retoma el estudio de Riascos y Peña (2012) quienes hallaron que las creencias de los profesores sobre los objetos geométricos y sus propiedades pueden llegar a influir en un diseño de actividades, rígido/estático que no permite explorar en forma amplia la transformación rotación y menos, los procesos de conjetura y verificación, por lo cual el potencial de los AGD se pierde y limita la capacidad de los estudiantes de visualizar las representaciones de los objetos

Berrío, A. y Vila, H. (2024). Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la transformación rotación y la construcción del diseño de una mandala. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 123-130. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

matemáticos en diferentes posiciones. Esto conduce a los estudiantes a la no identificación de las propiedades que se mantienen invariantes durante la transformación.

Por su parte, Claros et al. (2015) evidencian en su investigación que la rotación es la transformación que causa mayores dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes. Aunque ciertas actividades corporales y el uso de material tangible hacen que la idea de giro sea clara, llevarla al plano no es sencillo, debido a las dificultades para representar el movimiento y, principalmente, el ángulo de rotación.

Por todo lo anterior, se considera relevante diseñar una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la transformación rotación, que incorpore ambientes de geometría dinámica y a su vez que sitúe a los estudiantes en contextos familiares. Es así como surge nuestra pregunta de investigación: ¿Cómo podemos relacionar las características de la transformación rotación con la construcción de diseños en el plano para promover el pensamiento espacial en estudiantes de sexto grado de bachillerato?

## MARCO TEÓRICO

Según Bartolini Bussi y Mariotti (2008), la teoría de la mediación semiótica es una perspectiva de base vygotskiana, que estudia los artefactos<sup>1</sup> como elementos clave en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde esta perspectiva, la interacción entre el sujeto y el artefacto da lugar al aprendizaje mediante el proceso denominado internalización. Este proceso se fundamenta en la utilización de signos de diferente índole que están asociados a los significados personales de los estudiantes y los significados correspondientes al contenido de enseñanza. Es así como esta teoría centra su atención en la mediación que realiza el profesor entre los dos tipos de significados.

Bartolini Bussi y Mariotti (2008) reconocen que el artefacto está vinculado tanto a una tarea específica como a un conocimiento matemático; por lo tanto, es necesario aprovechar este sistema de relaciones. Esto se debe a que el uso del

---

<sup>1</sup> Se entiende artefacto en el mismo sentido de la aproximación instrumental. Rabardel (2011) define el término artefacto como una cosa susceptible de uso, que ha sido elaborada para inscribirse en actividades intencionales. Sin restringir este término a las cosas materiales, incluye entidades de otra naturaleza como los objetos simbólicos.

artefacto se relaciona con los significados personales, con el propósito de llevar a cabo una tarea específica; a su vez, los significados matemáticos están relacionados con este mismo artefacto y uso. Sin embargo, es importante resaltar que la relación entre estos dos sistemas de signos no es evidente ni espontánea. Por lo cual, se plantea que para lograr esta relación el profesor, como experto capaz de reconocer el potencial semiótico de un artefacto, debe explotar los procesos semióticos, con el fin de guiar a los estudiantes hacia lo que se reconoce como matemáticas. Es decir, relacionar los significados personales y los significados matemáticos.

De aquí la importancia del vínculo entre la teoría de la mediación semiótica y los ambientes de geometría dinámica, ya que estos tienen el potencial para que el estudiante haga una producción de signos tanto de manera individual como colectiva, esto mediante un ciclo de enseñanza, en el que el profesor propone el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje que pone en juego tres componentes: una meta de aprendizaje, un conjunto de tareas de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético (Simon, 2014). Por lo tanto, la manera intencional de usar el artefacto y el papel del profesor como mediador guían a los estudiantes hacia una evolución de su conocimiento personal a un conocimiento matemático.

## METODOLOGÍA

Este estudio se fundamenta en la Investigación Basada en Diseño (IBD), que, según Molina et al. (2011), es un paradigma de investigación, de naturaleza cualitativa; el cual tiene como objetivo analizar el aprendizaje mediante la exploración y comprensión contextualizada a través del diseño y estudio sistemático de modalidades particulares de aprendizaje, estrategias y recursos de enseñanza. La IBD se caracteriza por partir de una conjetura sobre cómo se aprende algo según un contexto, permite que el centro de la investigación varíe, al igual que las interacciones estudiante-docente y el desarrollo del aprendizaje de un concepto determinado. A partir del experimento de enseñanza, la conjetura sobre el aprendizaje puede ser refutada o aprobada o dar lugar a nuevas suposiciones. La IBD aporta información prospectiva y reflexiva. Según Cárcamo (2017), “al implementar el aprendizaje hipotético (la parte prospectiva) los investigadores confrontan conjeturas con el aprendizaje real que observan (parte reflexiva)” (p. 31).

Al incorporar esta estrategia metodológica se deben tener presentes las siguientes fases: primero, se realiza la preparación del experimento con el planteamiento de la THA. La segunda fase consiste en intervenir en el aula y registrar datos. Por último, se realiza el análisis de los datos obtenidos para confrontar o reformular las hipótesis, de ser necesario. Además, después de cada sesión de implementación del experimento debe realizarse un análisis retrospectivo de lo abordado para hacer ajustes a la trayectoria.

## DISEÑO DE LA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

### Meta de aprendizaje

- Reconocer la característica que tiene la transformación rotación de ser una isometría del plano, para la construcción del diseño de una mandala.

### Fundamentación del diseño de actividades de aprendizaje

Basándonos en la revisión de la literatura a continuación se presentan los siguientes componentes que fundamentan el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

#### Componente matemático

En este apartado se presenta el objeto matemático y sus características. De acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1993, pp. 26-27):

Definición de giro. Sea un punto  $O$  del plano y un ángulo orientado. El giro de centro  $O$  y ángulo  $\alpha$  es una aplicación del plano en sí mismo  $G(O, \alpha): \Pi \rightarrow \Pi$  tal que  $G(O, \alpha)(p) = p' \leftrightarrow d(O, p) = d(O, p')$  y  $pOp' = \alpha, \forall p \in \Pi$ .

El punto  $O$  es el centro del giro y  $\alpha$  es el ángulo de giro.

Propiedades de los giros:

- Todo giro es una isometría.
- Dos giros del mismo centro  $G(O, \alpha)$  y  $G(O, \beta)$  son equivalentes si y solo si  $\alpha - \beta = 360^\circ$ .
- El centro de un giro (distinto de la aplicación identidad) es el único punto que se mantiene invariante por ese giro: sean  $p \in \Pi$  y  $\alpha \neq 360^\circ$ . Entonces, se tiene que  $G(O, \alpha)(p) = p \leftrightarrow p = O$ .

- Los giros conservan el sentido de los ángulos.

### **Componente curricular**

El pensamiento matemático por desarrollar con el diseño de la THA es el *pensamiento espacial y sistemas geométricos*, movilizando los procesos de *razonamiento y comunicación*. De acuerdo con los *Lineamientos curriculares* esto es posible al “formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos” (MEN, 1998, p. 54). Es así como en los *Lineamientos curriculares* (1998) se propone que el aula sea un espacio seguro en el que los estudiantes puedan hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información, para lograr así comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual (p. 74).

El estándar básico de competencias al cual apunta la trayectoria está vinculado con el derecho básico de aprendizaje para los estudiantes en grado sexto “reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico” (MEN, 2017, p. 48).

### **Componente instrumental**

Los ambientes de geometría dinámica son utilizados en el campo de la educación matemática, dado que permiten a los estudiantes visualizar representaciones de objetos matemáticos y experimentar con ellas. De acuerdo con Riascos (2012) la integración de un ambiente de geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas se centra en el estudio de las características fundamentales de las figuras geométricas, sus relaciones y propiedades. Además, a partir de las actividades diseñadas el estudiante puede manipular y explorar el entorno permitiendo en él la elaboración de conjeturas (p. 22).

En particular, GeoGebra no es solo una herramienta computacional, por el contrario, tiene la virtud de representar entornos donde los estudiantes tienen la oportunidad de explorar, descubrir y argumentar con mayor facilidad. Esto se debe a que están estructurados de manera que permiten la manipulación de la información sin restricciones temporales o espaciales. A partir de la mediación del *software* GeoGebra se realizará un acercamiento con algunas características del objeto matemático en cuestión y, mediante la articulación del enfoque teórico de la mediación semiótica, nos permitirá reconocer el potencial semiótico del diseño de la THA.

## **Componente de organización**

En este diseño se propone su realización en grupos colaborativos de tres personas, con el objetivo de maximizar el aprendizaje colectivo. De acuerdo con Gómez (2016) la colaboración entre estudiantes, en especial en grupos pequeños, tiene un impacto en la transferencia del aprendizaje, en comparación con el aprendizaje individual.

## **Descripción de las tareas e hipótesis del profesor**

La tarea 1 consiste en explorar mediante deslizadores el movimiento de una rueda de la fortuna. Se espera que el estudiante haga un reconocimiento del centro de rotación, el ángulo de rotación y los objetos rotados.

La tarea 2 consta de la manipulación de los deslizadores de movimiento de un alien y un satélite que rotan alrededor de la tierra. Se espera que el estudiante contraste la posición inicial y final de los objetos rotados para reconocer la característica visual del giro (desplazamiento circular y variación de la inclinación).

La tarea 3 consiste en la construcción de la mandala a partir de la herramienta rotación y las condiciones sobre los objetos por rotar. Se espera que el estudiante utilice las características visuales de los giros (desplazamiento circular y variación de la inclinación) y las técnicas de realización de giros para rotar los objetos.

## **AVANCES DE LA INVESTIGACIÓN**

En una implementación piloto de la trayectoria hipotética de aprendizaje se ha observado que las dos primeras actividades parecen favorecer la identificación del centro de rotación, ángulos de rotación y la propiedad invariante del sentido de giro. Con relación a la construcción de la mandala, algunos de los estudiantes hicieron la exploración del sentido del ángulo de rotación (sentido horario y antihorario), realizando la mandala en un menor tiempo y aplicando de manera implícita una reflexión en el objeto rotado.



Figura 1: implementación piloto en la IETI Antonio José Camacho

## INQUIETUDES

Surgen las preguntas siguientes:

- ¿Por qué resulta valioso trabajar la rotación en contextos específicos?
- ¿Las actividades en contexto familiar motivan y comprometen a los estudiantes?
- ¿Es posible obtener los mismos resultados al realizar la mandala con lápiz, papel y transportador?

## REFERENCIAS

- Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Claros, X. P., Huertas, Y. P. y Castro, C. C. (2015). Interacciones y relaciones con estudiantes de grado cuarto para la comprensión de las transformaciones geométricas de congruencia. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 669-674.
- Gómez, L. (2016). Intención y competencia pedagógica: el uso del aprendizaje colaborativo en la asignatura de matemáticas en secundaria. *Propósitos y Representaciones*, 4(2), 133-179. Doi: <http://dx.doi.org/10.20511/pyr2016.v4n2.121>
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo Van Hiele: la enseñanza de las isometrías. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis de doctorado, Universidad de Valencia, Valencia, España.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Serie Lineamientos. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos en competencia de matemáticas*. En *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanía*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2017). *Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Riascos, C. y Peña, J. (2012). *Aprendizaje de la transformación de rotación en una secuencia didáctica que integra “Cabri Geometry II Plus” en 5.º de educación básica*. Tesis de pregrado, Universidad del Valle, Buenaventura, Colombia.
- Simon, M. A. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 272-275). Países Bajos: Springer.

# USO DE HECHOS GEOMÉTRICOS PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE TANGENCIA

**Sergio Caicedo, Luis Pérez y Jorge Fiallo**

*Universidad Industrial de Santander*

Sergio2248065@correo.uis.edu.co, laperezf@saber.uis.edu.co, jfiallo@uis.edu.co

Este artículo busca mostrar los resultados de una parte de un trabajo de grado en el que se le propone a una pareja de estudiantes resolver una tarea de construcción relacionada con el segundo problema de Apolonio. El trabajo y, por lo tanto, este documento, tiene por marco teórico la geometría dinámica experimental y la ingeniería didáctica como metodología de investigación. Los resultados muestran que, en el proceso de solución de la tarea, los estudiantes realizaron exploraciones en el *software* DGPad-Colombia para encontrar propiedades geométricas, que garantizaron usando hechos geométricos relacionados con el teorema de la potencia de un punto respecto a un círculo.

## INTRODUCCIÓN

Se presentan algunos resultados del trabajo de grado *Diseño de tareas en DGPad-Colombia para promover la construcción y el uso de los hechos geométricos* (Caicedo, 2023). Dicho trabajo tenía por objetivo principal aportar un diseño de tareas, en el entorno del *software* DGPad-Colombia, con el propósito de promover la construcción y el uso de hechos geométricos sobre el concepto de tangencia. Se usó como marco teórico la geometría dinámica experimental expuesta en Acosta (2005, 2008), y la ingeniería didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995) como metodología de investigación.

En el diseño, las tareas centradas en promover la construcción de los hechos geométricos tenían las siguientes características, fundamentadas en las ideas de Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006) respecto a las tareas en el *software*: i) se presentaba una situación geométrica en forma de enunciado o protocolo de construcción junto con preguntas que guiaban la exploración y el análisis de dicha situación favoreciendo la experimentación con el SGD; ii) una vez se identificaban determinadas relaciones y propiedades geométricas, se centraba la atención con preguntas enfocadas a la verbalización o escritura de un enunciado que las explicitara. Las tareas enfocadas en el uso de los hechos geo-

métricos fueron tareas de verificación, anticipación, justificación cuyas características se relatan en Acosta y Cardozo (2021) y tareas de construcción definidas en Acosta (2008).

El pilotaje de la secuencia de tareas se realizó con dos estudiantes de primer semestre del programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, quienes estaban finalizando el curso de geometría euclidiana. Ambos estudiantes trabajaron en equipo en todas las tareas.

Los resultados principales evidenciaron que: en las tareas la experimentación en el *software* se favoreció el reconocimiento y constatación de los hechos geométricos y estos fueron usados en las tareas propuestas como herramientas de construcción, verificación, validación de razonamientos y como estrategia de solución de las tareas.

En ese sentido, en este reporte queremos mostrar los resultados de una tarea de construcción realizada en el pilotaje.

## GEOMETRÍA DINÁMICA EXPERIMENTAL

Acosta (2005) propone y define la geometría dinámica experimental (GDE) como una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en el SGD, con el propósito de favorecer la formulación de conjeturas sobre propiedades geométricas de tales objetos. A su vez, estas conjeturas se verifican mediante la medición, el arrastre y la construcción de objetos auxiliares.

Es decir, la GDE legitima el uso del SGD mientras que, a partir de la percepción visual lograda al manipular los objetos, se elaboren procesos de experimentación enfocados en realizar conjeturas referentes a sus propiedades geométricas y se desarrollen estrategias para argumentar la falsedad o veracidad de estas. Así, exponemos a continuación el proceso de validación e invalidación de conjeturas en esta práctica geométrica.

### Validación e invalidación de conjeturas

Referente a la invalidación de conjeturas, Acosta (2005) menciona que “[l]a invalidación de una conjetura en GDE puede considerarse equivalente a una demostración de su falsedad por medio de un contraejemplo” (p. 124).

En lo que respecta a la validación, Acosta (2005) expone que “[l]as conjeturas que no sean invalidadas por la experiencia se consideran verdaderas, en espera de una demostración formal” (p. 124). En otras palabras, si no se logra llegar a una demostración formal de la conjetura, esta se validará momentáneamente mediante una construcción que resista la prueba del arrastre.

## Técnicas de la geometría dinámica experimental

En Acosta (2005, 2008) se definen al menos cuatro técnicas que ayudan a resolver tareas de descubrimiento de lugares geométricos y de construcción.

- Técnica de detección de puntos: construir un cierto número de puntos que permitan describir la forma del lugar geométrico buscado.
- Técnica de lugares geométricos: se usa la herramienta *traza* para dibujar la trayectoria de un objeto que depende del movimiento de otro objeto, con el fin de obtener la forma del lugar geométrico buscado.
- Técnica de análisis: se estudia una figura que representa el problema de construcción resuelto, ya sea en el papel o en el *software*, para encontrar allí relaciones entre los objetos dados y los pedidos, hasta obtener relaciones que se puedan construir.
- Técnica de validación experimental: si se tiene una conjetura de la forma *si..., entonces...* en la que  $P1$  (antecedente) implica  $P2$  (consecuente), se construyen los objetos de  $P1$  y se aplica el arrastre para buscar posibles casos donde no se cumpla  $P2$ ; si no se encuentran estos contraejemplos, se considera válida la conjetura provisionalmente hasta que se encuentre un contraejemplo o se haga una demostración formal.

## DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO DE TAREAS

Buscamos que los estudiantes construyeran los siguientes hechos geométricos.

HG1: si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una secante  $PQ$ , que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el producto de las magnitudes  $PQ$  y  $PQ'$  es constante.

HG2: si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una tangente  $PT$  que toca al círculo en  $T$  y una secante  $PQ$  que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el cuadrado de la magnitud  $PT$  es igual al producto de  $PQ$  y  $PQ'$ .

HG3: si dos círculos pasan por un punto alineado con sus centros, entonces los círculos son tangentes en dicho punto.

HG4: si dos triángulos están en posición de similitud, entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice común.

Así, el diseño de tareas realizado se divide en dos actividades: la primera actividad se enfoca en HG1 y HG2, y la segunda en HG3 y HG4. En cada actividad se proponen las respectivas tareas enfocadas en promover la construcción y el uso de los hechos geométricos correspondientes.

Centraremos la atención en la primera tarea de construcción (segundo problema de Apolonio) propuesta en la primera actividad después de que los estudiantes formularon, verificaron experimentalmente y demostraron ¿formalmente? HG1 y HG2. El siguiente es el enunciado de la tarea: dada una recta  $l$  y dos puntos  $A$  y  $B$  al mismo lado de  $l$ , construir un círculo  $c$  que sea tangente a la recta  $l$  y pase por los puntos  $A$  y  $B$  (véase figura 1).

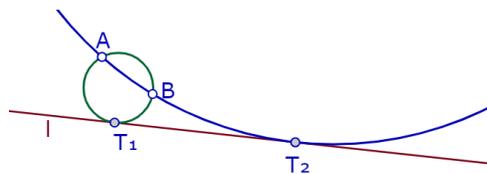


Figura 1: tarea de construcción resuelta

### Análisis a priori de aspectos de la situación didáctica propuesta

Conjeturamos que, para resolver esta tarea, los estudiantes podrían ajustar perceptualmente una construcción que satisfaga las condiciones del enunciado. Basándose en exploraciones adicionales, como la construcción de objetos auxiliares, lograrían obtener la configuración que muestra la figura 2. Esto debido a su experiencia en el curso y la manera en la que abordaban las tareas de construcción.

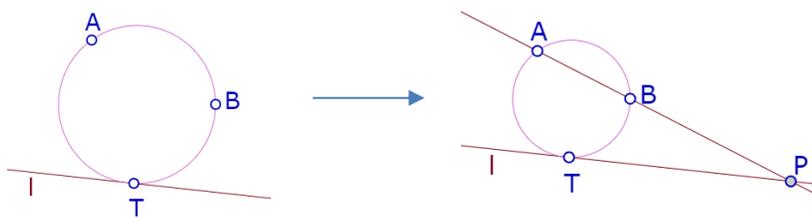


Figura 2: ajuste perceptual de la construcción

Se esperaba que los estudiantes usaran el HG2 y concluyeran que se cumple, de manera perceptiva, la relación  $PA \cdot PB = PT^2$ ; considerando que dicha relación era suficiente para construir el punto de tangencia  $T$  y con ello el círculo pedido. Para obtener la relación mencionada, consideramos dos métodos que podrían usar los estudiantes; uno recurre al HG2 (figura 3 izquierda), el otro al teorema de la media geométrica en un triángulo rectángulo (figura 3 derecha), como se muestra a continuación.

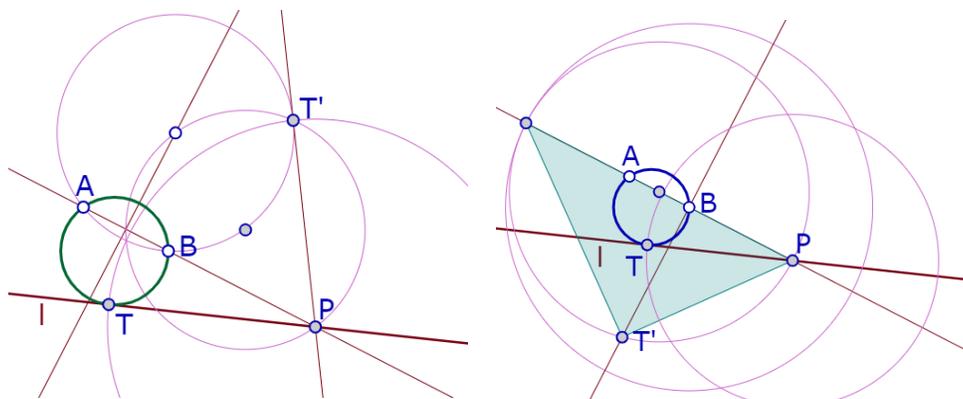


Figura 3: construcción usando el HG2 (izquierda); construcción usando el teorema de la media geométrica (derecha)

### Análisis a posteriori

En la experimentación, los estudiantes inicialmente hicieron un dibujo en el papel y en el *software* imaginando la tarea resuelta y realizando exploraciones para determinar el centro del círculo pedido; trazaron mediatrices, diámetros, radios y cuerdas. Sin embargo, estas exploraciones no los llevaron a concretar alguna idea para resolver la tarea; ante esto, el profesor les pidió que trazaran la recta  $AB$  y consideraran su punto de corte con  $l$  y nombraran el punto de tangencia del círculo con  $l$ , estos puntos los nombraron  $W$  y  $R$  respectivamente.

A pesar de esta instrucción, los estudiantes insistieron en encontrar el centro del círculo. Esto se pudo deber a que al considerar la tarea resuelta su atención se enfocó en construir dicho centro mediante diversas exploraciones en el *software*, por lo que desistir de tales exploraciones requiere abandonar un hilo de ideas que se estaba construyendo; decisión y proceso que no ocurren de manera inmediata.

De modo que, para invitarlos a realizar otras exploraciones, el profesor les pidió que trazaran una recta secante al círculo que pasara por  $W$ , designando  $K$  y  $T$  los puntos de corte.

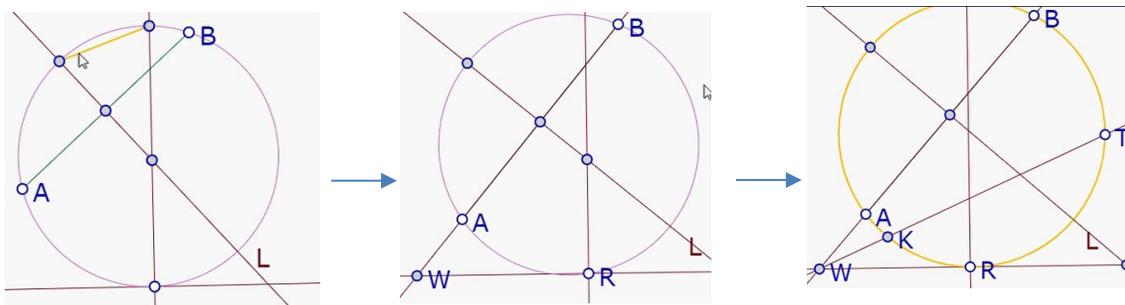


Figura 4: exploración de los estudiantes

Explorando la construcción (véase figura 4), los estudiantes identificaron que las magnitudes  $WA, WB, WK, WT$  y  $WR$  estaban relacionadas. Para expresar estas relaciones usaron HG1 y HG2 para concluir que  $WK \cdot WT = WA \cdot WB$  y  $WA \cdot WB = WR^2$ , reconociendo los antecedentes de los hechos geométricos y concluyendo sus consecuentes. La segunda igualdad los llevó a establecer una conexión con el teorema de la media geométrica, por lo cual construyeron un triángulo rectángulo, usando el segundo teorema de Tales, cuya altura fuera media geométrica de  $WA$  y  $WB$ , resolviendo así la tarea de construcción (véase figura 5).

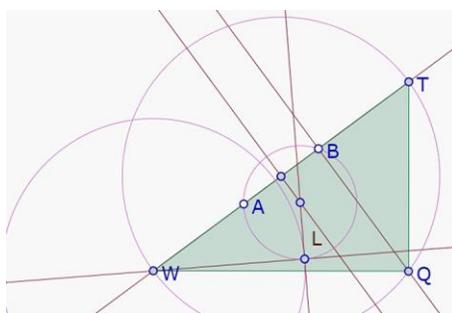


Figura 5: solución de la tarea por parte de los estudiantes

## CONCLUSIONES

Los estudiantes en un inicio realizaron, sin éxito, construcciones de objetos auxiliares para encontrar relaciones entre ellos y así construir el centro del círculo y poder resolver el problema. En ese sentido, la GDE permite la exploración de

conocimientos teóricos (definiciones, teoremas, postulados, axiomas) asociados en este caso a círculos, cuerdas, radios y rectas secantes.

En esta tarea de construcción el uso de la técnica de análisis y la exploración en el *software* posibilitaron la identificación de propiedades geométricas que se podían garantizar para construir el círculo; en particular el HG2, que al identificarlo los llevó a establecer una relación con el teorema de la media geométrica, y para usar este último en la construcción, aludieron al segundo teorema de Tales y así desarrollaron una estrategia para resolver la tarea.

No obstante, un factor importante por corregir de esta situación es la libertad que se les dio a los estudiantes al inicio de las exploraciones, pues el uso del HG1 y HG2 no surgió de manera natural. Consideramos también que la omisión de estos dos hechos geométricos pudo deberse a que los estudiantes no asociaron el teorema de la potencia de un punto respecto a un círculo (HG2) con tareas relacionadas con la tangencia. Esto se debe, en particular, a la forma en que se enunció el hecho geométrico, ya que la tangencia de la recta con el círculo se presentó como una condición y no como una consecuencia.

## REFERENCIAS

- Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(3), 121-140.
- Acosta, M. (2008). *Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie*. Tesis doctoral, Université Joseph Fourier, Francia. <https://theses.hal.science/tel-00278682>
- Acosta, M. y Cardozo, S. (2021). Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando *software* de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 49, 255-276. doi: 10.17227
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá, Colombia: una empresa docente.
- Caicedo, S. (2023). *Diseño de tareas en DGPad-Colombia para promover la construcción y el uso de los hechos geométricos*. Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. <https://noesis.uis.edu.co/items/2927b389-d3f3-469d-8dc9-7eee3ddb7b1f>
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En Á. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on*

*the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

# COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE PROFESORES DE PRIMARIA: MECANISMO PARA CONSTRUIR SIGNIFICADO SOBRE EL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN EN GEOMETRÍA

**Devsy Corredor y Óscar Molina**

*Universidad Pedagógica Nacional*

dncorredorr@upn.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

Presentamos un análisis parcial de intervenciones de miembros de una comunidad de práctica de profesores de primaria, suscitadas cuando se les solicitó exponer una tarea que ellos usan o usarían para promover argumentación en sus estudiantes. El propósito fue conocer sus significados sobre los términos argumento o argumentación e identificar cómo tales significados se modificaban (o no) producto de la interacción. Adoptamos un enfoque fenomenológico e interpretativo a partir de la investigación-acción; usamos la propuesta del Grupo AEG de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) para categorizar aspectos del significado de argumento. Los análisis muestran que los profesores tienden a manifestar significados que aluden a lo que detona o favorece una argumentación o a los recursos para producir un argumento; también insinúan la intención de los profesores de construir colectivamente conocimiento sobre el término argumento (*e. g.*, elementos de un argumento).

## INTRODUCCIÓN

Aun cuando diversas propuestas curriculares propenden por la participación de los estudiantes en diferentes procesos de la actividad matemática (*e. g.*, argumentación, visualización, comunicación) no es usual que las prácticas de los profesores se condigan con esa pretensión. Según McNeill y Knight (2013), los profesores tienen dificultades para integrar el proceso de argumentación en sus prácticas de enseñanza debido a su falta de comprensión de los elementos que conforman un argumento y de las estrategias didácticas que el profesor puede fomentar para promover una interacción en la que se suscite la argumentación entre sus estudiantes. Una razón de este fenómeno tiene que ver con la escasa formación de los profesores en relación con dicho proceso (Boero *et al.*, 2018). Este escenario no es ajeno a un colectivo de profesores de las instituciones educativas en las que tuvimos la oportunidad de desarrollarnos profesionalmente. Una entrevista colectiva que dirigimos a cuatro de tales profesores que procuran

Corredor, D. y Molina, Ó. (2024). Comunidad de práctica de profesores de primaria: mecanismo para construir significado sobre el proceso de argumentación en geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 139-146. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

generar espacios que promuevan aprendizaje en geometría en la educación de básica primaria, desveló que ellos coinciden en diversas problemáticas que obstaculizan este propósito, entre estas, las siguientes: (i) Hay una falta de contextualización de los conceptos geométricos en la vida diaria de los estudiantes, así como una discrepancia entre lo planificado y lo implementado en el aula. Señalan que la geometría suele relegarse al último periodo del año escolar, lo que dificulta su enseñanza efectiva, asuntos que coinciden con lo reportado por varios estudios (Ibarguen, 2016 y Sancho-Blanco, 2021). (ii) Identifican una falta de conocimientos sobre geometría, especialmente en lo que refiere a los procesos de visualización y argumentación (que se hizo evidente cuando se les cuestionó sobre cómo promueven el desarrollo de tales procesos en sus estudiantes).

La co-reflexión surgida en la entrevista conjunta motivó un proceso de formación colectiva para este conjunto de profesores de primaria, enfocada en la construcción de un conocimiento especializado sobre argumento, argumentación y diseño de tareas que la promuevan. Decidimos, entonces, conformar un colectivo de profesores con el objetivo de crear un espacio a partir del cual pudiéramos alcanzar este propósito; en suma, iniciamos la formación de una comunidad de práctica. Con esto en mente, desde un punto de vista investigativo, tuvimos la intención de responder la siguiente pregunta: *¿Qué incidencia tiene una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en la cualificación de su discurso y prácticas profesionales en lo que respecta al proceso de argumentación y al diseño de tareas idóneas que lo promuevan?*

Mediante este reporte, pretendemos comunicar parte de los resultados que hemos obtenido hasta el momento. Específicamente, queremos mostrar cómo la comunidad ha influido para que una profesora haya aprovechado la oportunidad de hacer ostensivos sus significados sobre los asuntos de interés y cómo ha podido modificar levemente su discurso a partir de la interacción suscitada en el colectivo, producto de una gestión por parte de la primera autora de este texto, como una de las líderes de la comunidad.

## REFERENTES CONCEPTUALES

Los referentes conceptuales que sustentan y orientan nuestro proyecto de investigación de manera preliminar giran en torno a la caracterización de un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor, y una postura sobre comunidad de práctica. No presentamos una conceptualización sobre argumento y

tarea dado que construir dicha conceptualización fue un asunto eje del colectivo cuyo proceso inició sin una referencia específica.

*Modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor.* Fundamentamos nuestro estudio en la dimensión didáctica del modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor (CDM), propuesto en el marco del enfoque onto-semiótico –EOS– (Pino-Fan y Godino, 2015). El modelo precisa facetas para esta dimensión (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional, ecológica) con sus respectivos descriptores, los cuales procuran dilucidar elementos del conocimiento didáctico que un profesor debe poner en juego o tener durante su ejercicio profesional. Consideramos que esta base nos provee elementos generales que debemos ajustar con descripciones específicas para precisar elementos clave del conocimiento que se pondrían en juego cuando se pretende diseñar tareas de argumentación en geometría. Tenemos en mente usar la propuesta del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG), con relación a precisar algunos aspectos de ese conocimiento relativos a la faceta epistémica sobre la conceptualización de argumento y argumentación (naturaleza u objeto, recursos, elementos, detonantes, relaciones con otros objetos, finalidad, circunstancias favorecedoras).

*Comunidad de práctica (CoP).* Se define como un grupo de individuos que comparten un conjunto de problemas, intereses o pasiones sobre un tema particular y profundizan su conocimiento a través de la colaboración social. Wenger et al. (2002) le atribuye tres rasgos característicos a la práctica que aglutina y determina a una comunidad de práctica. (i) *Compromiso mutuo*: cada miembro comparte y recibe conocimiento, valorizando el conocimiento parcial individual sobre la acumulación total de saber. (ii) *Empresa conjunta*: la CoP debe tener objetivos y necesidades comunes, aunque no sean homogéneos. Cada miembro puede interpretar estos objetivos de manera distinta, pero deben coordinarse y motivar a la comunidad, ajustándose según sea necesario. (iii) *Repertorio compartido*: la CoP adquiere un conjunto de rutinas, palabras, gestos, herramientas y maneras de hacer y hablar que facilitan la adquisición y construcción de conocimientos. Este repertorio compartido es resultado de una reflexión y construcción de metodologías apropiadas para abordar el área de interés. Hemos dicho que los cuatro profesores que fueron entrevistados inicialmente decidieron conformar un colectivo por cuanto comparten un compromiso con un propósito común que tiene que ver con cualificar su conocimiento sobre argumento compartiendo sus inquietudes y conocimientos sobre este constructo. En consecuencia, tenemos herramientas para decir que el primer criterio sugerido por Wenger

se cumple para este caso. Los otros dos fueron elementos que se procuraron satisfacer a lo largo de las sesiones de encuentro. Enseguida, damos unos visos metodológicos que apuntaron a la conformación de la CoP, y a la manera mediante la cual procuramos ver el efecto de la CoP en los profesores participantes.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se realiza enseguida una breve descripción de la población involucrada en la investigación, la perspectiva investigativa y el enfoque y aproximación asumidos. Además, se describen la estrategia investigativa que se adoptó y las herramientas o procedimientos usados para recabar información, escoger los datos y hacer el análisis de una de las participantes de la CoP. Los miembros del colectivo incluyen a dos profesoras del Colegio San Vicente IED y dos profesores de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria San Isidro. Todos ellos desempeñan roles fundamentales en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria; sin embargo, ninguno de los participantes posee un título de licenciatura en matemáticas ni cuenta con formación adicional específica en esta área.

Esta investigación se guía por el enfoque fenomenológico, ya que, como lo señala Camargo (2021), busca llegar a descripciones, explicaciones, inferencias o cuestionamientos fundados sobre los fenómenos estudiados. El objetivo principal es construir significados relacionados con las acciones y expresiones humanas, además de explorar posibles vías de cambio. Para ello, se ha optado por una aproximación interpretativa interaccionista, centrada en la interpretación de grupos específicos de acciones e interacciones de interés particular. Esto se alinea con el propósito central de la investigación, que pretende indagar cómo la colaboración en procesos específicos –como las reflexiones surgidas en las discusiones sobre el diseño e implementación de tareas para fomentar la argumentación– tiene el potencial de cualificar las prácticas profesionales y el discurso de los participantes. Esta aproximación también se ajusta a la investigación-acción, que busca relacionar el enfoque experimental de la ciencia social con programas de acción social que no solo buscan comprender los fenómenos sociales, sino también intervenir en ellos de manera activa y transformadora. Se concibe como un proceso cíclico que involucra distintas etapas, desde el análisis inicial hasta la evaluación posterior (Lewin, 1992). Para este estudio se realizaron dos ciclos de investigación: el primero surgió de la preocupación del colectivo de profesores sobre cómo diseñar tareas que fomenten la argumentación; este problema nos llevó a plantear un subproblema relacionado con la falta de conocimiento de los profesores de primaria sobre los objetos argumentación y

argumento. Este paso nos permitió discutir y llegar a acuerdos sobre lo que entenderíamos por estos términos y por tareas de argumentación. El segundo se enfocó en el diseño de una tarea que permitiera a los estudiantes argumentar. Para el ejemplo que presentamos, nos centramos en el primer ciclo, en lo que respecta a la fase de reflexión y análisis del plan implementado.

## Construcción y análisis de los datos

Para la construcción de los datos, se organizó la información y, posterior a ello, se llevó a cabo un proceso de reducción (Camargo, 2021). Cada sesión (10 en total) fue videograbada; los discursos verbales relacionados con el conocimiento respecto a la argumentación y el diseño de tareas de argumentos fueron transcritos. Una vez reducida la información, construimos las unidades o datos de análisis, que son pequeños fragmentos de transcripción depurada (palabras, frases, oraciones o párrafos) en donde se evidencia algún aspecto relacionado con los asuntos de interés. Las interpretaciones realizadas sobre dichos aspectos se hicieron a partir de un proceso de microanálisis en los que usamos las categorías propuestas por el Grupo AEG. En lo que respecta al ejemplo que exponemos en la siguiente sección, nos centramos en tres categorías. (i) Detonante: discurso en el que mencionan aspectos de la interacción comunicativa que sirven como detonante para que surjan argumentos o se adelante un proceso de argumentación; es el caso de una pregunta explícita sobre el porqué de lo que se dice o hace. (ii) Circunstancia favorecedora: discurso en el que se refieren a situaciones o sucesos que favorecen la argumentación o la producción de argumentos; es el caso del trabajo en grupo. (iii) Recursos: discurso que alude a formas de argumentar o de producir argumentos; es el caso en que el discurso alusivo involucra medios retóricos.

## EJEMPLOS DE ANÁLISIS Y ALGUNOS RESULTADOS

Presentamos el análisis de dos de los episodios. Un episodio cuyo asunto central es el discurso de una profesora, producto de una tarea de formación profesional que se les propuso: exponer enunciado de una tarea de geometría que ellos usan (o usarían) en sus clases para promover argumentación en sus estudiantes y precisar por qué creen que promueve ese proceso. El segundo episodio insinúa la construcción colectiva de un acuerdo sobre lo que para la comunidad se entenderá por argumentación.

Respecto al primer episodio, la profesora J elaboró la siguiente producción:

Catalina trazó en su cuaderno los siguientes ángulos:



Catalina dice que el ángulo de la derecha mide más que el ángulo de la izquierda porque sus lados son más largos. Angélica dice que los dos ángulos miden lo mismo porque sus aberturas son iguales.

- ¿Quién tiene la razón, Catalina o Angélica? Justifica tu respuesta.
- Usando el transportador mide los ángulos ¿qué puedes concluir?

En la siguiente tabla condensamos los discursos de J al presentar su producción. Además, proponemos nuestra interpretación (la cual busca destacar algún aspecto del significado que ella, en el uso, le otorga al término *argumentación*) e indicamos la categoría correspondiente basada en las propuestas por el Grupo AEG.

Discurso	Interpretación	Término	Categoría
[A partir de la tarea, los estudiantes] observan las dos imágenes y tenían que discutir y justificar lo que prefieren. Recuerden que el enunciado era el siguiente: Catalina dice que el ángulo de la derecha mide más que el ángulo de la izquierda porque sus lados son más largos. Y Angélica dice que los dos ángulos miden lo mismo porque sus aberturas son iguales. La pregunta era: ¿quién tiene la razón, Catalina o Angélica?	Un detonante para justificar es tener ideas que contrastan y discutir.	Argumentación	Detonante
Ellos se hicieron en la clase en grupo [...] daban la respuesta y decían al compañero por qué sí o por qué no.	Un favorecedor de la acción de justificar es trabajar en grupos.	Argumentación	Favorecedor
Ahí nos dimos cuenta que, si los niños tienen el preconcepto... el concepto de ángulo, lo podían resolver y los que no lo tenían, se distrajeron un poquito con el largo de los lados y ahí justificaron, pues mal.	Justificar en la clase de matemáticas implica hacer uso de preconceptos.	Argumentación	Recurso

Tabla: primer análisis de la producción de J

A partir de la tarea inicial propuesta, podemos notar que, J hace ostensivos sus significados sobre el término argumentación, al aludir, indirectamente, a elementos de una tarea de argumentación. Al parecer, para J, una *tarea de argumentación* debe llevar a las siguientes acciones: plantear puntos de vista que contrastan, pedir justificación de una escogencia a partir de conocimientos involucrados en la clase, y trabajar en grupos. Con esto en mente, podemos indicar algunos atributos que J le otorga al término argumentación. En primer lugar, para ella existe una *relación* entre argumentar y justificar (posiblemente, argumentar es justificar algo, una escogencia, por ejemplo), pues cuando se le preguntó por una tarea de argumentación ella hizo referencia a la acción de justificar. Además, parece que, para ella, la acción de justificar (por ende, de argumentar) usa como *recurso* preconceptos sobre objetos matemáticos, se *detona* cuando una situación cuenta con dos posturas sobre algo y se debe escoger la más apropiada, y se *favorece* cuando se trabaja en grupo.

El segundo episodio ocurrió al discutir la definición de argumentación, construida colectivamente (a partir de consultas individuales). Específicamente, al pedir que estudiaran tal definición, la profesora D se enfoca en el fragmento en el que se alude a los *elementos* garantía y razón de un argumento. Para ella no era clara la distinción entre estos términos; esto suscita una serie de intervenciones. El profesor L menciona que “garantía es lo que permite garantizar que todo está bien [...] Es como cumplir con algo, es como la premisa”. D expresa que no entiende muy bien lo que quiere decir L, porque para ella “premise” o “lo que garantiza algo” son cosas distintas: específicamente, ella dice que “la garantía es el soporte o las evidencias que sirven de apoyo”. El profesor J manifiesta que sigue confundido con lo dicho por D y L, porque no nota diferencia entre lo que es un soporte, una evidencia o una premisa. Dice que una garantía “es una afirmación de valor general, tales como normas, leyes, principios generalmente aceptados que garantizan la valoración de los razonamientos”. Esta exposición de ideas lleva a L a modificar su primer discurso diciendo ahora que “la garantía son soportes, normas, las reglas [...], no solo premisas [...] las premisas son como lo dado” y D complementa diciendo “sí, como la evidencia [refiriéndose a las premisas] [...] la garantía es una regla que conecta”.

La descripción relativa al segundo episodio esboza algo del dinamismo y la colaboración inherentes a una CoP, más allá de la corrección de los discursos manifestados o que quedaron como producto. La discusión sobre un fragmento de la definición de argumento surgió como resultado del compromiso compartido de clarificar términos presentes en esta. Las intervenciones de los miembros,

desde la preocupación inicial de D hasta las contribuciones de L y J, reflejan un intento de construcción colectiva de conocimiento. A través del intercambio de ideas, los participantes fueron abordando divergencias hasta tal punto que dos de ellos [D y L] modificaron sus discursos.

Los episodios muestran cómo la participación voluntaria en una CoP suscita la explicitación de significados de una manera genuina (no impostada) y la posibilidad de una construcción colaborativa de significados que se van especializando gradualmente. Por ejemplo, en el segundo episodio es posible notar que los discursos de los profesores sobre garantía no explicitan el sujeto gramatical sobre el cual recae la *evidencia* o la *regla general* (la aserción para el primer término, o el dato y la aserción vinculándolos, para el segundo) ni el propósito de enunciarlos en un argumento (justificar la aserción); no obstante, tenemos evidencia para decir que, en episodios ulteriores, los discursos van cambiando hasta el punto de ir precisando, paulatinamente, el rol que los *elementos* de un argumento (dato, garantía y aserción) tienen en él.

## REFERENCIAS

- Boero, P., Fenaroli, G. y Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. En A. Stylianides y G. Harel (eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 49-67). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_4)
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ibarguen, Y. (2016). Diseño de un recurso pedagógico en una comunidad de práctica que integra un AGD para la enseñanza de la geometría. Tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- McNeill, K. y Knight, A. (2013). Teachers' pedagogical content knowledge of scientific argumentation: The impact of professional development on K-12 teachers. *Science Education*, 97(6), 936-972. DOI: [doi.org/10.1002/sce.21081](https://doi.org/10.1002/sce.21081).
- Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Sancho-Blanco, V. (2021). La Zaragoza mudéjar escenario didáctico para el aprendizaje basado en proyectos en la geometría de 3.º Educación Secundaria Obligatoria. Tesis de maestría, Universidad Internacional de la Rioja.
- Wenger, E., McDermott, R. y Snyder, W. (2002). *Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge*. EUA: Harvard Business School Press.

# CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL SOBRE DEFINICIONES DE POLÍGONOS

**Jennifer Fonseca y Helen Guillén**

*Universidad Nacional de Costa Rica*

[jennifer.fonseca.castro@una.cr](mailto:jennifer.fonseca.castro@una.cr), [hellen.guillen.oviedo@una.cr](mailto:hellen.guillen.oviedo@una.cr)

La investigación sobre la que aquí damos algunos detalles es cualitativa de carácter descriptivo; tiene como objetivo caracterizar el conocimiento matemático de los profesores de matemáticas en formación inicial sobre definiciones de polígonos, mediante el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*. Se aplicó un cuestionario durante 2023 a 13 profesores de matemáticas en formación inicial que cursaban cuarto año de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Los resultados obtenidos brindan insumos a formadores de profesores de matemáticas e investigadores para la revisión y el análisis de programas de formación docente, así como para la reflexión sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría y sus dificultades.

## INTRODUCCIÓN

En la comunidad matemática, existe consenso sobre la geometría como pilar en la formación académica y cultural del individuo, que debe estar presente en todos los niveles educativos, dada su aplicación en diversos contextos, su capacidad formadora del razonamiento lógico y su contribución al desarrollo de habilidades tales como visualización, abstracción, comunicación, construcción, pensamiento crítico e intuitivo, capacidad de relacionarse con el espacio, entre otros (Quintero, 2014). En el currículum matemático costarricense, específicamente en los *Programas de Estudio de Matemáticas* del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), la geometría se plantea como organizadora de los fenómenos del espacio y la forma de obtener patrones y modelos relativos a los objetos geométricos y las situaciones reales (MEP, 2012). No obstante, su enseñanza y aprendizaje sigue presentando dificultades y retos, tanto para los estudiantes como para los docentes, debido, entre otras cosas, al enfoque tradicional de enseñanza, el desconocimiento de algunos conceptos matemáticos por

Fonseca, J. y Guillén, H. (2024). Caracterización del conocimiento matemático de los profesores en formación inicial sobre definiciones de polígonos. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 147-154. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

parte de los docentes a cargo y la dificultad de estos para implementar las nuevas disposiciones curriculares vigentes (Carreño, 2021; Carrillo et al., 2018). Por ejemplo, Carreño y Climent (2010) reportan importantes limitaciones conceptuales en geometría por parte de futuros profesores de matemáticas de España, así como deficiencias conceptuales al momento de relacionar objetos geométricos y crear redes geométricas complejas. En otra investigación con estudiantes para profesores de matemáticas de Perú, Carreño (2021) reporta que, en general, los futuros docentes involucrados en su investigación “no tienen bien adquiridos los significados de algunos conceptos geométricos elementales, sus argumentos se basan más bien en aspectos perceptivos” (p. 250). Con relación a las definiciones conceptuales proporcionadas les faltó incluir condiciones, precisión y coherencia entre la imagen conceptual y la definición conceptual. La autora afirma que, pese a los esfuerzos realizados en estos estudios, se necesitan instrumentos que permitan indagar más sobre los conocimientos de los que se tienen indicios. El conocimiento especializado de los docentes de matemática ha cobrado relevancia, con el propósito de caracterizar lo que sabe y debería saber este profesional en términos de contenidos matemáticos y didácticos (Carreño y Climent, 2010). En esta línea, han surgido diferentes modelos que permiten analizar el conocimiento de los profesores; por ejemplo, el modelo *Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge* (MTSK) planteado por Carrillo et al. (2018), el cual considera la naturaleza especializada del conocimiento del profesor de matemáticas, tomando en cuenta lo que el profesor utiliza y necesita. En el caso de la carrera de formación docente de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM) de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), el aprendizaje de los saberes geométricos se centra en cuatro cursos del plan de estudios: dos cursos de geometría euclidiana, uno de geometría analítica y uno de didáctica de la geometría. Los conocimientos y habilidades que se desarrollan en estos cursos son indispensables para el buen desempeño laboral de los futuros docentes de matemáticas.

En este contexto, centramos nuestra investigación en caracterizar el conocimiento matemático de los profesores de matemáticas en formación inicial (PMFI) de la carrera BLEM de la UNA sobre la definición de polígono, la de polígono convexo y la de polígono regular, pues dichos objetos geométricos están presentes en todos los niveles escolares a los que los PMFI se enfrentarán en la práctica.

## MARCO TEÓRICO

En esta investigación utilizamos el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas o MTSK (por sus siglas en inglés) como herramienta teórica y metodológica para describir y caracterizar el conocimiento matemático sobre polígonos de los PMFI de la UNA. Este modelo considera dos dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. El conocimiento matemático integra los conocimientos de la propia disciplina matemática que se enseña, así como los contenidos que se quiere que aprenda el estudiante. Este dominio considera tres subdominios (Carrillo et al., 2018) de los cuales el conocimiento del contenido matemático llamado conocimiento de los temas o KoT (por sus siglas en inglés) es el de interés para esta investigación. Este subdominio considera el conocimiento disciplinar de conceptos, definiciones, proposiciones, propiedades, procedimientos, las distintas formas de representación conceptual y las conexiones interconceptuales (Climent et al., 2014). Particularmente, indagamos en el conocimiento matemático de los PMFI sobre la definición y propiedades de polígono, polígono convexo y polígono regular, haciendo uso de evidencias verbales, pictóricas y de clasificación. En este sentido, Mariotti y Fischbein (1997) establecen que las definiciones expresan propiedades y características del objeto matemático, que lo distinguen de y lo relacionan con otros; son el resultado de la observación e identificación de características del objeto que se desea definir, la declaración de propiedades a partir de esas características y la verificación de la definición a la luz de lo anterior. De esta manera, trabajamos con definiciones teóricas y descriptivas de los participantes, cuyo punto de partida es una imagen conceptual de donde se extraen propiedades que, al analizarse, se distinguen entre necesarias y suficientes; construyendo en este proceso una definición conceptual que puede ser correcta o incorrecta y que sistematiza el conocimiento existente (Carreño, 2021). Con relación a qué se entiende por correcta o incorrecta, utilizamos la clasificación proporcionada por de Villiers et al. (2009) quienes establecen que una definición es *correcta* si incluye las propiedades necesarias y suficientes que caracterizan el objeto que se quiere definir; una definición correcta puede ser económica (incluye solo las propiedades necesarias y suficientes) o antieconómica (incluye propiedades redundantes); y es *incorrecta* si contiene propiedades insuficientes o innecesarias.

## MARCO METODOLÓGICO

Nuestra investigación se ubica en el paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo ya que pretende caracterizar el conocimiento de los PMFI de la carrera BLEM de la UNA sobre polígonos, sin generalizar los resultados de la investigación pues se estudian los hechos como un todo (Rodríguez, 2003). Así, se busca entender las interpretaciones que hace el individuo de las situaciones planteadas (Cohen et al., 2002).

Participaron 13 PMFI de la carrera BLEM de la UNA, matriculados en el cuarto año de la carrera. Todos los sujetos participantes ya habían aprobado todos los cursos de geometría. Se aplicó un cuestionario a los participantes durante el 2023 que consta de 11 preguntas de respuesta abierta dirigidas a caracterizar el conocimiento de los participantes sobre la definición de polígono, polígono convexo y polígono regular. Para esto, los PMFI debían realizar las siguientes acciones: brindar una definición matemática (escrita con palabras) para cada uno de los objetos geométricos citados; identificar y brindar características de estos; y brindar y analizar figuras que representaran (o no) los objetos geométricos en cuestión. El cuestionario se compartió con expertos quienes brindaron sugerencias que enriquecieron los instrumentos y depuraron las categorías de análisis. Para el análisis de la información se empleó el análisis de contenido que permite la codificación, la categorización y la comparación de preguntas abiertas de cuestionarios, así como la descripción de patrones y tendencias en el contenido (Cohen et al., 2002). Se analizaron los resultados a la luz de los indicadores de evidencia de conocimiento elaborados para cada pregunta. Para la definición de polígono de  $n$  lados se utilizaron los siguientes indicadores: (i) es una sucesión de  $n$  puntos, con  $n \geq 3$ , (ii) los lados son segmentos, (iii) es una figura cerrada, (iv) los segmentos se intersecan solo en sus puntos extremos, y (v) ningún par de segmentos con un extremo común son colineales. Para clasificar como correcta la definición, se requería la referencia a todos los indicadores antes señalados. En el caso de la definición de polígono convexo, los indicadores fueron los siguientes: (vi) para cualesquiera dos puntos en el interior del polígono, el segmento que une estos puntos está enteramente incluido en su interior, (vii) para cualquier segmento que une un punto sobre un lado del polígono con otro punto sobre otro lado no interseca un tercer lado del polígono, y (viii) ningún par de puntos del polígono están a lados opuestos de una recta que contenga un lado del polígono. En esta definición era suficiente la mención a alguno de los tres indicadores para considerarla correcta. Por último, se establecieron los siguientes indicadores para la definición de polígono regular: (ix) debe ser un

polígono convexo, (x) debe ser un polígono cuyos lados son todos congruentes, y (xi) debe ser un polígono cuyos ángulos internos son todos congruentes. Para esta era necesario la mención de todos los indicadores.

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con relación a la definición matemática de polígono de  $n$  lados, la mayoría de los PMFI definen un polígono de  $n$  lados como una figura cerrada (indicador *iii*), cuyos lados son segmentos (indicador *ii*) que se intersecan solo en sus puntos extremos (indicador *iv*). Dejan de lado la no colinealidad de tres puntos consecutivos (indicador *v*) y que  $n$  debe ser mayor que 2 (indicador *i*). No hubo definiciones que incluyeran todos los indicadores requeridos, por eso, tales definiciones se podrían clasificar como incorrectas, según la clasificación de de Villiers et al. (2009), pues carecen de propiedades necesarias. En cuanto a la definición matemática de polígono convexo, solamente tres PMFI lograron dar una definición correcta y económica; los tres usaron el indicador *vi* para definirlo. La mayoría dejó en blanco la pregunta o indicaron no recordar la respuesta. Para la definición de polígono regular, 11 PMFI lo definieron como un polígono cuyos lados son congruentes (indicador *x*) y ocho de estos incluyeron además que sus ángulos internos deben ser congruentes (indicador *xi*). Ninguna de las definiciones incluía el indicador *ix*. Lo anterior señala que las definiciones matemáticas de polígono regular proporcionadas por los PMFI son incorrectas, pues carecen de la propiedad de convexidad. La tabla 1 resume los resultados de las definiciones brindadas por los PMFI.

Indicadores de evidencia de conocimiento										
Polígono de $n$ lados					Polígono convexo			Polígono regular		
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)
1	10	8	7	1	3	0	0	0	11	8

Tabla 1: cantidad de PMFI según indicador de conocimiento, encontrados en las definiciones matemáticas brindadas

La mayoría de las figuras brindadas por los participantes para ejemplificar el objeto polígono cumplían con todos los indicadores señalados en la respectiva definición correcta. Con relación a las figuras que no representaban el objeto polígono, la mayoría de los participantes brindaron ejemplos correctos. Como ejemplos de figuras que no representaban un polígono, predominaron las figuras

no cerradas, seguido de figuras con menos de tres lados y figuras cuyos segmentos se intersecan en un punto distinto a los extremos. En cuanto a las figuras que brindaron para representar polígonos convexos, polígonos no convexos, polígonos regulares y polígonos no regulares, la mayoría de los PMFI brindaron respuestas correctas. Sobre las figuras que representaban un polígono no regular, 11 PMFI respondieron correctamente, de estos, seis señalaron explícitamente el indicador no cumplido en las figuras (indicador  $x$  en todos los casos) y en los restantes no se señalaba, pero la diferencia en la longitud de los lados de los polígonos era notoria. Lo anterior se resume en la tabla 2, parte (a). En las representaciones de polígonos de los PMFI, la mayoría se pueden clasificar como correctas y económicas; la mayor dificultad se dio al brindar ejemplos de figuras que fueran polígonos, pero no convexos.

	(a) Figuras brindadas por PMFI						(b) Clasificación de figuras					
	Polígono de $n$ lados		Polígono convexo		Polígono regular		Polígono de $n$ lados		Polígono convexo		Polígono regular	
	C	NC	C	NC	C	NC	C	NC	C	NC	C	NC
Correcto	11	11	10	9	9	11	10	2	11	11	11	4
Incorrecto	2	2	3	4	4	2	3	11	2	2	2	9

Nota: Entiéndase C para la figura brindada por los PMFI que representa un polígono de  $n$  lados, un polígono convexo, o un polígono regular; y NC para la figura brindada por los PMFI que representa una figura que no es polígono, un polígono no convexo, o un polígono no regular.

Tabla 2: cantidad de PMFI según figuras brindadas y clasificadas sobre polígonos

Para polígonos, se les dieron 12 figuras; de estas, cinco eran polígonos los cuales la mayoría de los PMFI no tuvieron dificultad en identificar. Hubo 10 PMFI que acertaron todas las figuras que representaban un polígono, pero solo cinco las justificaron correctamente. De las figuras que no representan polígonos, solo dos participantes acertaron correctamente las siete figuras, pero solo uno las justificó correctamente. Las figuras de no polígonos que la mayoría de los PMFI pudieron identificar fueron aquellas cuyos lados no eran segmentos y las que no eran figuras cerradas; la mayoría de los PMFI justificaron correctamente las figuras no cerradas. Para la figura que no representaba un polígono, pues había tres vértices consecutivos colineales, solo dos PMFI la contestaron correctamente y la justificaron de forma correcta. Hubo un PMFI que logró identificar

correctamente todas las figuras, los polígonos y no polígonos, pero justificó correctamente solo seis de las 12. Para polígonos convexos, se les dieron cuatro figuras de las cuales dos eran polígonos convexos. De los PMFI que clasificaron correctamente los convexos, cinco justificaron adecuadamente utilizando el indicador *vi*; y de los que acertaron los polígonos no convexos, tres justificaron correctamente. En el caso de polígonos regulares, se les dieron siete figuras de las cuales tres eran polígonos regulares. De los que clasificaron correctamente los polígonos regulares, solo uno justificó correctamente, el resto omitió el indicador *ix*. De las figuras que representan polígonos no regulares, cuatro participantes contestaron correctamente y solo dos justificaron de forma adecuada. La tabla 2, parte (b) resume los resultados obtenidos.

De los resultados anteriores, es claro que los PMFI no tienen mayor dificultad en clasificar visualmente polígonos en convexos o no convexos, regulares o irregulares; no obstante, el problema persiste en establecer con exactitud las características que estos deben cumplir. En síntesis, los PMFI tienen dificultades definiendo matemáticamente el objeto polígono, incluso más definiendo matemáticamente polígono convexo. Sus definiciones matemáticas y justificaciones, en general, no incluyen propiedades necesarias. No obstante, las evidencias de sus conocimientos mejoran cuando estas definiciones vienen acompañadas de figuras. Las dificultades se notan cuando se enfrentan a figuras que no representan polígonos y a las que no representan polígonos regulares. Es claro que existen vacíos conceptuales en las definiciones de polígonos, polígonos convexos y polígonos regulares, unos más marcados que otros, que deben ser atendidos antes de que los PMFI lleguen a la práctica. Asimismo, existen deficiencias notorias en la habilidad de los PMFI para definir objetos geométricos, pues pese a que el cuestionario estaba diseñado para que revisaran en distintas ocasiones sus argumentos (definiciones y justificaciones) no se notó mayor cambio. Lo anterior coincide con los hallazgos de previas investigaciones en otros países (Carreño, 2021; Carreño y Climent, 2010). Estos resultados sugieren que desde la formación inicial de los futuros docentes de matemática se debe hacer hincapié en la importancia de la definición de objetos matemáticos, cómo se define matemáticamente, qué elementos son necesarios y suficientes en una definición y, principalmente, permitirles participar en la construcción de dichas definiciones, en lugar de solo dárselas como un producto por memorizar. Trabajos como este brindan insumos a formadores de profesores de matemáticas e

investigadores en la revisión y análisis de programas de formación docente (inicial y continua) en enseñanza de las matemáticas y coadyuvan en la búsqueda de nuevas áreas de investigación relacionadas con geometría.

## REFERENCIAS

- Carreño, E. (2021). *Conocimiento geométrico especializado en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a los polígonos*. Tesis de doctorado, Universidad de Huelva, España.
- Carreño, E. y Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas. *PNA*, 5(1), 11-23.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Climent, N., Carreño, E. y Ribeiro, C. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. En P. Leston (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1761-1769). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Londres: Routledge.
- de Villiers, M., Govender, R. y Patterson, N. (2009). Defining in geometry. En T. Craine y R. Rubinstein (eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.
- Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219-248.
- Ministerio de Educación Pública. (MEP) (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. San José, Costa Rica: Autor.
- Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Revista del Instituto de Investigaciones Educativas*, 7(12), 23-40.
- Quintero, O. (2014). Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría euclidiana. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. 22. Puerto Rico.

# ¿ES LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA CONSISTENTE?

**José Guevara y Harol Rodríguez**

*Universidad Nacional, Universidad Pedagógica Nacional*

[joguevarar@unal.edu.co](mailto:joguevarar@unal.edu.co), [herodriguezd@upn.edu.co](mailto:herodriguezd@upn.edu.co)

En este artículo exploramos la consistencia de la geometría de Lobachevski (también conocida como geometría hiperbólica); es decir, examinamos si su conjunto de axiomas conduce o no a alguna contradicción lógica. Con ese objetivo en mente, nos permitimos un breve contacto con la idea de sistema axiomático y sus elementos, así como con la idea de modelo, cuya esencia nos permitirá dar un sentido o significado a los elementos primitivos del sistema axiomático de la geometría de Lobachevski en el plano euclidiano. Particularmente, empleamos el modelo del semiplano superior de Poincaré para mostrar la consistencia relativa de dicho sistema, entendiendo que damos por sentado la consistencia de la geometría euclidiana la cual recae en la consistencia de la aritmética.

## MODELOS

La esencia de los sistemas axiomáticos formales está constituida por sus elementos primitivos, los cuales inicialmente vienen despojados de un significado propio (Blanché, 1965). Así mismo, en la raíz de estos sistemas encontramos los axiomas, que son los principios o “hechos de fe” sobre los cuales se construye la teoría, cuya veracidad no es inicialmente cuestionable (Torres, 1999). A partir de aquí, aflora la pregunta sobre los contextos o lugares matemáticos en donde los elementos indefinidos recobran significado, y cómo acceder a ellos. Para responder, los matemáticos han ideado herramientas lógicas llamadas modelos. Un modelo para un sistema axiomático es una interpretación, restringida a un contexto matemático, que se hace de sus elementos primitivos, siempre y cuando esto habilite o satisfaga que todos los axiomas sean verdaderos (Blanché, 1965).

Veamos unas palabras de Stillwell (2022) que permiten vislumbrar cómo los modelos delimitan el dominio de la verdad de los sistemas axiomáticos y el papel que jugaron las geometrías no euclidianas en esta nueva visión:

La geometría no euclidiana puso final a la idea de que los axiomas son verdades universales de las cuales otras verdades pueden ser derivadas usando lógica. En su lugar, los axiomas son verdades acerca de ciertos dominios llamados modelos, y sus consecuencias lógicas son verdades dentro de estos modelos. (p. 226)

Guevara, J. y Rodríguez, H. (2024). ¿Es la geometría hiperbólica consistente? En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 155-162. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Así las cosas, valiéndonos de la consistencia de la geometría euclidiana, a continuación, mostramos que el conjunto de axiomas de Hilbert junto con el axioma de Lobachevski son consistentes ya que no llevan a ninguna contradicción. En otras palabras, vamos a presentar una interpretación de los axiomas de la geometría hiperbólica en el plano euclidiano, donde se satisfacen dichos axiomas. Este modelo fue propuesto por el gran matemático universalista Henri Poincaré (1854-1912).

## UN SISTEMA AXIOMÁTICO PARA LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

La geometría hiperbólica está justificada mediante cuatro grupos de axiomas propuestos por Hilbert (1996) (I- axiomas de incidencia, II- axiomas de orden, III- axiomas de congruencia y IV- axiomas de continuidad) más el axioma de Lobachevski (véase figura 1) que afirma que “Dada una línea  $L$  y un punto  $P$  fuera de ella, entonces existen al menos dos paralelas a  $L$  por  $P$ ” (Moise, 1968, p. 161).

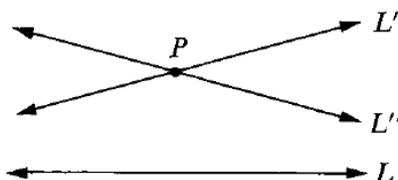


Figura 1: representación del axioma de Lobachevski de las paralelas (tomada de Moise, 1968, p. 162)

A partir de este sistema axiomático podemos comenzar a construir el edificio teórico de la geometría hiperbólica; sin embargo, ¿que nos asegura que en el futuro no vamos a tropezar con una proposición que sea falsa y verdadera al mismo tiempo? Para estar seguros de ello, debemos estudiar la consistencia de este conjunto de axiomas, es decir, construir un modelo en el que se satisfagan estos axiomas. Aunque existen varios modelos para la geometría hiperbólica, nos centraremos en el modelo del semiplano superior de Poincaré.

Antes de comenzar de lleno, debemos recalcar que para mostrar que los axiomas se satisfacen, básicamente se debe establecer la verdad de dichos axiomas. No queremos decir con esto que ahora los axiomas son demostrables, sino más bien que es posible ver si tienen sentido o significado. En consecuencia, utilizaremos elementos de la geometría euclidiana desde un enfoque métrico, teniendo como razón fundamental que bajo este enfoque métrico resulta más fácil mostrar la veracidad de estos hechos; contrariamente, con el enfoque sintético esto sería

un proceso mucho más laborioso. Así mismo, resaltamos que aquí solo se presentan las ideas principales de las pruebas; sin embargo, si el lector quiere sumergirse en este bello mundo, lo invitamos a que revise las demostraciones en todo su esplendor teórico en la bibliografía presentada.

## El modelo del semiplano superior de Poincaré

Como se mencionó antes, necesitamos de un universo en el que podamos interpretar los axiomas y que se satisfagan. Por lo tanto, es de esperarse que los términos que tenemos asignados como punto, recta o plano no tengan que corresponderse con las ideas que tenemos familiarizadas. Pues realmente lo que importa son las relaciones que hay entre dichos objetos mediante los axiomas.

Primeramente, definimos los puntos  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 0\}$ . Ahora definimos las rectas; en este modelo tenemos dos tipos de ellas. Las de tipo I, que se definen como  ${}_aL = \{(x, y) \in P: x = a\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Las de tipo II se definen como  ${}_cL_r = \{(x, y) \in P: (x - c)^2 + y^2 = r^2\}$ .

Observemos que las rectas de tipo II no se corresponden con la idea intuitiva de línea recta; en realidad, dicha ecuación representa una semicircunferencia con centro en  $(c, 0)$ . Los dos tipos de rectas satisfacen los dos primeros axiomas del grupo de incidencia de Hilbert, que se resumen en la existencia y unicidad de la recta: dados dos puntos  $A$  y  $B$ , entonces existe una única recta con la cual se corresponden los puntos  $A$  y  $B$  mutuamente (Hilbert, 1996). Esto se obtiene estudiando los dos tipos de líneas. Para el primer tipo es inmediato puesto que son líneas euclidianas; mientras que para las líneas de tipo II se deben considerar dos semicircunferencias que son distintas con el fin de concluir que tienen el mismo radio y centro, y con ello probar realmente que son iguales.

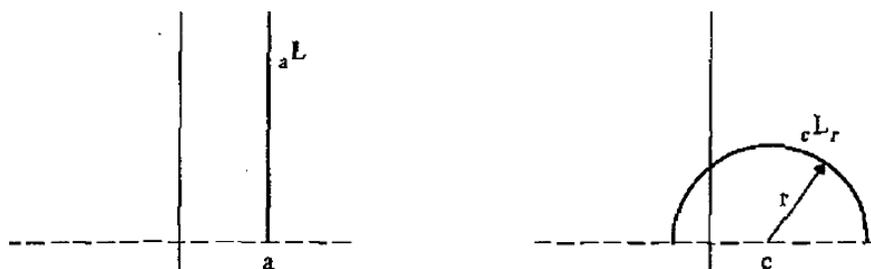


Figura 2: semiplano superior de Poincaré con los dos tipos de recta (tomada de Millman y Parker, 1981, p. 20)

Además, “las nuevas rectas” cumplen el tercer axioma del mismo grupo: sobre una recta existen al menos dos puntos (Millman y Parker, 1981). Existe al menos un punto no situado sobre una recta. Lo anterior se cumple teniendo en cuenta que la semicircunferencia tiene infinitos puntos, y el semiplano superior también (véase figura 2).

Asimismo, podemos mirar que este modelo satisface los axiomas de orden y congruencia dados por Hilbert (1996, pp. 5-6). Los enunciamos enseguida:

**II-1** Cuando un punto  $B$  está situado entre un punto  $A$  y un punto  $C$ ,  $A, B, C$  son tres puntos distintos de una recta y  $B$  está situado también entre  $C$  y  $A$ .

**II-2** Dados dos puntos  $A$  y  $C$ , existe siempre al menos un punto  $B$  sobre la recta  $AC$  de tal modo que  $C$  está situado entre  $A$  y  $B$ .

**III-3** De tres puntos cualesquiera de una recta no existe más que uno situado entre los otros dos.

**II-4** Sean  $A, B, C$  tres puntos no situados en línea recta y una recta del plano  $ABC$  que no contiene a ninguno de los puntos  $A, B, C$ : cuando la recta  $a$  pasa por un punto del segmento  $AB$ , seguramente pasa también o por un punto del segmento  $AC$  o por uno del segmento  $BC$  (véase figura 3).

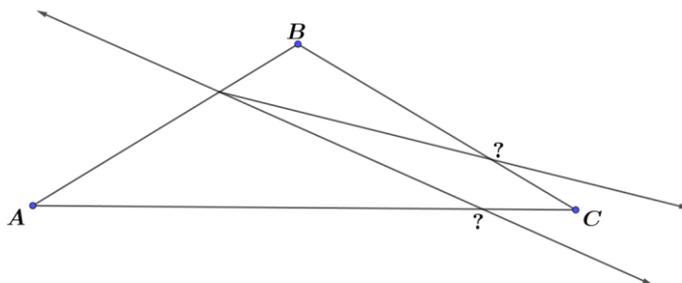


Figura 3: axioma II-4, axioma de Pash, de la geometría euclidiana

Para abordar los axiomas de orden, primero debemos analizar los dos tipos de rectas que tenemos en el plano. Para ello usaremos el orden lexicográfico con el fin de establecer el orden entre los puntos del plano y ver que este orden es compatible con la idea que deseamos establecer por medio de los axiomas de orden de Hilbert. En efecto, las rectas de tipo I y II satisfacen de manera inmediata los tres axiomas de orden de Hilbert, pues el orden lexicográfico y las propiedades de los números reales (arquimediana y densidad) en cada componente de las parejas ordenadas cumplen con lo establecido por dichos axiomas.

Enunciemos ahora el axioma de Pash en términos de las rectas tipo II. Dado el triángulo  $ABC$  y la recta  $a$ , entonces si  $a$  pasa por la recta que une a  $AC$  en  $M$ , entonces o pasa por la recta que une a  $BC$  o pasa por la recta que une a  $AB$ , como se visualiza en la figura 4.

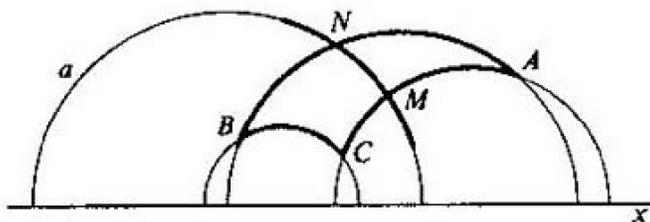


Figura 4: axioma de Pash en el semiplano superior de Poincaré (tomada de Efímov (1984, p. 137))

Para ver que se cumple el axioma de Pash es necesario recordar el teorema de las dos circunferencias “Sean  $C$  y  $C'$  círculos de radio  $a$  y  $b$  y sea  $c$  la distancia entre sus centros. Si cada uno de los números  $a, b, c$  es menor que la suma de los otros dos, entonces  $C$  y  $C'$  se intersecan en dos puntos y los puntos de intersección están en lados opuestos de la línea de los centros” (Moise, 1968, p. 263). Con esto se ha verificado que se cumplen los axiomas de orden.

Para el caso de los axiomas de congruencia, particularmente el primero y el segundo, tenemos que definir algunas herramientas para probar que dichos axiomas se satisfacen. Comencemos definiendo una función que nos permite medir la distancia entre dos puntos  $A(x_1, y_2)$  y  $B(x_2, y_2)$  en  ${}_cL_r$ :

$$d_H(A, B) = \left| \ln \left( \frac{\frac{x_1 - c + r}{y_1}}{\frac{x_2 - c + r}{y_2}} \right) \right|$$

En efecto,  $d_H(A, B)$  es una función de distancia porque cumple las propiedades que definen una métrica (Millman y Parker, 1981).

Los axiomas de congruencia tienen una gran dificultad para comprobarse y esto debería ser así, pues como se sabe, Euclides demostraba el criterio de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado usando movimientos. Este criterio corresponde con el axioma 5 del grupo III de Hilbert. Ahora, anunciemos los axiomas de Hilbert (1996) para la congruencia:

**III-1** Si  $A, B$  son dos puntos de una recta  $a$  y además  $A'$  es otro punto de esta o distinta de la recta  $a'$ , puede encontrarse siempre sobre uno de los lados de  $a'$ ,

determinados por  $A'$ , un solo punto  $B'$  tal que los segmentos  $AB$  y  $A'B'$  sean congruentes o iguales.

**III-2** Si los segmentos  $A'B'$  y  $A''B''$  son congruentes con el mismo segmento  $AB$ , también el segmento  $A'B'$  es congruente con el  $A''B''$ . (p. 13)

Recordemos que dos segmentos son congruentes si sus medidas son iguales. En este sentido, buscamos mostrar que los arcos de semicircunferencia son congruentes entre sí. Dados dos puntos  $A$  y  $B$  sobre las líneas de tipo II, podemos determinar su distancia, de donde obtenemos que  $d_H(A, B) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ; por lo tanto, podemos copiar  $k = d_H(A'B')$ . Esto nos lleva a la congruencia de segmentos y con ello queda satisfecho el primer axioma. El segundo axioma se tiene de manera inmediata, pues la igualdad satisface la propiedad lógica de sustitución.

Ahora bien, los tres axiomas faltantes de congruencia son:

**III-3** Sean  $AB$  y  $BC$  dos segmentos de la recta  $a$  sin puntos comunes y, por otra parte,  $A'B'$  y  $B'C'$  son dos segmentos sobre la misma recta  $a$  o sobre otra distinta  $a'$ , pero en todo caso, sin puntos comunes: si entonces  $AB \equiv BC$  y  $BC \equiv B'C'$  siempre se verifica  $AC \equiv A'C'$ .

**III-4** Dado un ángulo  $\sphericalangle(h, k)$  en un plano  $\alpha$ , una recta  $a'$  en un plano  $b$  y una de las regiones de  $b$  determinadas por  $a'$ ; representamos por  $h'$  un semirrayo de  $a'$  que parte de  $O'$ . Existe, entonces, en el plano  $b$  uno y solo un semirrayo  $k'$  tal, que el ángulo  $\sphericalangle(h, k)$  es congruente o igual al  $\sphericalangle(h', k')$  y, a la vez todos los puntos interiores del ángulo  $\sphericalangle(h', k')$  están situados en la región dada con respecto a  $a'$ . (Hilbert, 1996, pp. 14–15)<sup>1</sup>

**III-5** Si dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  verifican las congruencias  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$  y  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$  también queda satisfecha siempre la congruencia  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ . (Hilbert, 1996, pp. 15–16)

Para el caso de los anteriores tres axiomas de este grupo nos limitaremos a resaltar que desde el punto vista sintético hay que definir y construir un buen entramado teórico de la geometría euclidiana, como es el concepto de *inversión* y sus resultados, que se sale del alcance de esta presentación. Pasa algo similar con el enfoque métrico.

---

<sup>1</sup> El símbolo  $\equiv$  es usado por Hilbert para denotar la congruencia.

Enunciemos ahora los axiomas de continuidad de Hilbert (1996)

**V-1** (Axioma de la medida o de Arquímedes) Siendo  $AB$  y  $CD$  segmentos cualesquiera, existe siempre sobre la recta  $AB$  un número de puntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , de modo que los segmentos  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  son congruentes con el  $CD$ , y el punto  $B$  queda entre  $A$  y  $A_n$ .

**V-2** (Axioma de la plenitud lineal) Los puntos de una recta forman un sistema el cual no es susceptible de ampliación alguna, bajo la condición de conservar la ordenación lineal, el primer axioma de congruencia y el axioma de Arquímedes.  
(p. 34)

Estos axiomas son satisfechos porque al escoger el enfoque métrico se puede establecer la biyección entre los puntos de la recta y los números reales. Por lo tanto, estos axiomas se satisfacen en términos de números reales que cumplen dichas relaciones (Efímov, 1984). Finalmente, enunciemos el axioma de Lobachevski cuya esencia da vida a la geometría hiperbólica: “Dada una recta y un punto fuera de esta, entonces existen al menos dos rectas paralelas a la recta dada y que pasan por dicho punto” (véase figura 5).

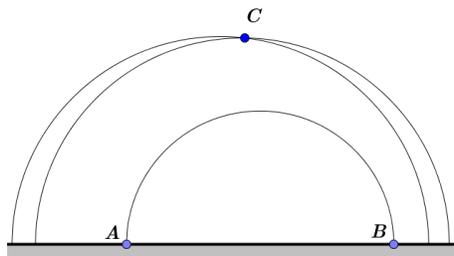


Figura 5: axioma de Lobachevski en el semiplano superior de Poincaré

Una prueba directa de esto es considerar una recta de tipo II y un punto  $C$  afuera de esta, y considerar dos rectas de tipo II diferentes que pasen por  $C$ . De esto se deduce que estas ecuaciones no tienen soluciones comunes, es decir, no hay intersección entre las semicircunferencias. Dicho esto, podemos asegurar que hay infinitas rectas que pasan por  $C$  y que son paralelas a la recta  $AB$ .

Finalmente, una vez que todos los axiomas se satisfacen, podemos garantizar que la geometría de Lobachevski es consistente, ya que si no lo fuera no lo sería la geometría euclidiana que conocemos. La consistencia de esta última está enraizada con la de los números reales, lo que evidencia que algunas teorías están encadenadas, y su consistencia es dependiente. A propósito de esto, Trudeau (1987) nos comparte un pasaje titulado “¿Podemos estar seguros de que la geometría euclidiana es consistente?” (p. 244). Luego de unas cuantas líneas y unos

buenos argumentos su respuesta es “no”, ya que no se tienen los argumentos suficientes para probar que esto es así, en definitiva, es una pregunta que permanece abierta.

## CONCLUSIÓN

Demostrar la consistencia de un sistema axiomático no es cuestión sencilla, ya que requiere un sólido andamiaje teórico que garantice que sus axiomas no lleven a contradicciones lógicas. Para lograrlo, es necesario encontrar un modelo que interprete sus elementos primitivos y satisfaga completamente su conjunto de axiomas. Así, los modelos son universos matemáticos que relativizan verdades; por ejemplo, el axioma de Lobachevski es verdadero en el modelo del semiplano superior, pero no lo es en la geometría euclidiana.

## REFERENCIAS

- Blanché, R. (1965). *La axiomática* (F. Osorio, trad.). México: Centro de Estudios Filosóficos Universidad Nacional Autónoma de México.
- Efímov, N. (1984). *Geometría superior* (J. Tolosa y Y. Murzín, trads.). Moscú: Mir.
- Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría* (F. Cebrián, trad.) [2.<sup>a</sup> ed.]. España: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- Millman, R. y Parker, G. (1981). *Geometry a metric approach with models*. New York, EUA: Springer-Verlag Inc.
- Moise, E. (1968). *Elementos de geometría superior* (S. Vargas, trad.). México D. F.: Compañía Editorial Continental S. A.
- Stillwell, J. (2022). *The story of proof: Logic and the history of mathematics*. New Jersey, EUA: Princeton University Press.
- Torres, C. (1999). *Los sistemas formales*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Trudeau, R. (1987). *The non-Euclidean revolution*. Boston, EUA: Birkhäuser Verlag AG.

# EL PLANO SURD: UNA ALTERNATIVA ALGEBRAICA PARA DEMOSTRAR LA IMPOSIBILIDAD DE CONSTRUCCIÓN DE LOS TRES PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS GRIEGAS

**José Guevara, Harol Rodríguez y Jhon Mina**

*Universidad Nacional, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Nacional*  
[joguevarar@unal.edu.co](mailto:joguevarar@unal.edu.co), [herodriguezd@upn.edu.co](mailto:herodriguezd@upn.edu.co), [jminimal@unal.edu.co](mailto:jminimal@unal.edu.co)

La historia de la geometría griega se vio marcada por tres problemas fundamentales asociados a la construcción euclidiana con regla y compás: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. En la literatura matemática estos problemas se mencionan reiteradamente; sin embargo, no es común encontrar una explicación patente de su irresolubilidad, ya que tal explicación requiere conceptos algebraicos como la solución de ecuaciones que muestren que es imposible resolver estos problemas utilizando las herramientas mencionadas. Aquí es donde el concepto de campo surd es relevante ya que permite encontrar mediante la resolución de ecuaciones por qué no son posibles dichas construcciones.

## EL CAMPO SURD

Diremos que  $x$  es un número surd, si  $x$  es el resultado ya sea de sumas, restas multiplicaciones, divisiones o extracción de raíces cuadradas de manera finita en las que solo intervienen los números 0 y 1 (Moise, 1968). Con esta idea en mente, podemos construir el campo surd  $S$ , para lo cual debemos construir los números (elementos del campo) de manera similar a como se construyen los números racionales. Primero, demostremos por inducción que todos los números naturales son números surd.

Sea  $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es surd}\}$ . Por la definición de  $A$ , se obtiene que  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Debemos probar que  $\mathbb{N} \subseteq A$ . Lo haremos en dos pasos:

- (i) Vemos que  $0 = 0 + 0$ , entonces  $0 \in A$ , por definición de surd.
- (ii) Sea  $n + 1 \in \mathbb{N}$ . Por hipótesis de inducción  $n \in A$ , entonces  $n + 1 \in A$ , por definición de surd. Por lo tanto, por el principio de inducción matemática  $A = \mathbb{N}$ , demostrando lo deseado.

Extendamos ahora la construcción a los números negativos. Para ello, nos apoyamos en que estructuralmente los números enteros con la operación suma son un grupo abeliano, ya que si  $t \in \mathbb{Z}^-$ , entonces  $t = -n$  con  $n \in \mathbb{N}$  (Luque et al., 2018). Por el hecho anterior, se infiere que  $\mathbb{Z}$  es un surd puesto que los números racionales se definen como parejas equivalentes de cocientes entre números enteros, y así tenemos de inmediato que los números racionales son un surd. Por lo tanto, como  $\mathbb{Q}$  tiene estructura de campo entonces tenemos ya instaurado el concepto de campo surd.

Aunque la construcción anterior no aporta nada novedoso, pone de relieve que a pesar de que los números reales son un campo isomorfo a los números racionales (Luque, Sánchez y Jiménez, 2018), existen números reales como  $e$  que no son surd. Por lo tanto, se tiene el siguiente hecho: existen infinitos números que no son surd. Enunciemos esto así: si  $a$  no es surd, entonces el número  $b = \left(\frac{p}{q}\right) a$  tampoco lo es, con  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Si razonamos por contradicción, el número  $a = \frac{bq}{p}$  es un surd por la construcción anterior, pero por hipótesis  $a$  no lo es. Sin embargo, a pesar de que los números reales son un campo isomorfo a los números racionales, el campo surd es también un campo ordenado como los números reales (Moise, 1968).

Hasta ahora el tratamiento ha sido algebraico, pero con este podemos hacer geometría si logramos construir un modelo que se comporte como las rectas y las circunferencias euclidianas (Millman y Parker, 1981).

## EL PLANO SURD

Como sabemos el plano cartesiano usual está generado por los puntos  $P = (a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , es decir, es  $\mathbb{R}^2$ . Pero como hay números reales que no son surd, entonces podemos definir el  $S$ -plano, o sea el plano surd, como sigue:

$S$ -plano =  $\{(a, b): (a, b) \in S^2 \cap \mathbb{R}^2\}$ , siendo  $S^2$  las parejas ordenadas de números surd.

Ahora bien, podemos definir el  $S$ -punto como el punto que pertenece a  $S$ -plano y además podemos definir las  $S$ -líneas y  $S$ -circunferencias de la siguiente manera:

$S$ -línea =  $\{(x, y) \in S - \text{plano}: Ax + By + C = 0, A, B, C \in S\}$

y  $S$ -circunferencia como:

$$S\text{-circunferencia} = \{(x, y) \in S - \text{plano} : x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, D, E, F \text{ son surds}\}.$$

Una vez definidas la  $S$ -línea y la  $S$ -circunferencia, de manera inmediata, se tiene, por sus definiciones, que las respectivas representaciones geométricas coinciden con las representaciones cartesianas usuales de la línea recta y la circunferencia en el plano cartesiano; no obstante, dichas gráficas no son continuas, pues no todos los números reales están allí, por lo tanto, es de esperarse que el plano surd sea un plano huequeado cuyos agujeros son los números reales que no son surd. A pesar de que el anterior hecho pareciera ser un obstáculo, tenemos que toda posible construcción con regla y compás en el plano cartesiano también es realizable en el plano surd.

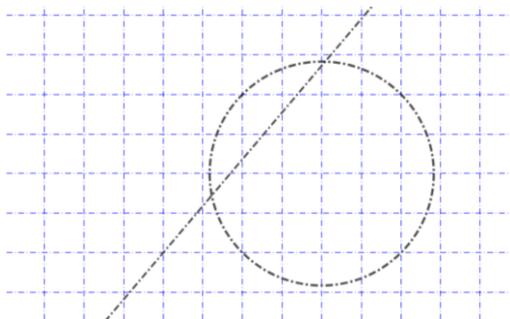


Figura 1: plano surd con una  $S$ -circunferencia y una  $S$ -línea

Como puede apreciarse en la figura 1, si tenemos una  $S$ -circunferencia y una  $S$ -línea que se encuentran en al menos un punto, su intersección es un  $S$ -punto. Esto se debe a que al resolver el par de ecuaciones determinadas por la  $S$ -circunferencia y la  $S$ -línea, los procedimientos siempre se realizan en  $\mathbb{Q}$  de manera finita con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, encontrando que si  $P$  es un punto solución de ellas,  $P$  es un  $S$ -punto.

Hasta este momento hemos concluido que  $\mathbb{Q}$  es un campo surd, pero esto no es suficiente para cubrir todos los puntos del plano, porque en el  $S$ -plano podemos encontrar el  $S$ -punto  $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , sin embargo  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ . Entonces, debemos necesariamente extender a  $\mathbb{Q}$  para que el plano surd contenga números como  $\sqrt{3}$ .

## Extensiones cuadráticas del campo surd

Aquí vamos a extender a  $\mathbb{Q}$  para que ecuaciones tales como  $x^2 = 3$  tengan raíces y sean puntos del plano surd. Una tentativa es extender  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$ , pero como

vimos anteriormente no todos los números reales son surd. Por definición, la extensión cuadrática de un subcampo  $F \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto de la forma:

$$F(k) = \{a + b\sqrt{k} : a, b \in F\}; \quad k \in F \text{ y } \sqrt{k} \notin F$$

Por eso podemos afirmar que  $\sqrt{3}$  está en una extensión cuadrática de  $\mathbb{Q}$  (a saber  $F(3)$ ), ya que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ . Además, la extensión cuadrática también posee la estructura de campo (Moise, 1968), pero con lo anterior también podemos ver que en el caso particular en que  $F = \mathbb{Q}$ , entonces  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(3)$ .

Procedamos a extender a  $\mathbb{Q}$ , así: consideremos  $F_0, F_1, \dots, F_n$  campos y definimos inductivamente a  $F_0$  como  $\mathbb{Q}$  y a  $F_{i+1}$  como  $F_i(k_{i+1})$ , en el que  $k_{i+1} \in F_i$  y  $\sqrt{k_{i+1}} \notin F_i$ . Debido a la forma inductiva anterior, se puede probar que  $F_n$  es un campo surd, y que su recíproco también lo es (Moise, 1968).

## IRRESOLUBILIDAD DE LOS DOS PROBLEMAS GRIEGOS

El tratamiento algebraico presentado permite entonces establecer el primer teorema que expone, informalmente, que si los resultados algebraicos son posibles, entonces el resultado geométrico es válido en el  $S$ -plano.

**Teorema 1:** Toda construcción con regla y compás que es posible en el plano cartesiano es posible en el  $S$ -plano.

Ya que los problemas de duplicación del cubo y la trisección del ángulo están relacionados con una ecuación de tercer grado, se tiene el siguiente teorema referente a dicha ecuación.

**Teorema 2:** Sea la ecuación  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  con  $a, b, c \in F$  siendo  $F$  un campo. Si la ecuación tiene una raíz en un campo de extensión cuadrática de  $F$ , entonces la ecuación tiene una raíz en  $F$ .

Para comenzar, utilizamos las relaciones de Cardano-Vieta, obteniendo  $p(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$ .

Por igualdad de polinomios, comparamos los coeficientes; es decir,  $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$ ,  $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ , y  $c = -x_1x_2x_3$ . Y, por hipótesis, la ecuación tiene una raíz en un campo de extensión cuadrática de  $F$ , entonces los coeficientes  $a, b, c$  deben estar también en un campo de extensión cuadrática de  $F$ , en particular  $a$ . Adicionalmente, si suponemos que  $x_1$  es dicha raíz, por el teorema de las raíces conjugadas  $x_2 = \bar{x}_1$  es una raíz. Así que  $a = -(x_1 + \bar{x}_1 +$

$x_3$ ), o sea,  $x_3 = (x_1 + \bar{x}_1) - a$ . Pero como  $x_1 + \bar{x}_1 \in F$ , luego  $x_3$  es la raíz que está en  $F$  como enuncia el teorema.

El teorema anterior muestra que si la solución está en campo extendido surd, entonces también debe estar en el campo surd. Tenemos como corolario el protagonista esperado:

**Corolario:** Sea la ecuación  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Si la ecuación tiene una raíz en el campo surd, entonces también tiene una raíz racional.

Enunciaremos por último el teorema de las raíces racionales que tiene como objeto mostrar el uso del contrarrecíproco del corolario.

**Teorema de las raíces racionales:** Sea  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  con  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  y  $a_0 \in \mathbb{Z}$ , con  $a_n \neq 0$ . Si  $x = \frac{p}{q}$  es raíz de la ecuación, entonces  $p$  divide a  $a_0$  y  $q$  divide a  $a_n$ .

## Imposibilidad de la trisección del ángulo

Campos (2006, p. 216) expresa el problema de la trisección del ángulo así: “¿Existe un método general para dividir un ángulo rectilíneo cualquiera en tres partes iguales, utilizando únicamente regla y compás?”.

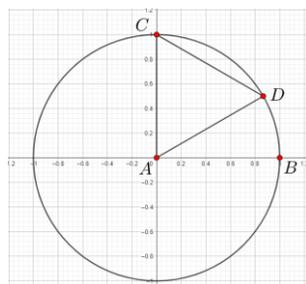


Figura 2: construcción de la trisección del ángulo recto

Basados en el teorema 1, si podemos trisecar un ángulo en el plano usual, entonces podremos hacerlo en el  $S$ -plano. Veamos que es posible trisecar un ángulo recto (véase figura 2). Para la trisección nos basamos en la construcción del triángulo equilátero (Euclides, 2015a). Aprovechemos que el plano cartesiano tiene un ángulo recto cuyo vértice está en el origen. Por el postulado 3 de *Elementos*, podemos construir la circunferencia de radio 1 y esta intersectará los ejes  $x$  y  $y$  en los puntos  $B = (1,0)$  y  $C = (0,1)$ , respectivamente. Por la proposición 1 del libro I de *Elementos*, existe el  $\triangle CAD$  equilátero (Euclides, 2015a), y, por tanto, equiángulo. Aprovechando que  $D$  está en el interior del

$\angle BAC, \angle DAB$  es el ángulo de  $30^\circ$ , con lo que se logra trisecar el ángulo recto, ya que  $30^\circ = \frac{90^\circ}{3}$ .

Vemos que el triángulo equilátero  $CAD$  también está en el  $S$ -plano, ya que el punto  $D = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  está en dicho plano y debe ser solución de la  $S$ -circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , por lo tanto,  $\angle DAC$  que mide  $60^\circ$  debe ser un número surd. Es decir,  $\angle DAC$  está en el plano surd; y si repitiéramos este proceso podríamos trisecar el ángulo de  $60^\circ$ , obteniendo el ángulo de  $20^\circ$  cuyo número también debería existir en el  $S$ -plano. Veamos que esto es imposible.

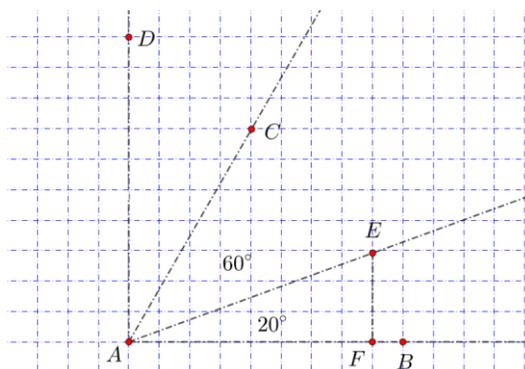


Figura 3: plano surd con el supuesto ángulo de  $20^\circ$

Apoyándonos en la figura 3, podemos encontrar la  $S$ -recta que es perpendicular a  $EF$ , por lo tanto  $F$  es un  $S$ -punto. Por trigonometría y definición de surd, tenemos que  $\cos 20^\circ = \frac{AF}{AE}$  debe ser un número surd. Además, aprovechando que  $\cos 60^\circ$  es un número surd, si usamos la identidad  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$  con  $\alpha = 20^\circ$ , obtenemos que  $\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$ . Así mismo, sustituyendo  $x = \cos 20^\circ$ , llegamos a que  $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$ , o sea,  $8x^3 - 6x - 1 = 0$ .

Ahora, si  $x$  es solución racional de  $8x^3 - 6x - 1 = 0$ , entonces  $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 1, \pm \frac{1}{8}$ , pero ninguna de ellas es solución, entonces  $x$  no es racional y, por lo tanto, no es surd por el contrarrecíproco del corolario. Así que no es resoluble la trisección de cualquier ángulo. Consecuentemente, mostremos que el trabajo algebraico anterior tiene la potencia para resolver los otros dos problemas.

## Imposibilidad de la duplicación del cubo

El enunciado del problema de la duplicación del cubo es el siguiente: “Dado un cubo de volumen 1, encontrar, mediante regla y compás exclusivamente, un cubo de volumen 2” (Campos, 2006, p. 205).

A primera vista, este problema parece resoluble, ya que Euclides (2015b) tiene la proposición 27 del libro XI: *Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado* (p. 317), y como el cubo de volumen 1 puede construirse, pues resulta natural considerar el de volumen 2. Veamos que en el plano surd no es posible este hecho.

Primero, elijamos un número surd  $x$ , luego construyamos en el  $S$ -plano, con regla y compas, un segmento  $AB$  cuya medida sea  $x$ . Ahora, suponiendo que el segmento  $CD$  está en el  $S$ -plano con la condición de que  $CD^3 = 2AB^3$ , entonces  $\left(\frac{CD}{AB}\right)^3 = 2$  y como por hipótesis  $CD$  y  $AB$  están en el  $S$ -plano, por definición de surd,  $\left(\frac{CD}{AB}\right)^3$  debe ser un surd. Sustituyamos  $y$  por  $\frac{CD}{AB}$ , con lo cual tenemos la ecuación  $y^3 = 2$ , así, de nuevo si la ecuación fuese resoluble, entonces debería existir un número surd tal que  $y^3 - 2 = 0$ . Pero los únicos divisores de 2 son  $\pm 2, \pm 1$ , y ninguno de esos números racionales satisface la ecuación  $y^3 = 2$ ; por lo tanto, no es posible construirlo en el plano surd, mucho menos en el plano cartesiano por el teorema 1, ya que resulta ser un número irracional que no está en el  $S$ -plano.

## Imposibilidad de la cuadratura del círculo

Primeramente, usemos como lema que  $\pi^2$  es irracional (Spivak, 2014, p. 326) para establecer el siguiente teorema:

**Teorema 3:**  $\pi$  es irracional.

Al suponer que  $\pi$  es racional como la multiplicación en  $\mathbb{Q}$  es cerrada, se cumpliría entonces que  $\pi^2 = \pi \cdot \pi$  es racional lo que contradice el lema.

Finalmente, consideremos la ecuación  $x^2 = \pi$ . Como  $x^2 - \pi = 0$ , deberían existir en  $\mathbb{Q}$  números  $a, b$  que sean raíces de la ecuación. Sin embargo, esto

implicaría que  $x^2 - \pi = 0$  es soluble en  $\mathbb{Q}$ , lo que es imposible porque entonces sería  $\pi$  racional, lo que lleva a una contradicción. Así, no es posible construir  $\sqrt{\pi}$  en el  $S$ -plano. Así probamos que la cuadratura del círculo es imposible.

## CONCLUSIONES

- El plano surd tiene una relación directa con el plano euclidiano que nos posibilita probar a partir de su teorización la imposibilidad de los problemas clásicos de las matemáticas griegas.
- Este enfoque revela una relación directa entre la geometría y el álgebra, mostrando que lo que puede parecer cuestionable desde la perspectiva geométrica se soluciona de manera tajante desde una perspectiva algebraica.

## REFERENCIAS

- Campos, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática* (vols. 1-2). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Euclides (2015a). *Elementos I* (L. Vega, ed.; M. L. Puertas Castaños, trad.; vols. 1-2). RBA Coleccionables S.A.
- Euclides (2015b). *Elementos II* (L. Vega, ed.; M. L. Puertas Castaños, trad.; vols. 2-2). RBA Coleccionables S.A.
- Luque, C., Sánchez, Y. y Jiménez, H. (2018). *De los grupos abelianos al álgebra lineal abstracta*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional y Editorial Magisterio.
- Millman, R. y Parker, G. (1981). *Geometry: A metric approach with models*. New York, EUA: Springer-Verlag Inc.
- Moise, E. (1968). *Elementos de geometría superior* (S. Vargas, trad.). México: Compañía Editorial Continental S.A.
- Spivak, M. (2014). *Calculus* (4.<sup>a</sup> ed.). Barcelona, España: Reverté.

# TEOREMA DE DESARGUES: UN ANÁLISIS HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO A TRAVÉS DE SUS DEMOSTRACIONES

**Héctor Herrera**

*Universidad Industrial de Santander*

[hector2248068@correo.uis.edu.co](mailto:hector2248068@correo.uis.edu.co)

En este documento se presentan avances de un artículo de investigación sobre el teorema de Desargues, a partir de tres demostraciones del teorema: la demostración original planteada por el propio Desargues en el siglo XVII, una versión actual desde la geometría euclidiana y otra desde la geometría proyectiva a través del uso de las coordenadas homogéneas introducidas por Möbius.

## INTRODUCCIÓN

El teorema de Desargues fue propuesto en el siglo XVII por el matemático francés Girard Desargues, precursor de la geometría proyectiva; establece que *si dos triángulos están en perspectiva central respecto a un punto  $O$ , entonces, también están en perspectiva central respecto a una recta  $k$* . La versión original de Desargues no muestra explícitamente los triángulos sino puntos dispuestos en el plano que implícitamente constituyen los vértices de dos triángulos en perspectiva. La versión euclidiana actual reconoce dichos triángulos y toma elementos de la demostración de Desargues como lo es el uso del teorema de Menelao. Finalmente, la demostración desde la geometría proyectiva involucra el uso de las coordenadas homogéneas (introducidas por Möbius en el siglo XIX) asignadas a cada uno de los vértices del triángulo. En el artículo de investigación, aparte de presentar las tres demostraciones mencionadas anteriormente se espera dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación (entre otras) relacionadas con la epistemología que gira en torno al teorema de Desargues:

- ¿Qué elementos comunes se identifican en las tres demostraciones planteadas?
- ¿Qué herramientas y resultados matemáticos se utilizan en una u otra demostración? ¿Por qué hay cambios?
- ¿Por qué los matemáticos de épocas distintas se interesaron por estudiar el teorema de Desargues?

Herrera, H. (2024). Teorema de Desargues: un análisis histórico y epistemológico a través de sus demostraciones. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 171-178. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- ¿Por qué buscar una demostración en la geometría proyectiva si ya se tiene la demostración de la geometría euclidiana?
- ¿Las demostraciones dadas explican el resultado que se quiere probar o justifican el resultado a partir de manipulaciones algebraicas olvidando el sentido geométrico del mismo?
- ¿Se puede dar una demostración del teorema desde la geometría euclidiana sin utilizar el teorema de Menelao?
- ¿Se puede dar una demostración del teorema desde la geometría proyectiva sin utilizar coordenadas homogéneas?

Las preguntas anteriores contribuyen a estudiar la epistemología del teorema de Desargues tanto desde un punto de vista matemático como desde el punto de vista de la educación matemática.

## MARCO TEÓRICO

El marco teórico de este trabajo incluye las tres demostraciones del teorema de Desargues, algunos hechos históricos en torno al mismo y la posición de algunos autores en libros y artículos de referencia para el análisis epistemológico que se va a realizar.

### Versión original del teorema de Desargues

La versión original del teorema de Desargues establece que cuando las rectas  $HDa, HEb, cED, lga, lfb, Hlk, DgK, EfK, cab$ , que están en el mismo plano o en diferentes planos, se cortan entre sí en cualquier orden y en cualquier ángulo formado por dichos puntos, entonces los puntos  $c, f, g$  están en la misma línea recta  $cfg$  (Lienert, 2018) como se muestra en la figura 1:

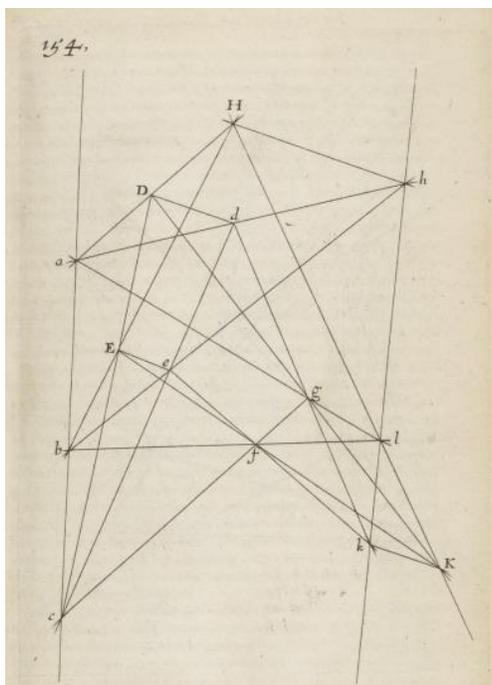


Figura 1: construcción original del Teorema de Desargues

La demostración original de Desargues para puntos ubicados en planos distintos es como sigue:

Porque, cualquiera que sea la forma que tome la figura, en todos los casos, si las líneas rectas pertenecen a planos diferentes, las líneas  $abc$ ,  $lga$ ,  $lfb$  pertenecen a un plano; las líneas  $DEc$ ,  $DgK$ ,  $KfE$  pertenecen a otro plano y los puntos  $c$ ,  $f$ ,  $g$  pertenecen a cada uno de estos dos planos, en consecuencia, están en la línea recta  $cfg$ .

En el artículo se expondrá la prueba dada por Desargues para el caso en que los puntos están en el mismo plano (Lienert, 2018).

### Versión euclidiana actual del teorema de Desargues

La versión actual del teorema de Desargues es muy similar a la original, salvo por algunas cuestiones de lenguaje y notación. En la figura original de Desargues se pueden identificar los siguientes triángulos (véase figura 2) que se utilizarán para la demostración actual.

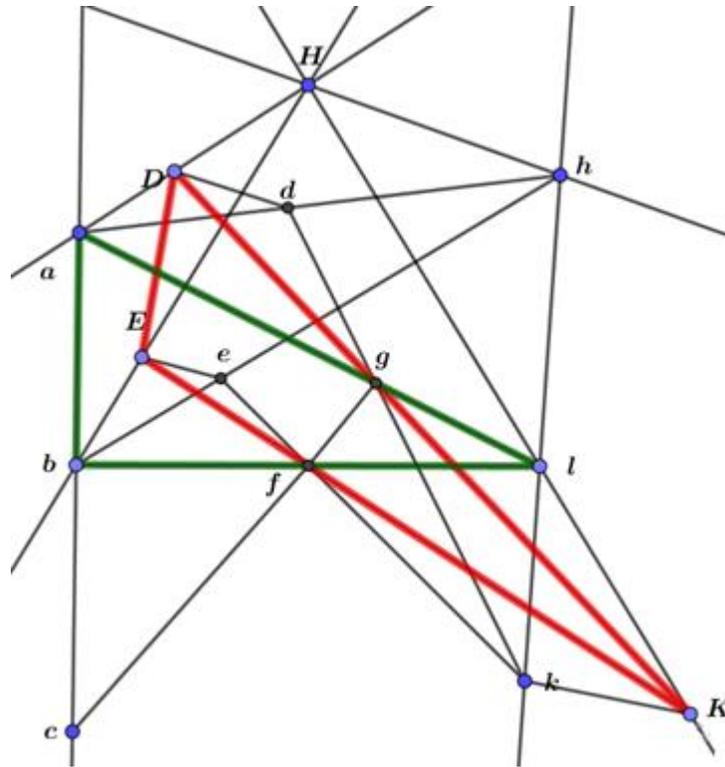


Figura 2: triángulos en perspectiva, en la construcción original de Desargues

A continuación, se enuncian algunas definiciones y teoremas previos necesarios para la demostración del teorema.

### Triángulos en perspectiva central respecto a un punto

Sean  $A, B, C$  y  $A', B', C'$  los vértices de  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  respectivamente y sean  $l_1, l_2$  y  $l_3$  las rectas que unen los pares de vértices  $AA', BB', CC'$  respectivamente como se muestra en la figura 3, entonces  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  están en perspectiva respecto al punto  $O$  si las rectas  $l_1, l_2$  y  $l_3$  son concurrentes en  $O$ . Dicho punto es llamado centro de perspectiva.

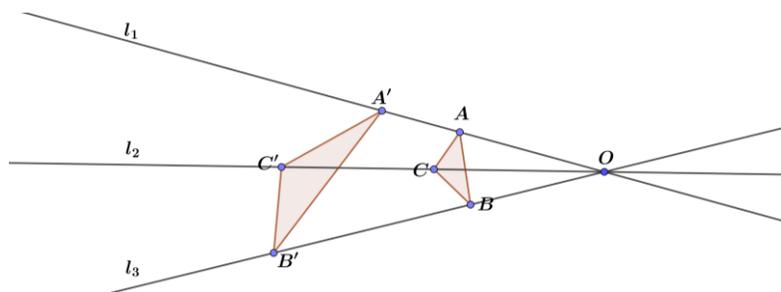


Figura 3: triángulos en perspectiva respecto a un punto  $O$

## Triángulos en perspectiva central respecto a una recta

Sean  $A, B, C$  y  $A', B', C'$  los vértices de  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  respectivamente y sean  $M_2, M_1$  y  $M_3$  los puntos donde se intersecan las rectas  $AB, A'B'$ ;  $BC, B'C'$ ; y  $CA, C'A'$  respectivamente como se muestra en la figura 4, entonces  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  están en perspectiva respecto a la recta  $k$  si los puntos  $M_1, M_2$  y  $M_3$  son colineales y pertenecen a la recta  $k$ . Dicha recta es llamada recta o eje de perspectiva.

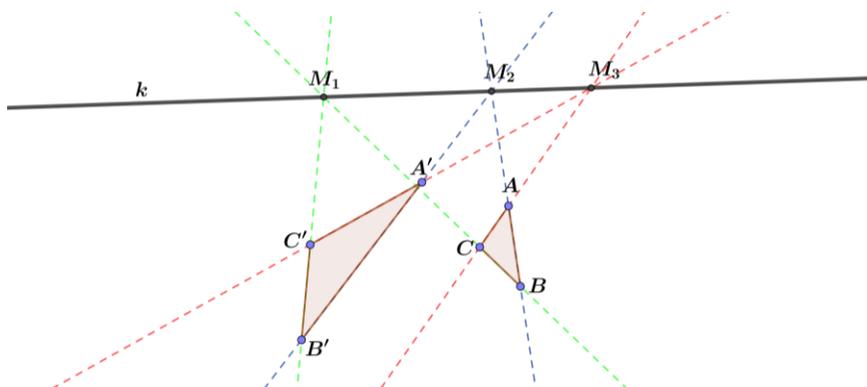


Figura 4: triángulos en perspectiva respecto a una recta  $k$

## Teorema de Menelao

Sean  $A, B, C$  los vértices del  $\triangle ABC$  y  $X, Y, Z$  puntos en los lados (o prolongaciones de los lados)  $BC, CA$  y  $AB$  como se muestra en la figura 5, entonces los puntos  $X, Y, Z$  son colineales si y solo si se cumple la relación

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

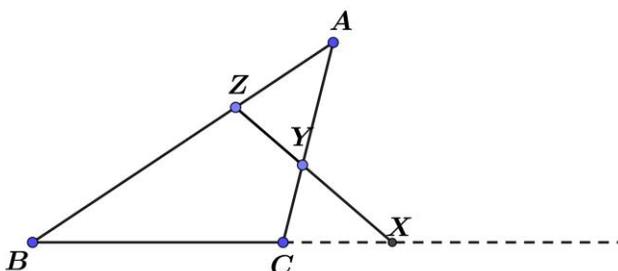


Figura 5: teorema de Menelao

## Teorema de Desargues

Si  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  están en perspectiva respecto al punto  $O$ , entonces están en perspectiva respecto a la recta  $k$  (véase figura 6).

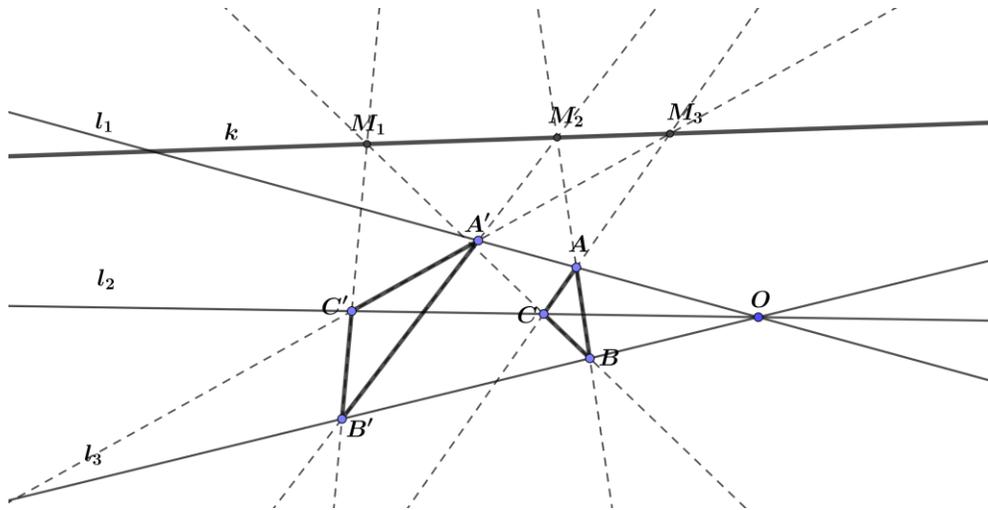


Figura 6: teorema de Desargues desde la geometría euclidiana

En el artículo se expondrá la prueba detallada de este teorema con las definiciones enunciadas anteriormente y el teorema de Menelao.

## Versión proyectiva del teorema de Desargues

Los triángulos que se consideran en esta versión están en el espacio proyectivo, por tanto, se enuncian primero algunas definiciones y resultados de la geometría proyectiva (Aroca y Bermejo, 2019).

### Espacio proyectivo

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo  $K$  y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $V - \{0\}$  definida así:

$$u \sim v \leftrightarrow \exists \lambda \in K - \{0\}: u = \lambda v.$$

Se define el espacio proyectivo asociado a  $V$  como el espacio cociente  $P(V) = (V - \{0\})/\sim$ .

### Aplicación canónica

Se llama aplicación canónica de  $V - \{0\}$  sobre  $P(V)$  a la función definida así:

$$\begin{aligned} \pi: V - \{0\} &\rightarrow P(V) \\ v &\rightarrow \pi(v) := [v]. \end{aligned}$$

Es decir, a cada  $v \in V - \{0\}$  se asocia la clase de equivalencia  $[v]$  de  $v$  en  $P(V)$ .

A partir de los espacios proyectivos y la aplicación canónica, se definen los puntos proyectivamente independientes, las referencias proyectivas y las coordenadas homogéneas para enunciar y demostrar el teorema de Desargues desde la geometría proyectiva.

### Teorema de Desargues

Sea  $P(V)$  un plano proyectivo y  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, O$  puntos de  $P(V)$  en posición canónica. Consideremos los triángulos  $T_1$  y  $T_2$  de  $P(V)$  con vértices  $A_1, A_2, A_3$  y  $B_1, B_2, B_3$  respectivamente. Si  $T_1$  y  $T_2$  están en perspectiva central respecto al punto  $O$ , entonces los puntos  $P_1 = L(A_2, A_3) \cap L(B_2, B_3)$ ,  $P_2 = L(A_3, A_1) \cap L(B_3, B_1)$ ,  $P_3 = L(A_1, A_2) \cap L(B_1, B_2)$  son colineales (véase figura 7).

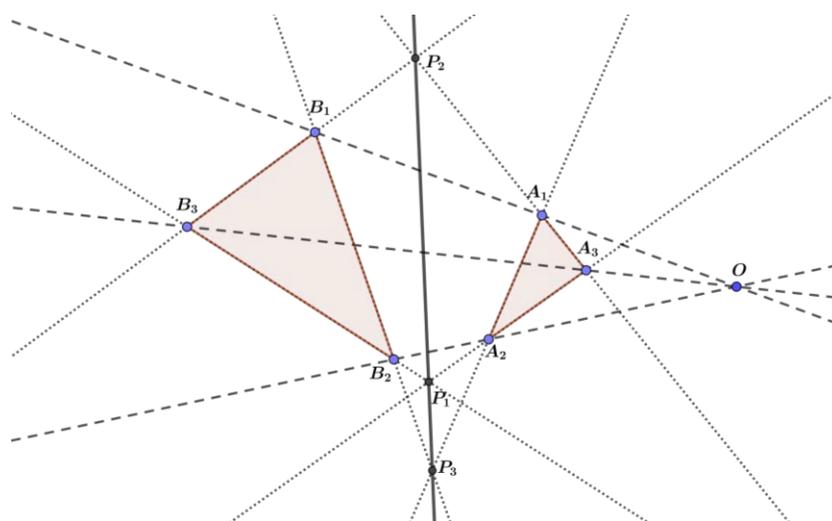


Figura 7: teorema de Desargues desde la geometría proyectiva

En el artículo se expondrá la prueba detallada de este teorema con las definiciones enunciadas anteriormente y las coordenadas homogéneas (Fortuna, Frigerio y Pardini, 2016).

### METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este trabajo se ha realizado primero una investigación exhaustiva relacionada con las tres demostraciones presentadas anteriormente y con artículos relacionados con este tema. En el análisis epistemológico del teorema, se están revisando algunos artículos como Lange (2015), donde

- se define qué es epistemología de las matemáticas y qué preguntas responde,

- se define qué es epistemología de la educación matemática y qué preguntas responde y
- se analizan algunas de las preguntas planteadas en la introducción de este documento.

## AVANCES DEL ESTUDIO

Las demostraciones del teorema están desarrolladas completa y detalladamente. En este momento estoy en el proceso de lectura y reflexión epistemológica.

## REFERENCIAS

Aroca, J. M. y Bermejo, M. F. (2019). *Geometría proyectiva*.

Disponible en: <https://es.scribd.com/document/104939582/Geometria-Proyectiva>

Fortuna, E., Frigerio, R. y Pardini, R. (2016). *Projective geometry* (vol. 104). Cham: Springer.

Lange, M. (2015). Explanation, existence and natural properties in mathematics—A case study: Desargues' theorem. *Dialectica*, 69(4), 435-472.

Lienert, C. (2018). Dual perspectives on Desargues' theorem (material del curso). *Geometry 3*.

Disponible en: [https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs\\_geometry/3](https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs_geometry/3)

# TIPO DE CONTENIDO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE OFRECIDO EN PREGRADO VS. EL DEMANDADO EN INVESTIGACIÓN, EL CASO GEOMÉTRICO

**Martha Jiménez y Weimar Muñoz**

*Universidad de La Salle*

[tjimenez@unisalle.edu.co](mailto:tjimenez@unisalle.edu.co), [wmunoz@unisalle.edu.co](mailto:wmunoz@unisalle.edu.co)

Este escrito se centra en evidenciar que las aplicaciones de regresión lineal simple en diferentes investigaciones de una universidad colombiana no concuerdan con los niveles de contenido enseñados en esa institución, y que adicionalmente el aspecto geométrico es relegado en ambos campos. La metodología empleada utilizó herramientas de la bibliometría con el *software* R y la clasificación del conocimiento del contenido según los niveles común, especializado y avanzado. En este avance investigativo se busca establecer a nivel micro curricular, qué elementos podrían considerarse para realizar una forma alternativa de enseñanza de la regresión lineal simple apoyada en la geometría.

## PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Existen problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la regresión lineal simple (RLS). En efecto, se cuenta con investigaciones que resaltan fallencias en su comprensión debido a: obstáculos didácticos con objetos matemáticos de base como la función lineal (Moreno, 2012); el manejo de la notación matemática que se necesita como en la fórmula  $\sum_{i=0}^n \frac{x_i}{n}$  (Batanero, Godino, Vallecillos, Green y Holmes, 1994); o que es un tema de enseñanza recargado de fórmulas matemáticas que resultan complejas para los alumnos (Osorio, 2013). Además, existen indicios de los inconvenientes que tienen los estudiantes para relacionar la noción de asociación estadística (que se usa para referir a algún tipo de dependencia entre variables aleatorias) y, algunos objetos matemáticos básicos, *e. g.*, la regresión lineal (Batanero *et al.*, 1994). Desde los problemas en enseñanza, sobresale una investigación donde evidencian que el alumno confunde regresión lineal con función lineal, debido al mal uso del recurso didáctico de comparación de estos dos objetos por parte de los profesores (Villarraga, 2016).

Jiménez, M. y Muñoz, W. (2024). Tipo de contenido de regresión lineal simple ofrecido en pregrado vs. el demandado en investigación, el caso geométrico. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 179-186. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

También existen trabajos sobre los inconvenientes en la utilización de la recta de mínimos cuadrados para predecir un valor, sin haber validado las hipótesis del modelo (Núñez, Bonadies y Ponteville, 2020). Aunado a lo anterior, es conocido el inconveniente relativo a la escasa literatura que se enfoca en la educación estadística (Pallauta, Gea, Batanero y Arteaga, 2021).

Esta investigación se centra en mostrar las necesidades de articulación entre investigaciones de estudiantes de pregrado y los contenidos programáticos que ofrecen las universidades, para optimizar el aprendizaje de la RLS.

## MARCO TEÓRICO

La regresión lineal es un objeto matemático necesario en la formación de todo profesional que requiera de la estadística en sus investigaciones. Por eso no es de extrañar que en los últimos años haya crecido el número de artículos e investigaciones para mejorar sus procesos de enseñanza y aprendizaje (Batanero, 2000).

Por citar solo algunos, se disponen de las siguientes investigaciones: un trabajo enmarcado en el ABP (aprendizaje basado en problemas) en estudiantes universitarios en Perú, sobre un caso de lactancia materna, modelado con regresión lineal (Osorio, 2013); utilizando la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas), se desarrolló en Chile un estudio sobre la comprensión y las posibles diferencias del concepto aleatorio y determinista, a través de construcciones y mecanismos mentales, en torno a la variable aleatoria a partir de la regresión lineal (Pérez y Parraguez, 2013); siguiendo el modelo constructivista, se dispone de una tesis de maestría que desarrolla mediante preguntas, y paso a paso, un modelo de regresión lineal simple para conocer la estatura de una persona dado que se sabe la medida de extensión de sus brazos (Moreno, 2012). Finalmente, siguiendo el enfoque ontosemiótico (EOS), desde España se propone que se realicen investigaciones de corte didáctico en temas estadísticos, dada la creciente necesidad de capacitar en estadística a población que no necesariamente es afín con los temas numéricos (Batanero, 2000).

En cuanto a la utilización de recursos digitales educativos, se cuenta con material didáctico apoyado en SPSS de un fenómeno sobre el consumo de cerveza (Marín, s. f.) y la propuesta de una unidad didáctica para la RLS ambientada en el *software* R (Villarraga, 2016).

En Francia, la *Société Française de Statistique* ha trabajado a partir de la implementación de recursos digitales educativos para el análisis de datos en las aulas de clase, también ha apostado por la posible mediación de la historia de la emergencia de objetos matemáticos desde los escritos de Jacques Bernoulli, Blaise Pascal, Abraham de Moivre y Pierre-Simon de Laplace (Armatte, 2010). Se cuenta con la indagación de un problema que es similar a lo que sucede en el caso colombiano: no hay suficientes estadísticos ni profesores de estadística que quieran enseñar sobre su profesión (Gattuso, 2011).

En el Reino Unido, la educación en estadística pasa por un asunto de prioridad nacional, y agencias como la *Schools Council Project on Statistical Education*, proponen que en todo currículo donde se imparta estadística, los alumnos aprendan ciertas competencias básicas. De ellas, se resalta la de preguntar y responder cuestiones sobre la suma y la comparación de datos categóricos (*Government of United Kingdom*, 2017). Claramente, la técnica matemática de la RLS entraría ahí en juego en los conocimientos básicos de estadística, no solo en el Reino Unido, sino también en Colombia.

## METODOLOGÍA

Para esta investigación se emplearon dos metodologías: la búsqueda bibliográfica para evidenciar el abuso de la RLS, y la metodología de la clasificación del conocimiento del contenido de Ball, Thames y Phelps (2008), sobre la RLS.

**Búsqueda bibliográfica sobre el abuso de la RLS.** En Colombia, se evidencia el abuso de la RLS, por ejemplo, en trabajos de grado aprobados en algunas universidades privadas<sup>1</sup>. La figura 1, muestra tan solo uno de los errores encontrados debido a una mala interpretación de la RLS. En esta figura se observa la presentación de un  $R^2$  negativo, indicando la falta de comprensión de la distinción entre un  $R^2$  y un  $R^2$  *ajustado*.

**Clasificación del conocimiento del contenido.** La comprensión del contenido es importante para la enseñanza (Ball *et al.*, 2008), mucho más la de una herramienta ampliamente utilizada en ciencia y tecnología (Batanero, Gea, Arteaga, Contreras y Díaz, 2018). Luego, se hace necesario realizar una clasificación dependiendo del nivel de complejidad o profundidad que se requiera para enseñar los currículos de estadística y que tenga en cuenta las necesidades de los

---

<sup>1</sup> Se mantiene la reserva de las universidades indagadas.

estudiantes. En el caso de la técnica de RLS se identifican tres niveles de dominio, considerando la clasificación de Ball y sus colaboradores (Ball *et al.*, 2008) y adaptándolas a esta investigación. Se necesitan el *conocimiento común del contenido*, el *conocimiento matemático avanzado* y el *conocimiento especializado del contenido*.

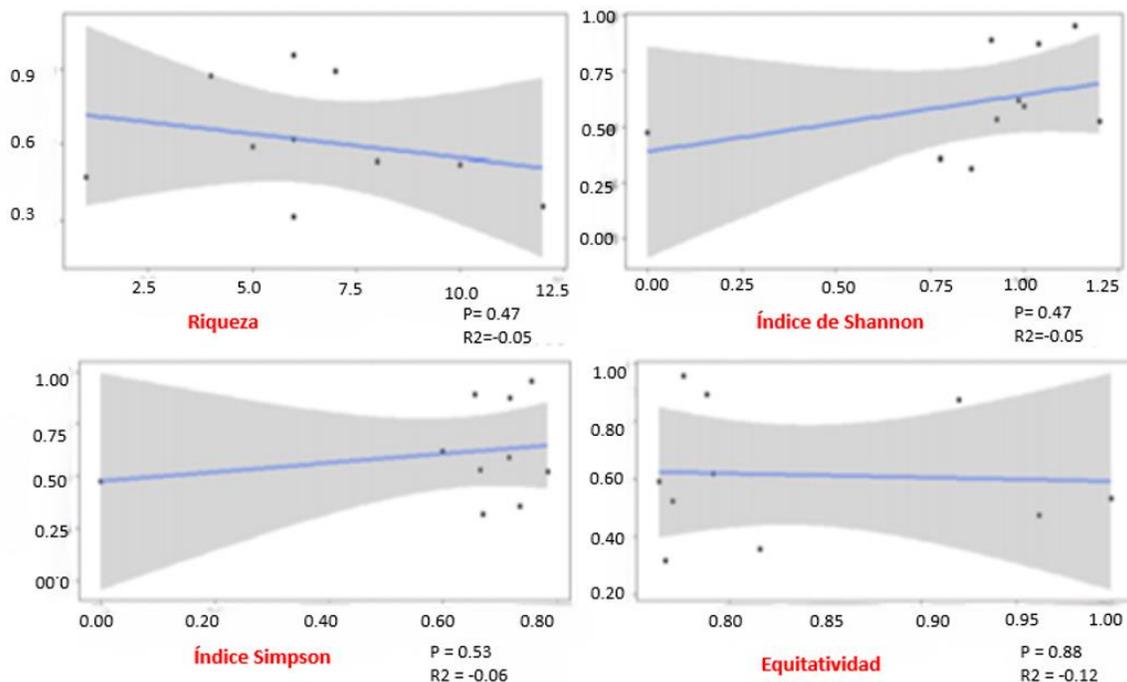


Figura 1: diagrama que muestra un error (en un trabajo de grado aprobado) por una mala interpretación de la RLS

## AVANCES DEL PROYECTO

Uno de los avances obtenidos es la clasificación de las asignaturas de la universidad colombiana seleccionada, según la propuesta de Ball, como lo evidencia la tabla 1.

Se realizó una encuesta de percepción a los estudiantes sobre la importancia y relevancia del aprendizaje de la RLS. La encuesta fue enviada a los estudiantes de la universidad privada seleccionada para este estudio. La alta participación de estudiantes de Métodos Estadísticos (carreras afines a la economía) permite recolectar información para proyectar el cómo iniciar a los estudiantes en la técnica, ya que serán ellos quienes tomarán las asignaturas de econometría, donde la RLS es fundamental.

En la figura 2 se muestra que, en cuanto al desarrollo de competencias necesarias para abordar temas en estadística, en particular, los que se consideran complejos, los estudiantes manifiestan sentirse en los niveles intermedio y avanzado. Esto es indicador de que un tema como la RLS podría ser comprendido desde su conceptualización matemática, en particular, la geométrica.

Asignaturas relacionadas con estadística, que cursan los estudiantes de cada programa	Clasificación del conocimiento del contenido de Ball <i>et al.</i> (2008)
Métodos estadísticos	Conocimiento común
Diseño de experimentos en procesos de investigación (NRI)	Conocimiento especializado (NRI)
Estadística (Ingeniería Industrial)	Conocimiento avanzado

Tabla 1: asociación de las asignaturas de estadística y de la clasificación de Ball *et al.* (2008)

El nivel de importancia que los estudiantes manifiestan requerir en el dominio conceptual, comprensión lógica, desarrollo paso a paso manual, interpretación de resultados, manejo de recursos tecnológicos y habilidad en el uso de la técnica de RLS, se encuentra entre importante y muy importante. Lo cual nos indica que para el aprendizaje de la técnica de RLS, los estudiantes están dispuestos a abordar todos los elementos que dan soporte y facilitan la comprensión del procedimiento.

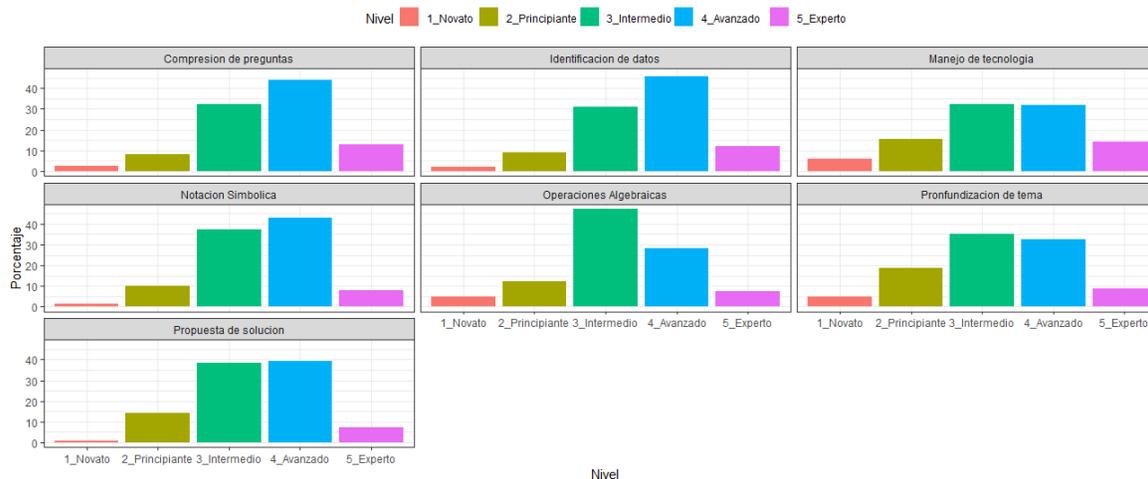


Figura 2: gráfica sobre el nivel de desarrollo de la competencia sobre la RLS

¿Qué pasa con el caso geométrico? Si esta población estudiantil siente que la RLS es tan importante, como puede verse en la figura 3. ¿por qué no contar con más recursos para su enseñanza? Es en este escenario donde entra en juego la geometría. Los autores de este escrito concuerdan con afirmaciones como que la geometría “permite representar de forma gráfica el problema que resuelve la regresión y expresar de forma sencilla las herramientas necesarias para su mejor comprensión” (Borrego, 2021, p. 1). Esta idea está en consonancia con uno de los objetivos del 26.º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones: fomentar el estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas. En este caso puntual, con el objeto matemático de la RLS propio de las asignaturas de estadística visto con los lentes de la geometría.

El siguiente paso en esta investigación es realizar una presentación paralela a la usual sobre la RLS, pero ajustada a las necesidades de la universidad privada seleccionada para este estudio.



Figura 3: gráfico que muestra el nivel de importancia que sugiere la RLS para los estudiantes de la universidad privada elegida para el estudio

Dicha forma de enseñar la RLS podría basarse en los siguientes pasos:

- Estudiar cuál es el mayor orden polinomial que se puede ajustar a partir de los datos seleccionados.
- Crear el espacio modelo y el espacio de errores. empleando para ello el vector de la variable independiente, de forma que se consiga una base

ortonormal del espacio modelo que se extenderá a una base ortonormal de dimensión  $n$  (podrían notarse  $U_1, \dots, U_n$ ).

- Hay que ajustar luego el modelo ortogonal mediante las proyecciones del vector dependiente sobre el espacio de dimensión  $n$ . Se podría utilizar la descomposición de Pitágoras para calcular la suma de cuadrados de las proyecciones,

$$\|y - \bar{y}\|^2 = \|P_{U_1 y}\|^2 + \dots + \|P_{U_n y}\|^2$$

- Posteriormente, por medio de los cuantiles (o puntos) críticos se estudiarían las componentes significativas.
- Y, por último, el modelo adecuado se ajustaría y se mostrarían los resultados que este nos proporciona (Borrego, 2021).

Esta forma alternativa para aumentar el insumo de métodos de enseñanza de la RLS apoyada en conceptos geométricos, busca resolver uno de los problemas evidenciados tanto empíricamente en el aula de clase, como en la literatura seleccionada: el inconveniente de los estudiantes al seleccionar la familia de funciones de las cuales se seleccionará la curva de regresión (lineal, exponencial, etc.) podría encontrar su solución en el conocimiento previo sobre el fenómeno.

## REFERENCIAS

- Armatte, M. (2010). Le rôle de l'histoire dans l'enseignement de la statistique. *Recherches et perspectives*, 1(2), 23-47.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2-13.
- Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2018). Conocimiento del contenido sobre correlación y regresión de futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 21(3), 325-348.
- Batanero, C., Godino, J., Vallecillos, A., Green, D. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Borrego, A. (2021) *Enfoque geométrico en regresión*. Trabajo de grado, Universidad de Sevilla, Sevilla, España.
- Gattuso, L. (2011). L'enseignement de la statistique: où, quand, comment, pourquoi pas? *Statistique et enseignement*, 2, 5-30.

- Government of United Kingdom (2017). *Collection Schools: statutory guidance*. Disponible en: <https://www.gov.uk/government/collections/statutory-guidance-schools>
- Marín, J. M. (s. f.). Análisis de regresión lineal. El procedimiento regresión lineal. En *Guía para el análisis de datos*. Disponible en: <https://halweb.uc3m.es/esp/personal/personas/jmmarin/esp/guiaspss/18reglin.pdf>
- Moreno, R. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la estadística en los modelos de regresión lineal simple bajo un enfoque constructivista*. Monografía, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. Recuperado de: <http://bdigital.unal.edu.co/5843/1/32561357.2012.pdf>
- Núñez, M., Bonadies, M. E. y Ponteville, C. (2020). Análisis de las prácticas asociadas a los conceptos del modelo de regresión lineal simple. En *XLVIII Coloquio argentino de estadística*. Buenos Aires, Argentina: Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires. Recuperado de: <https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/16911>
- Osorio, A. (2013). El uso de metodologías activas para la enseñanza de la regresión lineal. En *vii CIBEM* (pp. 2057-2062). Montevideo, Uruguay: Sociedad de Educación Matemática Uruguay. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/19216/>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2021). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(71), 1803-1824. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a26>
- Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (ed.), *Propuestas para la enseñanza de las matemáticas* (pp. 589-598). Disponible en: <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/construcciones-mentales-de-los-conceptos-aleatorio-y-determinista-a-partir-de-la-regresion-lineal/>
- Villarraga, J. (2016). *La enseñanza de la regresión lineal simple usando como mediador una herramienta computacional*. Tesis de maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

# MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS SERIES GEOMÉTRICAS

**Angie Linares, Lina Pinzón y Lyda Mora**

*Universidad Pedagógica Nacional*

[allinaresl@upn.edu.co](mailto:allinaresl@upn.edu.co), [lpinzona@upn.edu.co](mailto:lpinzona@upn.edu.co), [lmendieta@pedagogica.edu.co](mailto:lmendieta@pedagogica.edu.co)

La experiencia significativa de la que reporta este artículo, fruto del trabajo de grado para optar al título de licenciadas en matemáticas, tuvo como objetivo el diseño de un material didáctico manipulativo con el propósito de favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas mediante un componente visual geométrico para estudiantes de secundaria y media. Para ello, se elaboró una primera versión del material que fue implementada con estudiantes de una institución educativa oficial del Distrito Capital, con el fin de valorar su pertinencia y eficacia; también, se diseñaron tareas para el uso del material, cuyo fin es encaminar a los estudiantes a descubrir los elementos que componen las series geométricas.

## INTRODUCCIÓN

Se presenta el proceso de formación investigativa experimentado para el diseño de un material didáctico manipulativo, acompañado de tareas, cuyo propósito es contribuir a la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas. El diseño del material requirió, inicialmente, un estudio detallado del objeto matemático en cuestión, de algunos elementos de tipo didáctico y curricular. A partir de lo anterior, se elaboró una versión preliminar del material didáctico y de un conjunto de tareas para su uso, lo cual se implementó con estudiantes de grado décimo de un colegio oficial bogotano; con este piloto se identificaron ventajas y desventajas de los recursos, esto llevó a realizar modificaciones para la construcción del material definitivo del que se dispone para el uso de la comunidad educativa y que se encuentra en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, D.C.-Colombia).

## MARCO DE REFERENCIA

La propuesta de tareas y material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje se desarrolla en relación con las series geométricas convergentes, contenido matemático que aparecía explícitamente en el currículo escolar colombiano hasta

Linares, A., Pinzón, L. y Mora, L. (2024). Material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 187-194. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

la renovación curricular (MEN, 1991). Después de promulgados los *Lineamientos curriculares de matemáticas* (MEN, 1998), los *Estándares básicos de competencias matemáticas* (MEN, 2006) y los *Derechos básicos de aprendizaje de matemáticas* (MEN, 2016), este objeto matemático no aparece de manera directa en estos documentos; sin embargo, en lo que se refiere al desarrollo del pensamiento variacional y al estudio de los sistemas algebraicos y analíticos se enfatiza en la importancia de usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y probar conjeturas, así como el análisis de procesos infinitos (MEN, 2006), asuntos en los que el estudio de series geométricas puede aportar de manera sustancial.

De otro lado, al revisar libros de texto utilizados en la educación escolar de las matemáticas en las instituciones educativas colombianas, publicados luego de 2007, se halla la referencia a las series geométricas, tal es el caso de libros de noveno grado<sup>1</sup> de las editoriales Norma y Santillana. Razón por la cual, muy seguramente, en algunas instituciones, este contenido matemático continúa haciendo parte de los planeadores de los profesores de matemáticas de la educación secundaria y media.

Con este breve contexto del lugar de las series geométricas en el currículo escolar colombiano y con el propósito de estudiar este contenido matemático en pro de favorecer el desarrollo del pensamiento variacional, es fundamental precisar lo que se entiende por estas series desde el punto de vista de las matemáticas, para luego centrar la atención en lo que es material didáctico y tarea.

## Serie geométrica

Una serie geométrica es un tipo especial de serie cuyos términos, salvo el primero, es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón común, representada por  $r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots \text{ es una serie geométrica,}$$

siempre que  $a$  y  $r$  sean números reales.

Estos son dos ejemplos de series geométricas:

---

<sup>1</sup> Editorial Norma: *Espiral 9*, publicado en 2007; *Retos matemáticos 9*, publicado en 2012. Editorial Santillana: *Caminos del saber, matemáticas 9°*, publicado en 2013.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n = 1 + 5 + 25 + 125 + \dots$$

### Elementos de una serie geométrica

Sea la serie geométrica:  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ ,  $r$  y  $a$  números reales, los elementos que la componen son:  $a$ , primer término, constante;  $r$ : razón común;  $S_n$ : sucesión de sumas parciales de la serie.

A continuación, se encuentran las primeras cuatro sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ :  $H_1 = \frac{1}{2} = 0,5$ ;  $H_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$ ;  $H_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$  y  $H_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$ .

Con estos cuatro primeros términos se puede colegir que sus sumas se aproximan a uno, es decir, parece estimable que la serie converge a uno.

Otra forma de notar la convergencia de esta serie (a uno) es a través de representaciones gráficas, como la que se ve en la figura 1.

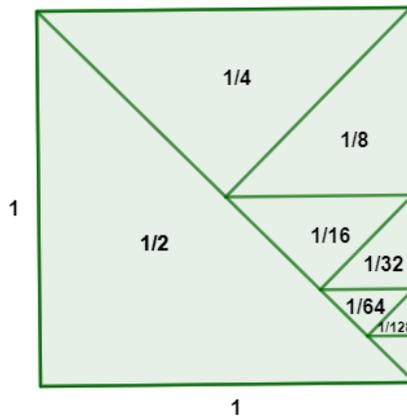


Figura 1: representación geométrica en GeoGebra de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Ahora, si se considera la serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n = 1 + 5 + 25 + 125 + \dots$ , también ejemplificada anteriormente, se tiene que sus primeras cuatro sumas parciales son 1, 6, 31, 156. Como se observa, sus sumas parciales cada vez son más grandes; es decir, no se aproximan a un valor en específico, entonces se puede intuir que la serie diverge.



terial didáctico hace ostensivas. Siguiendo a Flores, Lupiañez, Berenguer, Marín y Molina (2011) y Mendoza, Quintanilla y Gallardo (s. f.), los materiales didácticos se pueden tipificar según su utilidad (pre-instruccionales, co-instruccionales y pos-instruccionales), según su contenido (geométrico, aritmético, algebraico, etc.); según el criterio, con base en su versatilidad, edad escolar y vinculación prioritaria y según su modalidad de uso. Con base en esto, el material didáctico diseñado es un material co-instrucciona, de contenido geométrico, aritmético y algebraico, de vinculación prioritario (se relaciona con un concepto matemático, las series geométricas) y que pretende modelizar este concepto matemático. Cabe anotar que este material se acompañó de un conjunto de tareas para su adecuada utilización.

### DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA: MATERIAL DIDÁCTICO Y TAREAS

La idea de crear un material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas convergentes surge al no encontrar material didáctico manipulativo para este objeto matemático, luego de una revisión bibliográfica en libros, tesis de grado, investigaciones y la red de internet. En esta última fuente se halló un canal en YouTube «*Mathematical Visual Proofs*», conocido previamente por una de las autoras de este documento, que fue inspirador para la creación de la primera versión del material; de este canal se seleccionaron las siete series construidas con material tangible. Cada serie se bordeó con un marco, inicialmente de cartón (versión preliminar) y luego de madera, se incorporaron piezas adicionales y un conjunto de fichas (letras, expresiones algebraicas y fracciones); además, se nombraron de una forma particular, a saber: Caracolí, Cola-Dino, Pinski, Mountain, Cruz-griega, Fish y Piramidal. En la figura 3 se puede ver un par de ejemplos del material.

Paralelamente al diseño del material, se crearon las tareas con el fin alcanzar el objetivo establecido, favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas convergentes con estudiantes de básica secundaria y media. Las tareas creadas fueron: (i) Ambientación. «Concéntrese»; (ii) Reconocimiento del material; (iii) Identificación de los elementos de las series y (iv) Tabla de recopilación de datos.



$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Figura 3: ejemplo del material didáctico (izq., versión preliminar; der., versión final) (fotografía de archivo de las autoras para las series Caracolí (izq.) y Cola-Dino (der.))

Con el material didáctico y las tareas, se realizó un piloto, a finales de 2023, en la IED Isabel II, jornada mañana (véase figura 4), institución bogotana reconocida por ser un colegio de inclusión. Los participantes fueron estudiantes de grado décimo, entre quienes se hallaban estudiantes Sordos y oyentes. Las sesiones fueron grabadas en audio y video.



Figura 4: estudiantes experimentando con el material didáctico (fotografía de archivo de las autoras)

Durante la prueba piloto se realizó la recolección de la información con tres insumos (diarios de campo, encuesta de satisfacción y guías de trabajo), que contribuyeron al diseño final del material, el cual se encuentra disponible en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para uso de profesores y estudiantes.

Después del análisis de los insumos se decide no modificar el tamaño del material ni sus nombres, pero sí se hacen ajustes en color y material de elaboración; también se elimina una de las series (por dificultades para su manipulación), en

su lugar se incluye un par de nuevas series. También se adiciona una nueva tarea, tarea 5. Expresión algebraica general.

## CONCLUSIONES

La experiencia que se llevó a cabo en el marco de lo expuesto nos permitió hacer consciencia sobre la importancia de contar con una muy buena fundamentación conceptual sobre los objetos matemáticos antes de llevarlos a su enseñanza o pretender crear un material didáctico en estrecha relación con estos. De otro lado, sin duda alguna, diseñar material didáctico manipulativo implica numerosos retos, no solo de tipo cognitivo sino económico y de inversión de tiempo, razones por las cuales, muy seguramente, a veces los profesores en ejercicio no optan por ello.

El piloto permitió identificar ventajas y desventajas del material y las tareas, siendo esto crucial para realizar los cambios y modificaciones en pro de contar con un material apropiado para la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas convergentes.

El material manipulativo facilitó la comprensión del concepto de series geométricas convergentes por parte de los estudiantes y en particular de los estudiantes Sordos. Esto se evidenció durante la aplicación del piloto e insumos recolectados, se detectó no solo participación activa de los estudiantes sino identificación de los términos de una serie geométrica, así como conjetura de su convergencia a través de la manipulación del material y el desarrollo de las tareas. El uso de los sentidos del tacto y la visión, así como el proceso de visualización y traducción de representaciones fueron claves para el desarrollo de las tareas propuestas.

## REFERENCIAS

- Flores, P., Lupiañez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de Matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.  
[http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro\\_MATREC\\_2011.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro_MATREC_2011.pdf)
- Mathematical visual proofs. (s. f.). <https://www.youtube.com/channel/UCT9Fyqn0izh-wX-wDzKBwAA>
- Mendoza, L. M., Quintanilla, V. A. y Gallardo, J. (s. f.). *Recursos y materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas*.  
<https://www.yumpu.com/es/document/read/21743000/recursos-y-materiales-didacticos-mendoza-quintanilla-gallardo>

- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Antioquia: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (1991). *Propuesta programa curricular*. Bogotá: MEN.
- Morales, P. A. (2012). *Elaboración de material didáctico*. México: Red Tercer Milenio S. C.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words. Exercises in visual thinking*. EUA: The Mathematical Association of America.
- Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las estructuras de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.
- Torres, E. y Casallas, L. A. (2021). Materiales, recursos y juego: una distinción y relación necesaria en el aula de matemáticas. *Infancias Imágenes*, 20(2), 206-215.
- Universidad de Sonora (s. f.). *Elementos de cálculo integral y álgebra lineal*. [http://mat.uson.mx/~jldiaz/NotasCD-1/Series/Tipos\\_de\\_Series\\_2.htm](http://mat.uson.mx/~jldiaz/NotasCD-1/Series/Tipos_de_Series_2.htm)

# TRES RECURSOS DIDÁCTICOS PARA PROMOVER LA ARGUMENTACIÓN INDUCTIVA EN SECUNDARIA

**Zaira López y Leonor Camargo**

*Universidad Pedagógica Nacional*

[zmlopezg@upn.edu.co](mailto:zmlopezg@upn.edu.co), [lcamargo@pedagogica.edu.co](mailto:lcamargo@pedagogica.edu.co)

Presentamos tres recursos didácticos que favorecen la argumentación inductiva de estudiantes de secundaria: un cuestionario que acompaña los enunciados de problemas, una plantilla discursiva y un esquema argumentativo. Ejemplificamos su uso con producciones de estudiantes, quienes resolvieron un problema sobre equidistancia a dos puntos fijos, con el apoyo de GeoGebra. Las producciones hacen parte de la información registrada en el ejercicio investigativo –aún en curso– de la primera autora, en el marco de sus estudios de Maestría en Docencia de las Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional.

## CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia significativa que da lugar a esta comunicación surge en un espacio electivo del Colegio Real Escandinavo, al que la primera autora estaba vinculada como profesora de matemáticas en el año 2023. Ella creó el espacio por la necesidad de buscar estrategias para mejorar los niveles de desempeño en argumentación, de los estudiantes de educación básica secundaria.

El interés por mejorar la argumentación de los estudiantes no es aislado. Tanto en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) como en diversas fuentes investigativas se señala la importancia de aprender a argumentar en el aula. Por ejemplo, Ruiz (2012) reconoce el papel de la argumentación en la construcción autónoma de conocimiento por parte de los estudiantes. Reuter (2023) agrega que aprender a argumentar favorece la actividad matemática al dar validez a las afirmaciones, por medio de argumentos deductivos, y también la actividad exploratoria de descubrir propiedades y proponer conjeturas, ampliando el universo de conocimientos que se tienen, por medio de argumentos abductivos e inductivos.

La primera autora centró su trabajo de grado de maestría en el aprendizaje de la argumentación inductiva, principalmente al atender el llamado de Planas y Morera (2012). Estas autoras sugieren buscar formas de enseñar a argumentar inductivamente, mediante las cuales los estudiantes descubran propiedades, ganen

López, Z. y Camargo, L. (2024). Tres recursos didácticos para promover la argumentación inductiva en secundaria. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 195-202. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

certeza de ellas y las generalicen, extendiendo el descubrimiento a todos los posibles casos de un conjunto de objetos matemáticos.

Al contar con el espacio electivo mencionado, nos centramos en diseñar una propuesta para enseñar a estudiantes, de sexto a octavo grado, cómo producir argumentos inductivos cuando resuelven problemas geométricos. En este artículo presentamos tres recursos didácticos que ideamos para promover la construcción de significado de argumento inductivo. Ejemplificamos su uso con producciones de un grupo de tres estudiantes de grado octavo que se enfrentaron a la resolución de un problema con el uso de GeoGebra (por primera vez) y emplearon los recursos para registrar los elementos de un argumento inductivo. Esperamos incentivar el uso de estos recursos didácticos para recibir realimentación que nos permita ir optimizándolos a medida que estudiantes de diferentes instituciones los empleen.

## FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL

Como marco de referencia de la propuesta de enseñanza, optamos por seguir las definiciones de argumentación, argumento y argumento inductivo, establecidas por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG) de la Universidad Pedagógica Nacional (Vargas, Molina, Samper, Perry y Camargo, 2022).

El grupo de investigación AEG considera la argumentación como un proceso discursivo y sociocultural en el que se producen argumentos. Vargas et al. (2022) definen argumento como “una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan” (pp. 104). Las razones son de índole empírica (dato) o teórica (garantía).

Además de los planteamientos del grupo AEG retomamos la aproximación de Rumsey y Langrall (2016), para quienes la argumentación en el aula de matemáticas es un proceso discursivo, que se desarrolla cuando estudiantes, en un trabajo colaborativo, descubren y afirman nuevas ideas matemáticas, justificando su descubrimiento, o cuando procuran persuadir o convencer a los compañeros de que su afirmación es verdadera según los conocimientos del curso. Nuestra propuesta se enfoca en el primer caso nombrado.

Con base en la conceptualización de Hernández y Parra (2013) y del grupo AEG, determinamos cómo se conforman los tres elementos básicos de un argumento inductivo (dato, aserción y garantía) (véase tabla 1).

Dato	Conjunto universal de objetos
	Propiedad conocida que tienen los objetos del conjunto universal
	Propiedad descubierta en algunos de los objetos del conjunto universal
	Caso no explorado que pertenece al conjunto universal
Aserción	Enunciado sobre el caso no explorado en relación con la propiedad descubierta
Garantía	Patrón de generalización o conjetura que establece una proposición condicional del tipo “si <i>propiedad conocida</i> , entonces <i>propiedad descubierta</i> ”

Tabla 1: conformación de los elementos básicos para la formulación de un argumento inductivo

## PROPUESTA DE RECURSOS DIDÁCTICOS PARA FAVORECER LA ARGUMENTACIÓN INDUCTIVA

Para favorecer la argumentación inductiva proponemos trabajar en un entorno de resolución de problemas en los que se pide explorar una representación (preferiblemente hecha en un programa de geometría dinámica como GeoGebra), descubrir una propiedad y justificarla. Sin embargo, como creemos que esto no es suficiente para lograr la formulación explícita de argumentos inductivos y que los estudiantes aprendan cómo se elabora un argumento inductivo, diseñamos los siguientes tres recursos didácticos. Todos ellos buscan que los estudiantes reconozcan cómo se conforman los elementos de un argumento inductivo y aprendan a formularlo discursivamente.

### Cuestionario que acompaña los enunciados de los problemas

El primer recurso didáctico es un cuestionario que acompaña los enunciados de problemas. Por ejemplo, supongamos el siguiente enunciado:

Descubra el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos; justifique su respuesta.

El cuestionario que lo acompaña tiene ítems específicos que orientan el proceso de exploración de objetos que pertenecen al conjunto universal (en el ejemplo, pares de puntos del plano). Así, se guía la exploración de objetos del conjunto universal (por ejemplo, pares de puntos específicos que equidistan de dos puntos), en busca de una nueva propiedad (dato). Una vez descubierta, otro ítem invita a decir si un caso no explorado del conjunto universal tiene la propiedad

descubierta. Se espera que los estudiantes infieran que el caso no explorado tiene la propiedad descubierta en razón a que los casos explorados la tienen. También, que justifiquen la conexión entre el dato y la aserción formulando una conjetura que generalice, mediante una proposición condicional, la relación entre la propiedad conocida y la propiedad descubierta. Un ejemplo de cuestionario diseñado para el problema con el que ejemplificamos la herramienta está en la tabla 2.

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Con ayuda del programa de geometría dinámica, GeoGebra, representar la siguiente situación: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Construir dos puntos y llamarlos <math>A</math> y <math>B</math>.</li> <li>- Construir un punto, llamarlo <math>M</math>, que sea equidistante de <math>A</math> y de <math>B</math> (es decir, que <math>M</math> se encuentre a la misma distancia de <math>A</math> y de <math>B</math>).</li> <li>- Construir un punto <math>N</math> que equidiste de <math>A</math> y de <math>B</math>.</li> <li>- Construir un punto <math>O</math> equidistante de <math>A</math> y de <math>B</math>.</li> <li>- Construir un punto <math>P</math> equidistante de <math>A</math> y de <math>B</math>.</li> </ul> </li> <li>2. Repetir la situación cuantas veces sea necesario, hasta descubrir en dónde se ubican los puntos. ¿A qué figura geométrica pertenecen los puntos que equidistan de los puntos <math>A</math> y <math>B</math>?</li> <li>3. Sin hacer la construcción de otro punto en GeoGebra, imaginar un punto <math>Z</math> de tal forma que equidiste de <math>A</math> y <math>B</math> ¿En dónde se pondría al punto <math>Z</math>?</li> <li>4. ¿Por qué se colocaría el punto <math>Z</math> en ese lugar?</li> <li>5. ¿Qué conclusión se puede sacar sobre cualquier punto que esté a la misma distancia de <math>A</math> y de <math>B</math>?</li> </ol> |
|--|

Tabla 2: cuestionario que acompaña los enunciados de los problemas

## Plantilla discursiva

El segundo recurso didáctico es una plantilla discursiva adaptada de la propuesta por Rumsey y Langrall (2016), para que los estudiantes se apropien de la estructura lingüística mediante la cual se comunica un argumento. La adaptación que hicimos busca que los estudiantes identifiquen que el dato se conforma con una propiedad conocida que tienen los objetos del conjunto universal y también con una propiedad descubierta por exploración de casos. Además, pretende que los estudiantes identifiquen que la aserción predica sobre un caso

del conjunto universal que, teniendo la propiedad conocida, también tiene la propiedad descubierta y, seguidamente, que se establezca la conjetura “si *propiedad conocida*, entonces *propiedad descubierta*”, como garantía.

Observo que los objetos \_\_\_\_\_ que sabía que tienen la propiedad \_\_\_\_\_ también tienen la propiedad \_\_\_\_\_ (Dato). Afirmo que el objeto no explorado \_\_\_\_\_ tiene la propiedad \_\_\_\_\_ (Aserción). Esto es así porque \_\_\_\_\_ (Garantía).

Figura 1: plantilla discursiva para la estructura lingüística de un argumento inductivo

Los estudiantes deben completar las oraciones en la plantilla, de tal forma que se van conformando los elementos del argumento, ligados por palabras o frases conectoras que le van dando la estructura de argumento inductivo (figura 1).

### Esquema argumentativo

El tercer recurso didáctico lo llamamos esquema argumentativo (figura 2). Lo adaptamos de la propuesta de Kuntze (2010), quien señala que la esquematización es útil para apoyar visualmente la identificación de los componentes de un argumento. Aunque este investigador lo propone para los argumentos deductivos, nosotras lo adaptamos para los argumentos inductivos, destacando principalmente cómo se conforma el dato.

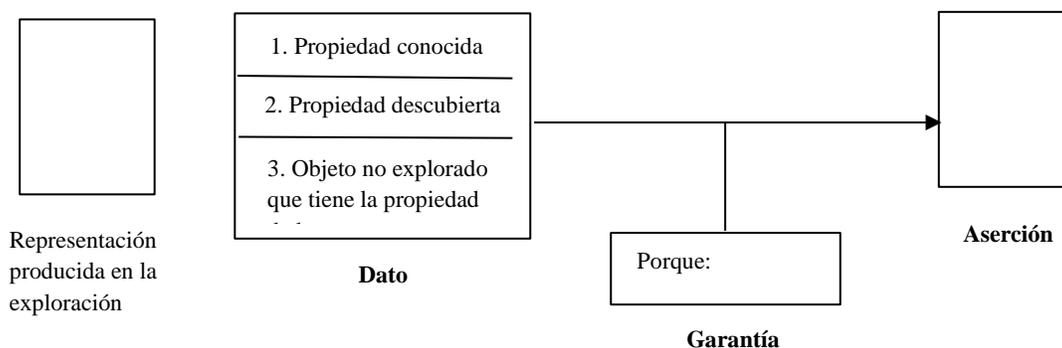


Figura 2: esquema argumentativo

### EJEMPLO DEL USO DE LOS RECURSOS POR PARTE DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES

A continuación, ejemplificamos el uso de los tres recursos con producciones de un grupo de tres estudiantes de grado octavo que participaron del curso electivo,

cuando resolvieron el problema mencionado en la sección previa. Con el apoyo del cuestionario, los estudiantes identificaron un subconjunto de puntos que equidistan de  $A$  y de  $B$ . Al comienzo de la interacción comunicativa, después de determinar los puntos fijos, mencionaron que debían construir los puntos  $M, N, O, P$  de tal forma que equidistaran de los puntos  $A$  y  $B$ . Primero determinaron el punto  $M$ , intentando que quedara colineal con los puntos  $A$  y  $B$ . Con el uso del arrastre y la medida de distancias, arrastraron el punto  $M$  hasta que  $AM$  y  $MB$  quedaran iguales. Luego determinaron los puntos  $N, O, P$  de forma similar, aunque ubicándolos inicialmente en cualquier lugar de la pantalla (figura 3). En un diálogo con la profesora, los estudiantes describieron el procedimiento realizado para dar solución a la tarea y confirmaron que los puntos construidos  $M, N, O$  y  $P$  cumplen con la condición de equidistar de los puntos  $A$  y  $B$ .

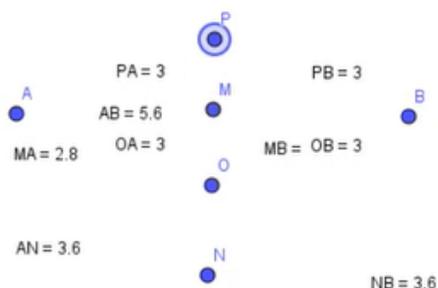


Figura 3: puntos equidistantes de  $A$  y de  $B$

2. Repite la situación cuantas veces sea necesaria, hasta que descubras en dónde se ubican los puntos. ¿A qué figura geométrica pertenecen los puntos que equidistan de los puntos  $A$  y  $B$ ?  
R. a una línea recta
3. Sin hacer la construcción de otro punto en GeoGebra, imaginen un punto  $Z$  de tal forma que equidiste de  $A$  y  $B$ . ¿En dónde pondrían al punto  $Z$ ?  
R. en la recta formada por  $M, N$  y  $O$
4. ¿Por qué colocarían al punto  $Z$  en ese lugar?  
R. porque equidista al punto  $A$  y  $B$  y hace parte de la recta
5. ¿Qué conclusión pueden sacar sobre cualquier punto que esté a la misma distancia de  $A$  y de  $B$ ?  
R. Va a formar parte de una recta

Figura 4: cuestionario diligenciado por las estudiantes

En la figura 4 presentamos las respuestas del grupo de estudiantes al cuestionario entregado, después de terminar de resolver el problema. En los ítems 2 y 3 se observa que ellas identifican la propiedad descubierta e infieren que el punto  $Z$  no explorado debe estar en la recta determinada por los puntos explorados. En el ítem 4 escribieron como razón de lo inferido que el punto no explorado equidista de  $A$  y  $B$ , asumiendo que se comportaría como los puntos explorados. Además, agregaron, equivocadamente, que hacía parte de la recta, incluyendo la aserción en el conjunto de razones. En el ítem 5, solo mencionaron la propiedad descubierta y no, como esperábamos, la proposición condicional que relaciona la propiedad conocida con la descubierta.

En la figura 5 presentamos la plantilla discursiva diligenciada por los estudiantes, después de responder el cuestionario. Aludieron a la propiedad descubierta mencionando que “los puntos azules” (por la representación en GeoGebra) forman una recta y escribieron la aserción como esperábamos. Como garantía mencionan las propiedades, conocida y descubierta, pero sin establecer una relación condicional entre ellas. En la figura 6 está la respuesta al esquema argumentativo completado por el mismo grupo. Este debía diligenciarse luego de haber completado la plantilla discursiva. Allí se observa que los estudiantes escriben el dato y la aserción bien, pero como garantía remiten a la propiedad conocida.

Grupo 4

Enunciado 2.

1. Completen los siguientes espacios:

Observo que los puntos A y B que equidistan de los puntos A y B, pertenecen a una recta. Afirmo que un punto Z que cumple la misma condición, pertenece a la recta formada por los puntos azules. Esto pasa porque los puntos azules forman esta recta cumpliendo la condición dada, equidistan a A y B.

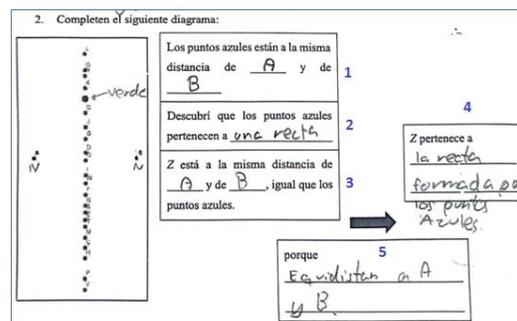


Figura 5: plantilla discursiva diligenciada por el grupo de estudiantes

Figura 6: esquema argumentativo diligenciado por el grupo de estudiantes

## COMENTARIOS FINALES

En las producciones escritas observamos que los tres recursos didácticos son útiles para diferenciar entre la propiedad conocida y la propiedad descubierta. En el cuestionario, en la plantilla discursiva y en el esquema argumentativo los estudiantes escribieron que los puntos que cumplen la condición inicial dada pertenecen a una recta. También escribieron la aserción de forma correcta.

En cuanto a la garantía, los estudiantes no escribieron una proposición condicional del tipo: ‘Si los puntos equidistan de dos puntos fijos  $A$  y  $B$ , entonces aquellos puntos pertenecen a una misma recta’. En el cuestionario escribieron como ‘conclusión’, la misma aserción; en el esquema argumentativo se refirieron a la propiedad conocida; en la plantilla discursiva mencionaron la propiedad descubierta y la conocida, pero sin relacionarlas condicionalmente. Cuando diseñamos el cuestionario, consideramos suficiente que la indicación ‘¿qué conclusión pueden sacar sobre cualquier punto que está a la misma distancia de  $A$  y de  $B$ ?’ era suficiente para que los estudiantes formularan la garantía, pero el

ejemplo usado y la revisión de respuestas de otros grupos nos dejan ver que no es así. Nos hemos dado cuenta de que se requiere una elaboración un tanto sofisticada que esperamos logren más adelante con el uso de recursos propuestos.

El ítem 5 del cuestionario y la pregunta del ‘por qué’ que propusimos en la plantilla discursiva y el esquema argumentativo también requieren una reformulación. Esperamos que, en el proceso investigativo, podamos encontrar una mejor forma de apoyar discursivamente a los estudiantes, aprovechando los recursos didácticos descritos, para la elaboración de la garantía.

## REFERENCIAS

- Hernández, H. y Parra, R. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza. *Innovación Educativa*, 13(63), 61-73.
- Kuntze, S. (2008). Fostering geometrical proof competency by student-centred writing activities. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA xxx* (vol. 3, pp. 289-296). México: Cinvestav-UMSNH.
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Planas, N. y Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. En *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas* (pp. 275-300). España: Ministerio de Ciencia e Innovación.
- Reuter, F. (2023). Explorative mathematical argumentation: A theoretical framework for identifying and analysing argumentation processes in early mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 112(3), 415-435. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10199-5>.
- Ruiz, F. (2012). Caracterización y evolución de los modelos de enseñanza de la argumentación en clase de ciencias en la educación primaria. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.
- Rumsey, C. y Langrall, C. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching Children Mathematics*, 22(7), 412-419.
- Vargas, C., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2022). Tareas de argumentación: ¿por qué un “por qué” no es necesario ni suficiente? En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (25, pp. 101-113). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

# CONEXIONES ETNOMATEMÁTICAS: UNA MIRADA DESDE EL APUNTALAMIENTO DE UNA CERCA

**Ángel Natera, Dayana González y Armando Aroca**

*Universidad del Atlántico*

agnatera@mail.uniatlantico.edu.co, dmichellgonzalez@mail.uniatlantico.edu.co,

[armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co)

El objetivo es analizar conexiones etnomatemáticas del conocimiento matemático de campesinos, al construir un cercado, con la matemática escolar. Se utilizó metodología cualitativa con enfoque etnográfico, incluyendo observación, entrevistas semiestructuradas, registros audiovisuales y diarios de campo. Este estudio se apoya teóricamente en el Programa Etnomatemáticas y en investigaciones afines con campesinos. Se establecen y analizan conexiones entre el manejo de herramientas, el lenguaje oral y corporal durante la práctica con conceptos geométricos como área, perímetro, segmentos de rectas paralelas, patrones de medida y tipos de ángulos. Este estudio supone un referente que nutre al Programa Etnomatemáticas; también se espera problematizar los resultados en el diseño y ejecución de un plan de clase y se resalta el saber matemático campesino.

## LAS PRÁCTICAS CULTURALES Y SU APORTE A LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

La educación matemática propone alcanzar, en el salón de clases, el aprendizaje desde diferentes aspectos que apunten al cumplimiento de unos estándares básicos de aprendizaje. Y más que estudiarlas desde el aula, muchos investigadores en educación se interesan en comprender la diversidad de formas en que las personas del común escriben, pronuncian, entienden y trabajan las matemáticas que se conciben desde un enfoque disciplinar (Blanco, Higueta y Oliveras, 2014).

Debemos entender que desde las culturas se trabajan las matemáticas; en algunos casos, estas no son reconocidas por quienes realizan alguna práctica, pero concebimos que el saber disciplinar diferencia o establece conexiones entre estos saberes con objetos matemáticos. Por ello, el aporte de las prácticas culturales debe ser vital para seguir en el avance del aprendizaje de las matemáticas escolares. Es importante que los profesores reconozcan que el estudiante vive dentro de una cultura en la que de alguna manera ha venido formándose y ha

Natera, Á., González, D. y Aroca, A. (2024). Conexiones etnomatemáticas: una mirada desde el apuntalamiento de una cerca. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 203-208. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

adquirido un saber propio. Creemos que es fundamental que el profesor de matemáticas vincule estos saberes con la estructuración de sus planes de clase (Blanco *et al.*, 2014).

Las prácticas rurales dan forma a la cultura campesina. Muchas de estas prácticas son el legado de padres a hijos, que se han encargado de mantener un saber propio. Por su parte, la etnomatemática, desde sus principios, les ha dado una significancia (Aroca, 2018) a esos saberes, ha dignificado estos saberes únicos que se han visto reflejados en el desarrollo de nuevas metodologías para maestros (Oliveras y Blanco, 2016). En este sentido, esta investigación en curso se interesó en el estudio del saber campesino relacionado con su práctica de elaborar un cercado y en establecer conexiones etnomatemáticas del manejo de herramientas, el uso del lenguaje, las expresiones corporales, técnicas y la práctica, en general campesina, con la matemática escolar.

Haciendo énfasis en la actividad agrícola, se observa que la construcción de cercados emerge como una de las actividades primordiales en las que se involucra el campesinado. Esta labor conlleva un desgaste físico significativo y se realiza ya sea por beneficio propio o como respuesta a necesidades económicas. Se despliega un lenguaje contextualizado y se emplean técnicas específicas, como el uso de “madrinas” –es decir, el palo grueso que da firmeza al cercado– o la destreza de “puntear un palo” para hacer un hueco en terrenos arcillosos mojados y delimitar una superficie, una parcela, un lote, una tarea, una hectárea, una cabuya –porción cuadrada de tierra de 80 m por 80 m– etc.

## EL CAMPESINO Y SU GRAN APORTE A LA ETNOMATEMÁTICA

El plan de las Naciones Unidas para el desarrollo –PNUD (2011)– caracteriza al campesino como actor social pleno de derechos, con políticas que atribuyen una coherencia ligada a la herencia ancestral de cómo cultivar la tierra, para que esta sea productora de alimentos. Muchos investigadores ven en las prácticas campesinas un aporte fundamental al estudio etnomatemático y, más que eso, un respeto significativo a sus raíces. Un ejemplo claro lo proporcionan Oliveira y de Freitas (2022), quienes resaltan la producción y transmisión del saber campesino, considerándolos no solo capaces de trabajar y producir para su subsistencia, sino también de crear sus propios conocimientos a través de un conjunto de saberes propios.

Así mismo, Rodríguez, Mosquera y Aroca (2019) muestran al mundo de la investigación la destreza que poseen campesinos dedicados a la pesca: estos utilizan una cometa para realizar esta labor, utilizan dos sistemas de medidas no convencionales que han sido de gran aporte para la enseñanza de la geometría. También están Sarmiento, Vargas y Aroca (2021), quienes estudian las habilidades de cálculo mental que despliegan campesinos de la zona en sus labores diarias de ordeñamiento de ganado y comercialización de productos lácteos.

Seguir investigando las matemáticas desde las culturas fortalece el Programa Etnomatemáticas. Asimismo, se reconoce que existe una cultura local, una historia, el sujeto que ha adquirido una experiencia de saberes desde sus prácticas comunitarias y que, sin duda alguna, utiliza las matemáticas que coexisten en su cotidianidad.

### La labor de cercar: más que un desgaste físico, un aporte a la geometría

Aprender matemáticas no implica que debamos estudiarlas desde un salón de clases. Aprendemos cada vez que realizamos prácticas donde existen las matemáticas. Este estudio cualitativo, basado en la etnografía, permitió a los investigadores sumergirse en el quehacer campesino en la elaboración del cercado. Es importante resaltar el esfuerzo de esta práctica cuando se hace uso del lenguaje corporal y oral, de la expresividad y del manejo de las herramientas que describen objetos geométricos que se conectan con el saber matemático escolar.

Esta investigación está fundamentada en las siete subfases que conforman la fase etnográfica del enfoque didáctico del Programa Etnomatemáticas como se puede ver en la figura 1.

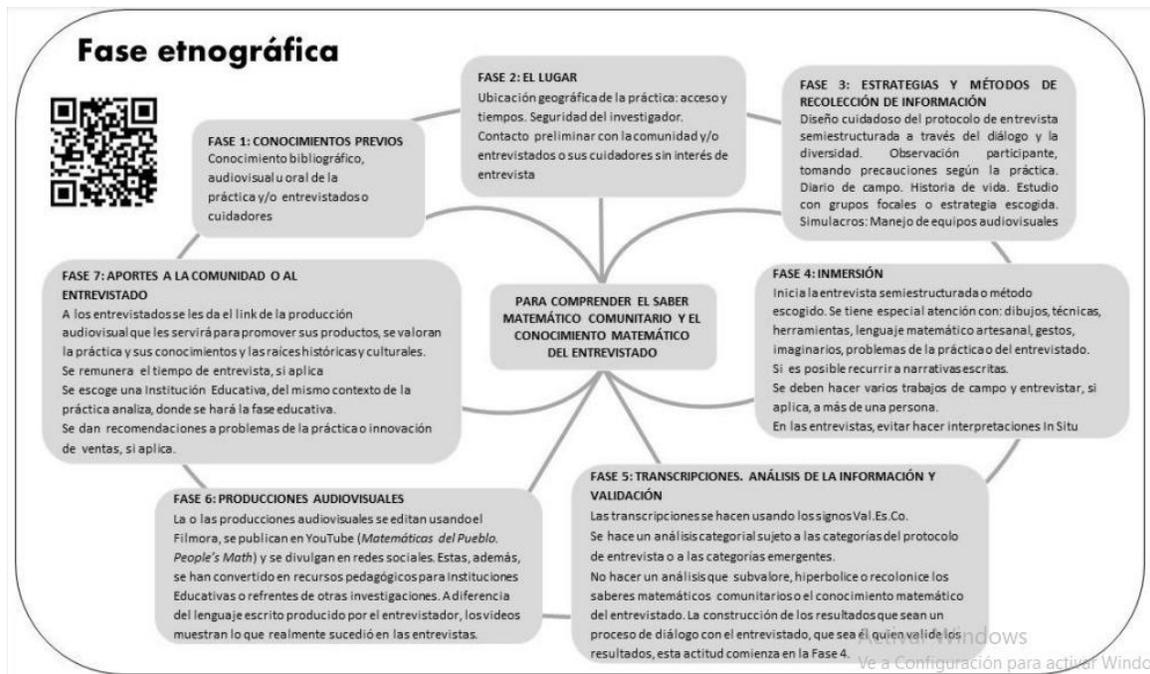


Figura 1: fase etnográfica (tomado del enfoque didáctico del Programa Etnomatemáticas en Aroca, 2022)

Para la recolección de la información en esta investigación, se implementó la entrevista semiestructurada, soportada en registros audiovisuales, lo cual permitió a los investigadores formular preguntas abiertas a las ya establecidas en un protocolo de entrevista semiestructurado de 6 categorías (Mata, 2020) y la observación participante estructurada en un diario de campo sistematizado a partir de la experiencia del investigador con los procesos de corte de madera, el traslado de la misma y la elaboración de huecos para enterrar las madrinas y postes. El protocolo de entrevista constó de seis categorías: (i) un arte trasciende en la familia; (ii) uvito, trupillo, matarratón y herramientas; (iii) yo trabajo con...; (iv) paladruga, puntilla y su uso en los terrenos arcillosos; (v) dos varas me hacen un cajón; (vi) cotorra y dos dedos; patrón de medida.

Se describen algunas conexiones analizadas en el saber campesino de construir un cercado, se relacionan ángulos agudos con el abrir y cerrar la paladruga al momento de realizar el hueco para las madrinas, como se puede ver en la figura 2a. En el engrape de los hilos podemos observar segmentos de rectas paralelas que son separadas por la longitud de la cotorra y dos dedos del campesino como patrón de medida, como se puede ver en la figura 2b. Uno de los campesinos realizó un cercado de 100 metros lineales, los investigadores reconocen una co-

nexión en la construcción del concepto de perímetro, definido desde el “apuntalamiento” de postes y maderas clavados con hilos de alambre y grapas, separados a una distancia que delimita la superficie del terreno, mientras que el área es representada por la medida de la superficie en la que fue subdividido el terreno que separa el cultivo de yuca y el ganado.



Figura 2a: uso de la paladraga y la observación de ángulos en el abrir de la herramienta



Figura 2b: los hilos de alambre como rectas paralelas; dos dedos, una cotorra como patrón de medida

En cada tarea agrícola, los campesinos exhiben una comprensión innata de conceptos geométricos, desde la disposición de cercados hasta el manejo de herramientas. Esta sabiduría ancestral, transmitida de generación en generación, ofrece una perspectiva única que enriquece el aprendizaje de la geometría en el aula. Valorar, reconocer y respetar esta riqueza de conocimiento no solo mejora la comprensión de la geometría, sino que también promueve una apreciación más profunda de la conexión entre teoría y práctica.

Para concluir, esta investigación propone un referente teórico para propuestas afines desde un enfoque del Programa Etnomatemáticas, debido a que en la revisión bibliográfica se observa que no se ha trabajado de manera concurrente esta práctica involucrando a campesinos. También, se espera que este estudio sea un aporte para profesores como recurso pedagógico dentro de sus planes de clases, además, se resalta el saber matemático del campesinado en su labor y se pretende dar continuidad y ejecución a la fase educativa del enfoque didáctico del Programa Etnomatemáticas.

## REFERENCIAS

- Aroca, A. (2018). Aprendizaje paralelo y comparativo: la postura didáctica del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(2), 4-7.
- Aroca, A. (2022). Un enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas. *Tecné, Episteme y Diaxis*, 52, 211-24. <https://doi.org/10.17227/ted.num52-13743>
- Blanco, H., Higueta, C. y Oliveras, M. (2014). Una mirada a la etnomatemática y la educación matemática en Colombia: caminos recorridos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 245-269.
- Mata, L. (2020). Entrevistas semiestructuradas en investigación cualitativa. *Investigalia*.
- Oliveras, M. L. y Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de las etnomatemáticas en el aula de matemáticas: posibilidades y limitaciones. *Bolema*, 30(55), 455-480. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a08>
- Oliveira, M, y de Freitas, Z. (2022). Educação do Campo nos vieses da Etnomodelagem. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 13(2), 1-29.
- PNUD (2011). El campesinado - Reconocimiento para construir país. *Cuaderno del informe de desarrollo humano*.
- Rodríguez, C., Mosquera, G. y Aroca, A. (2019). Dos sistemas de medidas no convencionales en la pesca artesanal con cometa en Bocas de Cenizas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 12(1), 6-24.
- Sarmiento, Y., Vargas, L. y Aroca, A. (2021). Cálculo mental en la actividad del ordeño de ganado vacuno y su potencial aporte a la educación matemática. *Investigación y Acción*, 1(1), 34-44.

# AVANCE EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UNA ESTRATEGIA DE GAMIFICACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

**Rolando Navarro y Danny Ramírez**

*Colegio Yeshiva Har Sinai de Panamá, Universidad Nacional de Costa Rica*

[rolnava@gmail.com](mailto:rolnava@gmail.com), [danny.ramirez.lobo@una.cr](mailto:danny.ramirez.lobo@una.cr)

Mantener la atención de los estudiantes durante la clase hace necesario que el profesor planifique e innove sus estrategias didácticas. Para ir tras ese propósito, la gamificación ha demostrado ser una herramienta importante y el uso de GeoGebra permite crear experiencias de clase interesantes. La creación de actividades lúdicas que puedan ser puestas en práctica para el beneficio de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría es un objetivo en sí mismo, pero la implementación de estas actividades en clase puede brindarnos información valiosa y resultados positivos en el rendimiento académico de los estudiantes, además de mantener el interés por la matemática. Presentamos un avance en la implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de la ecuación de la circunferencia en geometría analítica.

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la geometría analítica en Costa Rica tiene un antes y un después por la implementación de la Reforma Matemática en la educación costarricense en 2012 a los programas de estudio de matemática. A partir de esa reforma fue necesario para los profesores la reformulación de sus lecciones. Antes de esta fecha no estaba en el currículo costarricense el estudio de la ecuación de la circunferencia de forma analítica en el plano cartesiano; solo se trabajaban cálculos de área y longitud de la circunferencia. Con la reforma, las clases de geometría cambian por completo y el uso de la tecnología juega un rol fundamental.

Aprender sobre las circunferencias, su ecuación y sus transformaciones puede contextualizarse usando múltiples escenarios, incluidos los videojuegos que tanto llaman la atención de los estudiantes, o con herramientas tecnológicas que permitan la visualización, por ejemplo, los paquetes de geometría dinámica. Sabiendo las bondades de la gamificación, una buena forma de innovar es la creación de estrategias didácticas que se apoyen en estas dinámicas de clase.

Navarro, R. y Ramírez, D. (2024). Avance en la implementación de una estrategia de gamificación para la enseñanza de la ecuación de la circunferencia. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 209-216. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En este reporte de avance de investigación presentamos las etapas de formulación de la experiencia de clase, de creación del juego o applet en GeoGebra y de la unidad didáctica con la cual se espera que trabajen los estudiantes que serán objeto de estudio.

## ANTECEDENTES

La reforma de la educación matemática en Costa Rica planteó como meta un cambio en las estrategias didácticas y en la forma de mirar la matemática, razón por la que “no solo variaron los temas de estudio, sino también la forma de impartirlos y de evaluarlos” (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 5). Desde entonces la creación de experiencias didácticas innovadoras que desafíen y cautiven el interés de las nuevas generaciones en las temáticas de estudio es una prioridad.

Los programas de estudio de matemática establecen la resolución de problemas como el enfoque principal del currículo, al indicar que “Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades” (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 13). Esto conlleva la necesidad de mostrar a los estudiantes las ciencias naturales y exactas como disciplinas recreativas conectadas con problemas cotidianos y que pueden resultar divertidas de aprender (Coronel y Curotto, 2008, p. 465).

Algunos autores, como Leung (2008), destacan que la implementación de herramientas tecnológicas, como el *software* de geometría dinámica (SGD) –en nuestro caso, GeoGebra– brinda la posibilidad de interactuar con las construcciones, facilitando el estudio de los lugares geométricos.

Una de las ventajas de un SGD es que nos provee de una habilidad para retener el contexto o la esencia de una configuración geométrica mientras que podemos traer al frente aquellas partes dinámicas de toda la configuración que nos interesan. Esto es, podemos visualizar el estudio de la variación de un aspecto de la configuración mientras mantenemos otros aspectos constantes, anticipando así la emergencia de patrones invariantes. (Leung, 2008, p. 135)

Por otra parte, la gamificación refiere a una estrategia pedagógica que intenta aprovechar el potencial educativo y emocional de las actividades lúdicas para favorecer y mejorar el aprendizaje por parte de los estudiantes bajo la premisa de “aprender jugando” (Torres-Toukoumidis y Romero-Rodríguez, 2018, p.

62). El principio fundamental es plantear actividades que demanden a los participantes desarrollar procesos de pensamiento y articular conocimientos previos con el fin de avanzar o ganar un juego.

En investigaciones recientes, los estudiantes comentan sobre la gamificación “que este tipo de aprendizaje es muy enriquecedor” (Mora, Pizarro y Ramírez, 2016, p. 78), e indican que les agradó descubrir los conocimientos por sí mismos, de manera autodidacta, y luego ponerlos en práctica. La gamificación ha demostrado ser una herramienta valiosa.

Al utilizar una estrategia de gamificación en esta unidad didáctica se respetan los principios constructivistas presentes en el aprendizaje activo y específicamente en la evaluación auténtica. Como lo menciona Ahumada (2005, p. 22) “los estudiantes tienen diferentes ritmos de aprendizaje producto de poseer diferentes estilos, capacidades de razonamiento y memoria” también menciona que se “valora el desarrollo de un pensamiento divergente en que resulta fundamental la crítica y la creatividad”.

#### ADAPTACIÓN DEL JUEGO A LA CLASE

La herramienta consiste en un applet de GeoGebra que emula el juego llamado *Duck Hunt*. Este es un videojuego clásico desarrollado por Nintendo en el año 1984, cuya dinámica se basa en la cacería de patos. El jugador debe apuntar y disparar a estos animales que intentan escapar volando. Conforme el jugador avanza en el juego, este va incrementando su dificultad al mostrar hordas de patos cada vez más numerosas y veloces.

Para la implementación de esta estrategia gamificada se sugiere realizar una pequeña introducción presentando el juego original a los estudiantes y sondeando su familiaridad con la dinámica.

La adaptación con fines didácticos propuesta contempla el uso de una circunferencia que simula ser la mira del arma con la que el jugador “disparará” a los patos. Para apuntar a sus objetivos, el jugador deberá realizar traslaciones de esta circunferencia.

Inicialmente, el jugador operará con botones de acción que fungirán como los controles del juego; y a la vez podrá observar en la pantalla cómo la ecuación de la circunferencia se va modificando cada vez que él oprime estos botones. Posteriormente, conforme “avance” de nivel, el jugador dejará de lado estos

controles para empezar a usar unas casillas de ingreso que le permitirán realizar las traslaciones de manera más analítica.

## Creación y validación del applet en GeoGebra

Para crear el applet fue necesario tener a mano las imágenes que servirán de fondo y ambientación para el juego. Se sugiere que sean al menos tres imágenes para que el juego tenga niveles de dificultad, permitiendo plantear tres ejercicios con un grado de complejidad ascendente. El jugador podrá elegir el nivel que desea jugar habilitando la casilla correspondiente (figura 1).

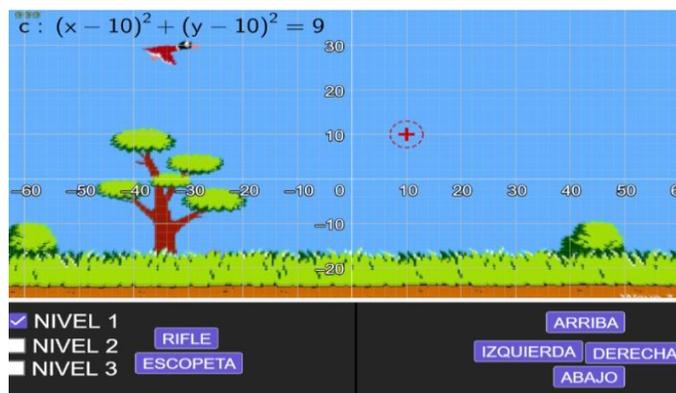


Figura 1: interfaz del Nivel 1 de juego - movimiento con botones direccionales

Para la mira del arma serán necesarios tres deslizadores: “h”, “k” y “r” con los que se construye la circunferencia de ecuación  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ . La fórmula o criterio algebraico de esta circunferencia debe habilitarse en la vista gráfica para que el estudiante pueda visualizar los cambios que realiza.

Adicionalmente, se crearon cuatro botones de acción con las leyendas “arriba”, “abajo”, “derecha” e “izquierda”. Estos botones permitirán desplazar la mira en las cuatro direcciones; su programación estará basada precisamente en modificar los valores de  $h$  y  $k$  aumentando o disminuyendo en una unidad cada vez que el jugador dé clic en cada botón.

De la misma forma, se crearon dos botones de acción con las leyendas “Rifle” y “Escopeta” para que el jugador elija qué arma utilizar al modificar el valor del radio  $r$  de la mira (figura 2).

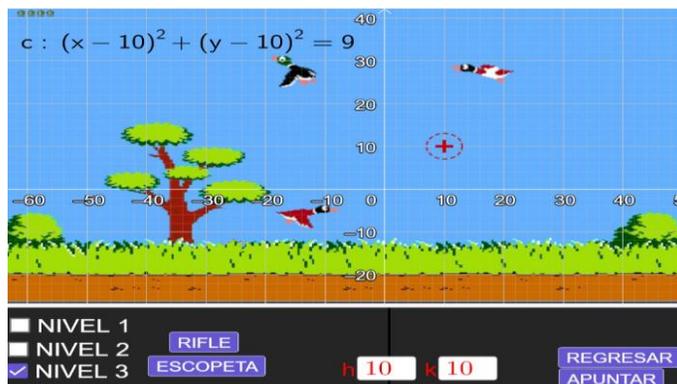
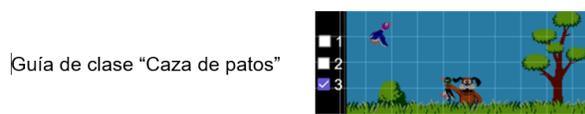


Figura 2: interfaz del Nivel 3 del juego - movimiento usando las coordenadas del centro  $(h, k)$

Cabe destacar que esta propuesta ha sido socializada con la comunidad docente en ejercicio y en formación a través de talleres en Costa Rica. Esto con el objetivo de validar la propuesta e identificar posibles mejoras al diseño.

## Creación y aplicación de la guía didáctica del estudiante

Esta unidad didáctica representa una propuesta para la enseñanza de la geometría analítica, específicamente el tema de círculos y circunferencias. Su objetivo es que los estudiantes manipulen la herramienta de manera lúdica, pero al mismo tiempo logren conocer y aplicar la ecuación de la circunferencia para avanzar en los niveles del juego.



Guía de clase "Caza de patos"

A continuación, se le brindan las instrucciones que debe seguir durante el desarrollo de la lección, acompañado del uso del juego presentado por el docente debe completar o contestar las interrogantes que se planteen en cada nivel del juego.

Guía para el NIVEL 1:

1. Inicie el juego en el nivel 1 marcando sólo la casilla correspondiente a ese nivel:  
 NIVEL 1
2. Escriba la ecuación inicial que se muestra en la vista algebraica: \_\_\_\_\_
3. Para poder apuntar al pato que vuela, debe mover la mira del arma utilizando los botones de movimiento direccional.



Figura 3: guía didáctica para el Nivel 1 del juego (1)

Se recomienda que cada estudiante tenga la posibilidad de explorar el applet y sería ideal que cada estudiante cuente con una computadora, y que se disponga de por lo menos una hora de clase para que pueda trabajar en la guía didáctica.

En la figura 3 se muestran las instrucciones para iniciar el juego en el Nivel 1, se espera que el estudiante descubra la funcionalidad de los botones, así como la relación que existe entre las modificaciones que realiza y el criterio algebraico de la circunferencia. Con esto el estudiante estará desarrollando la habilidad de aplicar traslaciones a una circunferencia presente en los programas de estudio de matemática.

Por otra parte, en la figura 4 se muestran las preguntas que guiarán a los estudiantes a realizar una comparación y análisis de las ecuaciones de las circunferencias para apuntar al pato, para desarrollar la habilidad de representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.

4. Una vez tenga el pato apuntado con el arma, escriba la ecuación que se muestra en la vista algebraica: \_\_\_\_\_
5. Compare sus respuestas de las preguntas 2 y 4:  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.
6. ¿Qué se mantiene? ¿Qué varía? ¿Qué pudo notar al presionar los botones de movimiento direccional?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_.
7. Revise que sucede al cambiar de arma de rifle a escopeta:  

8. ¿Cómo se ve afectada la ecuación que se presenta en la vista gráfica al cambiar el arma? ¿Qué podría concluir entonces?  
\_\_\_\_\_.

Figura 4: guía didáctica para el Nivel 1 del juego (2)

En la figura 5 se muestran las instrucciones para continuar el juego en el Nivel 2. Se espera que el estudiante modifique el criterio algebraico de la circunferencia usando los valores de  $u$  y  $v$  como vector de traslación. Con esto el estudiante estará desarrollando la habilidad de aplicar traslaciones a una circunferencia y a la vez representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.

Por otra parte, en la figura 6 se muestran las instrucciones del juego en el Nivel 3. Se espera que el estudiante modifique el criterio algebraico de la circunferencia usando los valores de  $h$  y  $k$  como coordenadas del centro de la circunferencia. Con esto, el estudiante estará desarrollando la habilidad de aplicar traslaciones a una circunferencia y, a la vez, de representar gráficamente una

circunferencia dado su centro y su radio, además de relacionar las representaciones gráfica y algebraica.

Guía para el NIVEL 2:

1. Inicie el juego en el nivel 2 marcando sólo la casilla correspondiente a ese nivel:  

2. Escriba la ecuación inicial que se muestra en la vista algebraica: \_\_\_\_\_
3. Para poder apuntar a los patos que vuelan en la parte superior de la pantalla, debe mover la mira del arma utilizando las casillas de entrada para el valor de  $u$  y  $v$ :  

4. Una vez tenga cada pato apuntado con el arma, escriba las ecuaciones que se muestran en la vista algebraica: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_
5. Explique ¿cómo determinó los valores que debía escribir en las casillas de entrada para  $u$  y  $v$ ?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Figura 5: guía didáctica para el Nivel 2 del juego

Se propone realizar un cierre de la actividad donde el profesor, junto con los estudiantes, establece los conceptos matemáticos con la rigurosidad necesaria.

Guía para el NIVEL 3:

1. Inicie el juego en el nivel 3 marcando sólo la casilla correspondiente a ese nivel:  

2. Escriba la ecuación inicial que se muestra en la vista algebraica: \_\_\_\_\_
3. Para poder apuntar a los patos que vuelan, debe mover la mira del arma utilizando las casillas de entrada para el valor de  $h$  y  $k$ :  

4. Una vez tenga cada pato apuntado con el arma, escriba las ecuaciones que se muestran en la vista algebraica: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_
5. Explique ¿cómo determinó los valores que debía escribir en las casillas de entrada para  $h$  y  $k$ ?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Figura 6: guía didáctica para el Nivel 3 del juego

Por otra parte, se brindará una actividad de evaluación sumativa donde el estudiante, utilizando la aplicación, pueda darles solución a los diferentes ejercicios planteados, considerando niveles de dificultad que le permitan lograr las habilidades planteadas al inicio de la unidad didáctica. Esto sumado a la evaluación del trabajo cotidiano y la respectiva realimentación de estos dos documentos de guía serán los indicios que tendrá el profesor del avance en el desarrollo de habilidades planteadas en la clase.

## REFLEXIONES FINALES Y CONCLUSIONES

En este artículo presentamos los detalles del planeamiento, formulación y expectativas de la implementación de una unidad didáctica con GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica mediante la gamificación, específicamente en el tema de la ecuación de la circunferencia.

La unidad didáctica ha sido presentada a dos grupos de profesores en ejercicio y profesores en formación, los mismos han dado importante realimentación al applet de GeoGebra, tanto en la parte lúdica o de diseño del juego como en lo que subyace al alcance del contenido matemático. Los comentarios y recomendaciones dadas por los participantes en los talleres de validación de expertos para la unidad didáctica ya fueron implementados, pero se sigue en construcción y mejora permanente.

Este tipo de investigaciones son necesarias para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes y las experiencias docentes en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática tanto en secundaria como en nivel superior.

## REFERENCIAS

- Ahumada, P. (2005). La evaluación autentica: un sistema para la obtención de evidencias y vivencias de los aprendizajes. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*, 45, 11-24.
- Coronel, M. y Curotto, M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 7(2), 463.
- Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *Int J Comput Math Learning*, 13, 135-157. DOI 10.1007/s10758-008-9130-x
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de estudio de matemáticas*. Costa Rica: Autor.
- Mora, F., Pizarro, E. y Ramírez, D. (2016). Experiencia docente en la enseñanza de la probabilidad por habilidades matemáticas en décimo año. En M. Murillo (ed.), *Memorias 10 Festival internacional de matemática (73-79)*. Limón, Costa Rica.
- Torres-Toukoumidis, A. y Romero-Rodríguez, L. M. (2018). Aprender jugando. La gamificación en el aula. En R. García-Ruiz, A. Pérez-Rodríguez y Á. Torres (eds.), *Educación para los nuevos medios* (pp. 61-72). Quito, Ecuador: Editorial Universitaria Abya-Yala.

# AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VISUAL EN EL CONTEXTO DE UN CURSO INICIAL EN EDUCACIÓN SUPERIOR

**Ángela Sánchez**

*Universidad Antonio Nariño*

[angelasanchezossa@gmail.com](mailto:angelasanchezossa@gmail.com)

Se presentan los resultados parciales de una investigación doctoral que pretende continuar avanzado en la caracterización del pensamiento visual en matemáticas. Se desarrolla con estudiantes de primer año de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, en el marco de un curso de solución de problemas matemáticos, donde se abordan algunas cuestiones básicas sobre geometría.

## PERTINENCIA Y ACTUALIDAD

Los estudios sobre visualización, pensamiento visual, razonamiento espacial, entre otros, han tomado renovadas fuerzas y en la actualidad han ampliado sus campos de estudio a la utilización de nuevos *softwares*, la realidad aumentada y las oportunidades de trabajar con imágenes en 3D.

La pertinencia de la investigación, cuyo avance se presenta aquí, se evidencia en los trabajos que se vienen presentando en los eventos de educación matemática, como ICME, CERME, PME, en las reuniones de RELME, y CIAEM, entre otros. En estos espacios académicos crecen los estudios y reflexiones profundas sobre nuevas estrategias didácticas y epistémicas para abordar algunos contenidos de la matemática universitaria y particularmente de la geometría.

En Suramérica desde hace tres años se vienen desarrollando las Jornadas de Pensamiento Visual en lo Matemático, con participación de universidades e investigadores de Chile, Brasil y Colombia, entre otros, interesados en continuar comprendiendo cómo se generan los procesos de pensamiento y la comprensión de los objetos y procesos matemáticos.

Es de resaltar que diversos autores consideran que la enseñanza aprendizaje de la matemática universitaria, a través de la resolución de problemas, crea, potencia y desarrolla el pensamiento matemático, por lo cual el uso de herramientas heurísticas, procesos de visualización matemática y, particularmente, del pensamiento visual puede contribuir a este propósito de manera significativa.

Sánchez, Á. (2024). Avances en la caracterización del pensamiento visual en el contexto de un curso inicial en educación superior. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 217-224. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## PROBLEMA, OBJETO Y OBJETIVOS DE ESTUDIO

El objeto de estudio es el proceso de pensamiento visual en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas universitarias, asumiendo como problema de investigación ¿cómo caracterizar el pensamiento visual manifestado por los estudiantes de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño?

Como objetivo general se ha propuesto avanzar en la caracterización del pensamiento visual manifestado por los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño. Para cumplirlo se han propuesto tres objetivos específicos: (i) Analizar el resultado que genera el uso de problemas retadores que desarrollan el pensamiento visual, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática universitaria. (ii) Fundamentar teóricamente las delimitaciones y características del pensamiento visual. (iii) Validar la importancia de potenciar el pensamiento visual en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática universitaria.

## ESTADO DEL ARTE

El estado del arte se ha organizado en cinco secciones que recogen investigaciones sobre pensamiento matemático, en particular sobre pensamiento visual, publicadas en congresos, eventos y reuniones; sobre pensamiento visual en la educación. La revisión recoge referencias de cualquier nivel de educación como quiera que se ha encontrado una nutrida fuente de información en niveles de educación básica.

También se han consultado investigaciones sobre el proceso de pensamiento matemático y en particular del pensamiento visual a través de la resolución de problemas en el ámbito universitario, en contextos diferentes al nivel universitario y, en Colombia.

El estado del arte es una importante fuente de discusión y reflexión sobre el uso indistinto que algunos autores otorgan a los términos visualización y pensamiento visual, y que constituye un aspecto importante por delimitar en la tarea de caracterizar el pensamiento visual. Así mismo, se percibe, gracias a las investigaciones consultadas, que los estudios sobre pensamiento visual están fuertemente relacionados con el pensamiento espacial y el pensamiento geométrico, y hacia los últimos años, con las herramientas que proveen la geometría dinámica y la realidad aumentada.

## MARCO TEÓRICO

El marco teórico de la investigación se ha organizado en seis secciones que abordan consideraciones teóricas para la caracterización del pensamiento matemático, y la fundamentación sobre lo que se busca en el curso de solución de problemas matemáticos de la Universidad Antonio Nariño. Se incluye una propuesta de delimitación entre visualización y pensamiento visual, así como algunos referentes teóricos sobre las representaciones, la memoria, la percepción, la intuición y la imaginación.

Como diversos autores lo han expuesto, la evolución del pensamiento y del conocimiento está relacionada con la evolución del lenguaje y el desarrollo social. Aunque el pensamiento como proceso, de manera biológica, corresponde al sujeto individual, encuentra vías de comunicación y se nutre de la construcción colectiva social. En esta investigación, considerando los aportes de Reyes-Santander (2012), Harel (2009), Anzola y Falk de Losada (2017), entre otros, se entiende por caracterizar el pensamiento visual, la identificación y definición de los atributos que describen y distinguen de otro tipo de pensamiento, las formas de pensar visual en matemáticas y que son externalizadas a través de las acciones que desarrollan los estudiantes.

### Discusiones sobre visualización y pensamiento visual

Si bien el término pensamiento visual ha estado más relacionado con las artes, con la geometría o el razonamiento espacial, y para algunos autores se vincula de manera indistinta con la visualización, para esta investigación ha sido fundamental encontrar esos atributos diferenciadores que permiten avanzar en su caracterización.

Según Arnheim (1979, 1986) el pensamiento visual está asociado con la percepción; de hecho, para este autor, la percepción visual es pensamiento visual, y aunque su postura proviene del arte, ha sido fundamental para generar las discusiones iniciales filosóficas, epistemológicas y hasta didácticas sobre la comprensión del pensamiento visual y su importancia en la educación. Urchegui (2015), por otro lado, emplea el término pensamiento visual desde el ámbito de los procesos cognitivos que se realizan sobre información visual, mientras que Arcavi (1999), Clements y Battista (1992), Pirie y Kieren (1994), Duval (1999), Giaquinto (2007), Radford (1999) Lowrie, Resnick, Harris y Logan (2020),

entre otros, le conceden un lugar importante en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En esta investigación se concibe el pensamiento visual, particularmente en la educación matemática, como un proceso cognitivo, que implica actos mentales particulares y repetitivos asociados a las representaciones de lo que los estudiantes imaginan, ven, perciben y saben, junto con los cambios estructurales de los objetos y conceptos matemáticos que se generan para la resolución de problemas. El término visualizar, por otra parte, se concibe como una representación parcial, que genera una interpretación parcial del objeto o concepto matemático.

La potencialidad del pensamiento visual ha tenido un recorrido de altos y bajos, no obstante, juega un papel importante como herramienta heurística, como proceso que permite analizar, transformar y generar estructuras matemáticas, y como medio para reflejar las representaciones internas.

### **De las representaciones, la memoria, la intuición, la percepción y la imaginación**

Arnheim (1986) sitúa las representaciones en diferentes niveles de abstracción que describen la experiencia, pero además, las relaciona con cualidades visuales que pueden ser completas en cualquiera de esos niveles. En la educación matemática las representaciones son asumidas desde diferentes acepciones, como artefactos, como productos, como procesos (Lowrie et al., 2020) y como propulsores de ideas (Reyes-Santander, 2012), cuya importancia no recae en ellas mismas, sino en la fuerza de las conexiones entre diferentes sistemas de representación, así como en las posibilidades de manipulación, traducción y flexibilidad de transformación.

De otra parte, las investigaciones consultadas le conceden un papel importante, en mayor o menor medida a la memoria, como quiera que esta almacena la información que permite la construcción de representaciones. En la investigación se presenta un resumen sobre los tipos de representaciones identificadas, algunas distinciones sobre los tipos de memoria, y su contribución a la resolución de problemas retadores.

A la percepción, diferentes disertaciones le conceden un lugar preponderante para la interpretación de los objetos y conceptos matemáticos, pero también la

consideran como la posible causante de problemas en matemáticas, dado que permite el reconocimiento de propiedades puramente cualitativas. A la intuición por otra parte se le considera relevante para el pensamiento visual en la medida en que es fuente primaria de captación de ideas, mientras que la imaginación contribuye a potencializar el pensamiento creativo, tan necesario en la resolución de problemas retadores.

## METODOLOGÍA

La investigación es de corte cualitativo hermenéutico, que se enmarca en un paradigma socio constructivista, de comprensión y permanente contraste entre la teoría y la práctica, bajo el método de investigación acción. Se pretende avanzar en la caracterización del pensamiento visual, a través de la aplicación de un sistema de actividades con problemas no rutinarios en el nivel de educación superior.

La muestra está conformada por cinco estudiantes de primer año de ingeniería, de la Universidad Antonio Nariño en Neiva, participantes de un curso de solución de problemas matemáticos, donde se abordan los contenidos de teoría de números, geometría, conteo, entre otros. Cada actividad contiene problemas no rutinarios, que pueden ser verbales y no verbales. Los estudiantes disponen de dos horas para el desarrollo de cada actividad.

En la triangulación de la información se han contemplado tres fases, el acercamiento con expertos, la fase de exploración y, la fase de delimitación y avances en la caracterización. Se han aplicado dos guías con contenido geométrico, que contienen problemas de agrimensura, volumen y visualización de objetos en 2D y 3D.

## AVANCES EN LA DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y PRIMERAS

### CONCLUSIONES

Se presentan en este documento algunos resultados de la investigación con base en el desarrollo de la “Guía 2. Geometría”, específicamente acerca del primer problema. La actividad se llevó a cabo, de manera presencial. En el problema de agrimensura, los estudiantes debían determinar el valor del área del bosque (de color verde), determinar los metros de alambre de púa para cercarlo y finalmente representar la misma área en el interior de la cuadrícula dada (véase la figura 1).

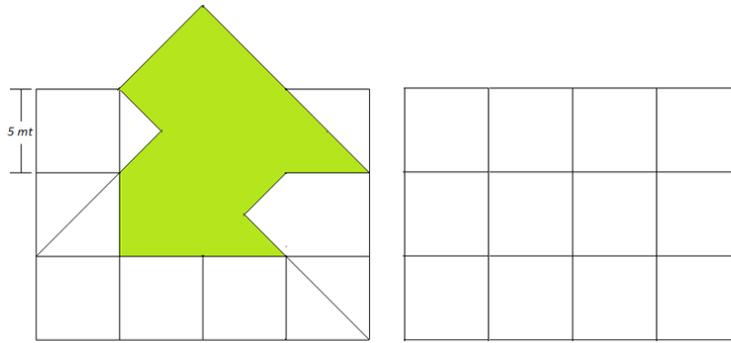


Figura 1: problema de agrimensura

Para abordar el problema, los estudiantes recurrieron a la inspección por descomposición y complementación de objetos, como se evidencia en la figura 2.

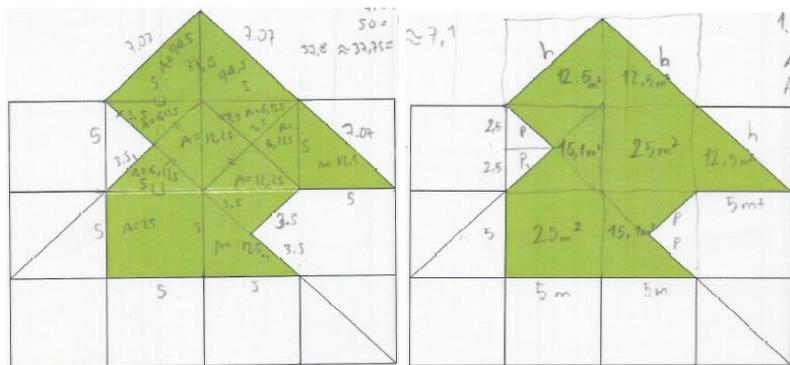


Figura 2: ejemplo de inspección por descomposición

Al hacer la descomposición o complementación de objetos, los estudiantes buscan representaciones en réplica o por similitud, como heurística para la comprensión del problema, lo que les permite identificar cuadrados de área  $25\text{cm}^2$ . Uno de los estudiantes emplea la cuadrícula en limpio, para ir sombreado el área de las regiones que va inspeccionando, lo que le permite dar respuesta inmediata a las preguntas uno y tres.

En la figura 3, se ven las representaciones generadas por los estudiantes. En la primera, se observa el mismo contorno de la imagen del bosque, en réplica, pero sin identificar el área. En la imagen del centro, el estudiante sombrea los cuadrados que representan el área dada, indistintamente del contorno y, en la tercera imagen, el estudiante sombrea los cuadrados, sin embargo, no logra representar la misma área.

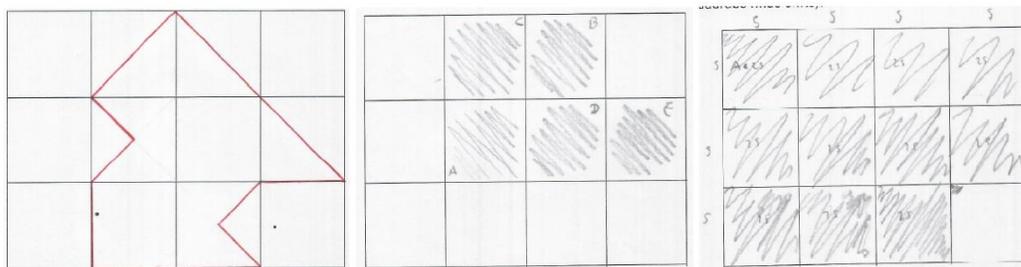


Figura 3: áreas generadas por los estudiantes

Los problemas con representaciones visuales generan gran interés para los estudiantes, quienes tienen la posibilidad de explorar caminos haciendo diversas descomposiciones, movimientos, numeraciones y coloraciones. En el proceso de inspección contrastan ideas intuitivas entre compañeros, pero finalmente recurren a sus conocimientos previos sobre área de objetos geométricos.

La aplicación de la actividad permite valorar la importancia que tiene la percepción, la intuición, la visualización y la imaginación, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, a través de problemas retadores.

## REFERENCIAS

- Anzola, J. C. y Falk de Losada, M. (2017). Avances en la caracterización del pensamiento combinatorio. *Acta simposio de matemáticas y educación matemática* (n.º 2, vol. 4, 76-86). Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.
- Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En F. Hitt y M. Santos (eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-80). Columbus: OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. Obtenido de <https://eric.ed.gov/?q=ED433998>
- Arnheim, R. (1979). *Arte y percepción visual*. Barcelona, España: Paidós.
- Arnheim, R. (1986). *El pensamiento visual*. Barcelona, España: Paidós.
- Clements, D. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420-464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International*

*Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Columbus: OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Harel, G. (2009). *DNR-Based Instruction in mathematics as a conceptual framework*. En B. Sriraman y L. English (eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 343-367). Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_34)
- Lowrie, T., Resnick, I., Harris, D. y Logan, T. (2020). In search of the mechanisms that enable transfer from spatial reasoning to mathematics understanding. *Mathematics Education Research Journal* 32, 175-188.
- Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2, 3), 165-190.
- Radford, L. (1999). Rethinking representations. En F. Hitt y M. Santos (eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 147-150). Columbus: OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. Obtenido de <https://eric.ed.gov/?q=ED433998>
- Reyes-Santander, P. (2012). Caracterización del pensamiento matemático – Escenarios con estudiantes universitarios y de liceo utilizando temas de la teoría de grupos. Tesis de doctorado, Universidad de Augsburgo, Augsburgo, Alemania.
- Sua, C., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3d y realidad aumentada: alineando puntos en el espacio. En P. Diago, D. Yáñez, M. González-Astudillo y D. Carrillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579-586). Valencia, España: SEIEM. Recuperado 2023/02/25, de <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>
- Urchequi, P. (2015). El pensamiento visual en la formación del profesorado: análisis de los componentes del pensamiento viso-espacial y su importancia en la formación de los docentes de educación infantil y primaria. Tesis de doctorado, Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

# ESPECIALIZACIÓN DE LOS ARGUMENTOS DE ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO AL USAR GEOGEBRA EN TAREAS DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

**Javier Varela, Cristian Ávila y Claudia Vargas**

*Universidad Pedagógica Nacional*

[dma\\_javarelal360@pedagogica.edu.co](mailto:dma_javarelal360@pedagogica.edu.co), [cdavilar@upn.edu.co](mailto:cdavilar@upn.edu.co), [cmvargasg@pedagogica.edu.co](mailto:cmvargasg@pedagogica.edu.co)

Presentamos los adelantos de nuestra investigación situada en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Como objetivo nos propusimos especializar los argumentos inductivos de los estudiantes del colegio en el que uno de nosotros trabaja. Para caracterizar la especialización construimos unos niveles en relación con los diferentes elementos estructurales de un argumento inductivo a partir del modelo de Toulmin. Aquí damos a conocer y ejemplificamos esos niveles de especialización.

## INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación surge al observar a través de varios registros (pruebas internas institucionales, pruebas Saber y pruebas empíricas) los bajos niveles de argumentación de los estudiantes de grado décimo del colegio en el que uno de nosotros trabaja. Además, observamos que en geometría presentaban mayor dificultad. Los bajos niveles de argumentación de los estudiantes pueden deberse a que pocas veces están inmersos en actividades que permitan la producción de argumentos. Lin (2018) plantea que los estudiantes no están acostumbrados a argumentar, ya que en muchas ocasiones no se les proporcionan actividades atractivas para incitarlos a argumentar.

En busca de una vía para dar solución a esta problemática formulamos un conjunto de tareas, diseñadas en GeoGebra, cuyo propósito es contribuir a la especialización –entendida como aumento en la calidad– de los argumentos inductivos de un grupo de estudiantes de grado décimo. Las tareas diseñadas –relativas al objeto matemático razones trigonométricas– se proponen en el marco de una investigación que busca caracterizar los niveles de especialización de los argumentos de estos estudiantes, utilizando unas categorías diseñadas por nosotros. En este documento presentamos esas categorías y ejemplificamos su uso.

Varela, J., Ávila, C. y Vargas, C. (2024). Especialización de los argumentos de estudiantes de grado décimo al usar GeoGebra en tareas de razones trigonométricas. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 225-232. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## MARCO DE REFERENCIA

El marco de referencia que sustenta nuestra investigación está dividido en tres partes: en la primera, presentamos una conceptualización sobre argumentación, argumento y argumento inductivo; en la segunda, a partir de tal conceptualización hacemos una propuesta sobre la especialización de los argumentos inductivos; en la tercera, explicitamos la aproximación matemática utilizada para hacer el tratamiento de las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos.

### Argumento inductivo

La definición que adoptamos de argumento es la propuesta por Molina *et al.* (2024):

Consideramos *argumento* como una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La *aserción* se presenta de una de tres maneras: como una proposición (esto es, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; como una oración en la que se plantea una postura; o como una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea expuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. Las *razones* se pueden presentar como oraciones (sean o no proposiciones) o como acciones. (p. 157)

La anterior definición se relaciona con lo que proponen Pedemonte (2002) y Knipping y Reid (2015) quienes establecen las características estructurales del argumento a partir del modelo de Toulmin (2007). Un argumento presenta la siguiente estructura ternaria: la *aserción* (A), que corresponde a la proposición, enunciado o acción del interlocutor y de la que se puede determinar su valor de verdad; el *dato* (D), que son afirmaciones que justifican A; la *garantía* (G), que autoriza el paso entre D y A (véase figura 1).

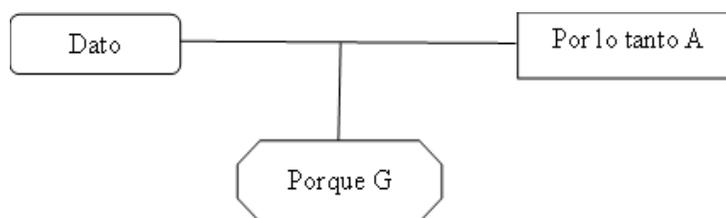


Figura 1: estructura de un argumento en el modelo de Toulmin (2007)

Respecto a argumento inductivo, Molina et al. (2024) indican que un argumento simple inductivo puede ser enunciado de la siguiente forma:

Los elementos de  $A$  tienen el atributo  $p$ , algunos elementos de  $A$  tienen el atributo  $q$ , de otros elementos de  $A$ , no se sabe si tienen el atributo  $q$ , por lo tanto, al menos otro elemento de  $A$  también tiene el atributo  $q$  puesto que los elementos de  $A$  tienen el atributo  $q$ . (p. 162)

La estructura de un argumento inductivo, en el modelo de Toulmin, se representa en la figura 2. En este tipo de argumento se infiere tanto la aserción como la garantía; a esta la denominamos patrón de generalidad.

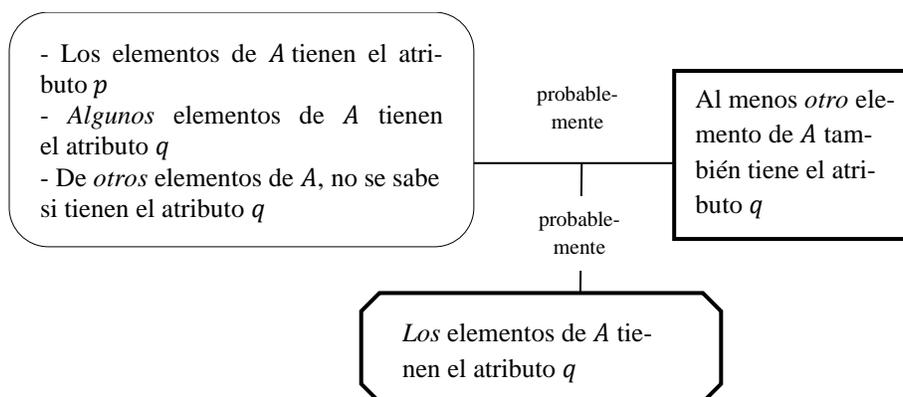


Figura 2: esquema de un argumento inductivo (tomado de Molina *et al.* (2024, p. 162))

## Especialización de los argumentos

En nuestra búsqueda de literatura especializada asumimos la postura de *Bridging Math Practices Math-Science Partnership Grant* (2015), para quienes la calidad de un argumento matemático está condicionada por la veracidad o fuerza de la conclusión presentada, dejando poco margen para la generación de refutaciones, y en el caso de que surjan, el argumento debe contar con los soportes de la garantía que permitan disiparlas. Este conjunto de características nos permite definir la especialización de los argumentos como el aumento en la calidad de los argumentos que son construidos en la argumentación. Para definir argumento inductivo de calidad, tomamos la postura de Iacaona (2018) en relación con la fuerza de un argumento producto de un proceso inductivo:

Decir que una proposición es resultado de una inducción significa que las proposiciones de las cuales se infiere proporcionan razones que no son decisivas para aceptarla; esto es que su verdad está garantizada de una u otra forma, pero no completamente, por la verdad de las proposiciones de las cuales se infiere

[...][L]a verdad de las proposiciones iniciales hace más probable la verdad de la proposición inferida. A un argumento con la inferencia legítima en el sentido inductivo se le llama *fuerte*. El criterio inductivo de fuerza puede ser formulado como sigue: “Un argumento es fuerte si y solo si es improbable que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa”. (p. 67)

Lo anterior nos permite establecer que un argumento inductivo de calidad es uno en el que es altamente probable que asumiendo unas premisas como verdaderas (dato), lo inferido (garantía y aserción) sea verdadero. Por lo tanto, los niveles de calidad del argumento inductivo deberán indicar qué tan probable o no es que se dé esta relación entre las premisas y lo que se infiere.

La tabla 1 reporta las categorías propuestas para caracterizar el nivel de especialización de los argumentos inductivos de nuestros estudiantes.

<b>Dato</b>
Nivel 1: No se logra identificar un conjunto referencial, ni un atributo que cumplan algunos de los elementos del conjunto. Nivel 2: Se reconoce un conjunto referencial, pero no se logra identificar un atributo adicional que cumplan algunos elementos del conjunto. Nivel 3: No se reconoce el conjunto referencial, pero se identifica el atributo adicional que cumplan algunos de los elementos del conjunto. Nivel 4: Se reconoce el conjunto referencial y el atributo adicional que cumplan algunos elementos del conjunto
<b>Patrón de generalidad</b>
Nivel 1: No se propone un patrón de generalidad. Nivel 2: Se reporta el patrón de generalidad como una proposición simple. Nivel 3: Se reporta como patrón de generalidad una conjunción conformada por el atributo que define al conjunto referencial y el atributo descubierto. Nivel 4: Se reporta como patrón de generalidad una relación de dependencia entre el conjunto referencial descubierto y el atributo descubierto.
<b>Casos observados para formular el patrón de generalidad</b>
Nivel 1: El patrón de generalidad se propone luego de observar un solo caso. Nivel 2: El patrón de generalidad se propone a partir del estudio de algunos elementos del conjunto referencial, que no son ejemplos genéricos de este. Nivel 3: El patrón de generalidad se propone a partir del estudio de algunos elementos del conjunto referencial, que son ejemplos genéricos de este.

Nivel 4: El patrón de generalidad se propone a partir del estudio de algunos elementos del conjunto referencial, que son ejemplos genéricos de este y ha sido comprobado mediante la búsqueda de un contraejemplo.
<b>Aserción</b>
Nivel 1: En la expresión discursiva no se presenta aserción.
Nivel 2: La aserción propuesta no expone la existencia de por lo menos un elemento del conjunto referencial que cumpla el atributo inferido.
Nivel 3: La aserción propuesta expone la existencia de por lo menos un elemento del conjunto referencial, pero que no cumple con el atributo inferido.
Nivel 4: La aserción propuesta expone la existencia de por lo menos un elemento del conjunto referencial que cumpla el atributo inferido.

Tabla 1: niveles de especialización de argumentos inductivos

## Las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos

En triángulos rectángulos con ángulos agudos congruentes se tiene que sus lados correspondientes son proporcionales por el criterio de semejanza ángulo - ángulo, por lo cual las razones seno, coseno y tangente para un ángulo agudo no dependen del tamaño del triángulo (Moise y Downs, 1986). Considerando la relación anterior, es posible construir la definición de razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos. Iniciando en la proporcionalidad de los lados correspondientes y finalizando en la definición de las razones en triángulos rectángulos semejantes.

## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La estrategia metodológica que empleamos es el experimento de enseñanza, que en términos de Camargo (2021) consiste en el diseño, la implementación y la evaluación de una secuencia de tareas organizada, con el objetivo de corroborar una hipótesis sobre un aprendizaje específico. La autora propone algunas fases para esta estrategia. En primer lugar, una fundamentación sobre aprendizaje y sobre la construcción conceptual de un contenido específico. En esta fase, además de la elaboración de nuestro marco de referencia, construimos los niveles expuestos en la tabla 1, como un elemento que nos permitiera no solo caracterizar la especialización de los argumentos, sino también que nos brindara un panorama sobre las características que debían incluirse en las tareas de la secuencia. La segunda fase propuesta por Camargo es formular una conjetura sobre qué enseñar y cómo. En nuestro caso, la hipótesis predice que es posible

especializar los argumentos inductivos de un grupo de estudiantes de grado décimo por medio de una secuencia de tareas, desarrollada con GeoGebra, enfocada en la formulación de argumentos, mediante la explicitación de cada uno de sus elementos estructurales.

La tercera fase de un *experimento de enseñanza* es la planificación de una secuencia de enseñanza. La secuencia de tareas propuesta consta de 6 tareas diseñadas en GeoGebra. En las tareas se busca que los estudiantes propongan argumentos inductivos relacionados con el objeto matemático de estudio; para esto limitamos algunas de las herramientas de la aplicación para evitar distracciones. Además, en cada tarea se busca hacer énfasis especial en cada uno de los componentes presentados en la tabla 1. La secuencia de tareas (véase tabla 2) será desarrollada por estudiantes de grado décimo del colegio Bicentenario de la Independencia, ubicado en la localidad de Bosa en la ciudad de Bogotá. Los ejemplos que se reportan en el siguiente apartado se obtuvieron al realizar una prueba piloto de la primera tarea de esa secuencia. Las tareas de la secuencia cuentan con cinco fases. En la primera fase se pretende que el estudiante identifique el conjunto referencial y su atributo definitorio. En la fase dos se espera que el estudiante encuentre el atributo adicional que cumplen algunos elementos. La tercera fase busca que el estudiante construya el patrón de generalidad y en la fase cuatro se propone al estudiante escribir lo realizado durante toda la tarea y de esta manera permitirle construir el argumento inductivo.

Tarea	Descripción general y propósito respecto al contenido geométrico
1.	La tarea se centra en el criterio de semejanza lado, lado, lado. Para esta tarea, el estudiante debe realizar la exploración guiada de varios casos para proponer el patrón de generalidad.
2.	Esta tarea se enfoca en el criterio de semejanza ángulo-ángulo. El propósito de esta tarea es que el estudiante exprese el patrón de generalidad como una relación de dependencia. Se propone una plantilla discursiva en la que se deben llenar espacios en blanco a partir de lo encontrado en la tarea. Además, no se propone una cantidad específica de casos para que el estudiante explore.
3.	En esta tarea se exploran proporciones entre lados correspondientes de triángulos semejantes en relación con las razones trigonométricas. El objetivo de la tarea es que los estudiantes identifiquen razones y proporciones asociadas al seno, coseno y tangente. Para esta tarea se propone el apoyo de una plantilla discursiva en la formulación del patrón de generalidad y la aserción.

4.	Para esta tarea se aborda la invariabilidad de la razón seno desde triángulos rectángulos semejantes, construyendo su definición. Los estudiantes deben generar un argumento apoyándose de plantillas discursivas.
5.	En esta tarea se construye la definición de la razón coseno. Se debe generar un argumento, sin el apoyo de platillas discursivas por parte de los estudiantes.
6.	Para esta última tarea se construye la definición de la razón tangente. Los estudiantes crean una expresión discursiva en la cual se evidencia un argumento.

Tabla 2: descripción de la secuencia de tareas

Hasta el momento no se han desarrollado las otras fases propuestas por Cargano (2021): experimentación de las tareas de la secuencia, análisis intercalado de la experimentación, ajustes a la secuencia, análisis retrospectivo y producción de resultados.

### EJEMPLO DE USO DE LOS NIVELES DE ESPECIALIZACIÓN

Presentamos un análisis del argumento que construyeron dos estudiantes en el pilotaje de una tarea, a la luz de los niveles de especialización de la tabla 1. En la primera fase de la tarea, se presentan 5 aplicativos cada uno con una pareja de triángulos semejantes y las razones de los lados correspondientes con su respectivo valor numérico. Se habilitaron solo dos herramientas de GeoGebra (Medir ángulos y Arrastre) y se solicitó a los estudiantes encontrar y luego escribir una característica en común entre los dos triángulos, es decir el atributo adicional que menciona la definición de argumento inductivo. La segunda fase se enfoca en que los estudiantes hagan explícito el Dato, la Garantía y la Aserción apoyándose en plantillas discursivas. La tabla 3 reporta la respuesta que una pareja de estudiantes dio al completar la plantilla.

**Al iniciar la solución del problema sabíamos que (dato):** teníamos dos triángulos que son proporcionales (proporcionales es cuando dos lados se dividen entre sí y todos los lados son iguales)

**Logramos identificar en cada uno de los casos que los triángulos tienen la siguiente característica en común (patrón de generalidad):** tienen ángulos iguales en cada uno de los triángulos.

**A partir de lo anterior puedo concluir qué:** todos los triángulos son semejantes.

Tabla 3: respuestas de estudiantes a la segunda fase de la tarea de pilotaje

Logramos establecer que, para el *dato*, los estudiantes identifican los dos triángulos presentados y la proporcionalidad de los lados correspondientes, pero en lo escrito no exponen el atributo adicional  $q$  (ángulos correspondientes congruentes), ubicando este componente en el Nivel 3. Respecto al *patrón de generalidad*, la expresión que reportan los estudiantes es proposición simple, por lo cual lo ubicamos en el Nivel 1. Finalmente, la aserción no expone la inferencia de un elemento adicional del conjunto referencial que cumpla el atributo  $q$ , por lo tanto, este componente para este argumento se ubica en el Nivel 1. Con respecto a los casos observados, en la solución de la tarea, los estudiantes, luego del segundo caso, empiezan a buscar contraejemplos a la propiedad hallada, lo cual nos permite ubicar el argumento en el Nivel 4 de especialidad.

## REFERENCIAS

- Bridging Math Practices Math-Science Partnership Grant* (2015). *Student work sample argumentation resource packet*. University of Connecticut. Recuperado de <https://bridges.education.uconn.edu>
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional y Editorial de Universidad de Antioquia.
- Iacaona, A. (2018). *La argumentación*. México: Universidad Autónoma de México.
- Knipping, C. y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping y Norma Presmeg (eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Dordrecht: Springer.
- Lin, P. (2018). The development of students' mathematical argumentation in a primary classroom. *Educação & Realidade*, 43(3), 1171–1192. <https://doi.org/10.1590/2175-623676887>
- Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. Addison Wesley Iberoamericana S.A.
- Molina, Ó., Camargo, L., Vargas, C., Samper, C. y Perry, P. (2024). Una propuesta para la formación de profesores de matemáticas: el caso de la argumentación matemática. *RIME*, 1(1), 151-185.
- Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Tesis doctoral, Université Joseph-Fourier, - Grenoble, Francia.
- Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Península.



Encuentro de  
**GEOMETRÍA**  
y sus **APLICACIONES**

**19 al 21 de junio de 2024**

**Pósteres**





# PROPUESTA DIDÁCTICA APLICADA EN EL COLEGIO NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO DE CALI PARA LA INTEGRACIÓN DE LA GEOMETRÍA Y EL ARTE EN LA ENSEÑANZA

**Ariel Cruz, Diego Olave y Martha Madroño**

*Colegio Nuestra Señora del Rosario de Cali*

[ariel.cruz@correounivalle.edu.co](mailto:ariel.cruz@correounivalle.edu.co), [diego.olave2020@gmail.com](mailto:diego.olave2020@gmail.com), [mcmjunior30001@hotmail.com](mailto:mcmjunior30001@hotmail.com)

En la ponencia correspondiente a este póster se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de un conjunto de actividades diseñadas para la enseñanza de la geometría y su relación con el arte. La propuesta se desarrolló en un colegio privado de la ciudad de Cali (Colombia), en el marco de la celebración del día internacional del número  $\pi$ , en la que participó toda la comunidad educativa de la institución. Al finalizar la actividad, se realizó un balance con la recopilación y discusión de opiniones tanto de maestros como de estudiantes y acudientes, obteniendo importantes resultados de la implementación. Por lo tanto, como profesores-investigadores en práctica nos interesa indagar en estrategias de enseñanza-aprendizaje de la geometría en contextos de gran interés para el estudiante.

## FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

A lo largo de la historia se han generado múltiples creencias y concepciones que presentan las matemáticas como una esfera del conocimiento que se encuentra alejada de lo tangible y de los objetos con los que nos relacionamos día a día. Por lo tanto, se ha convertido en un reto para la educación matemática que los profesores rescaten en las clases, la conexión entre los conceptos matemáticos y lo que el estudiante percibe y con lo que interactúa en su entorno. Además, mostrar cómo las matemáticas han sido y son parte fundamental del desarrollo cultural, como lo señala Coronado (1998) en su artículo “Las matemáticas en el arte, la música y la literatura”, donde destaca la participación de las matemáticas en estas tres esferas y cómo su desarrollo en varios momentos de la historia se ha dado gracias a la aplicación de varios conceptos. Es por esto por lo que varios autores como Hernández y Villalba (2001) nos invitan a ampliar la investigación y discusión acerca de diferentes perspectivas en la enseñanza de las matemáticas.

Cruz, A., Olave, D. y Madroño, M. (2024). Propuesta didáctica aplicada en el colegio Nuestra Señora del Rosario de Cali para la integración de la geometría y el arte en la enseñanza. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 26, 235-236. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## PRESENTACIÓN DE LA PROPUESTA

El día 13 de marzo de 2024, por motivo de la celebración del día internacional del número  $\pi$ , los profesores del área de educación matemática del colegio Nuestra señora del Rosario de Cali organizaron, en conjunto con la comunidad académica, diferentes actividades donde se pudo mostrar la cercanía de las matemáticas con aspectos de gran interés y motivación para los estudiantes, como lo son la pintura, la música, la fotografía y el juego. Durante la exposición, los estudiantes tuvieron la posibilidad de observar el trabajo de sus compañeros y aprender de diferentes conceptos e ideas. Por ejemplo, se presentaron técnicas geométricas para tomar una buena foto, utilizando la cámara del celular para tomar fotos con ángulos, enfoques y perspectivas diferentes. Por otro lado, mediante la construcción de varios artefactos se presentó el significado de los armónicos en la música y su conexión tanto con lo geométrico como con lo aritmético y algebraico. En otras presentaciones como la construcción de un puente con tubos de papel se pudo evidenciar cómo el uso de diferentes estructuras geométricas afecta la resistencia final de la estructura. Para finalizar, con el uso del tangram se mostró la importancia de la geometría en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de perímetro y área de figuras compuestas por polígonos. Todas las actividades tuvieron como finalidad principal que los estudiantes de la institución vieran que las matemáticas se encuentran muy cerca de las cosas que a ellos más les gusta hacer y que ese gusto por ellas, creciera.

## REFERENCIAS

- Coronado, J. P. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias pedagógicas*, 50, 235-244.
- Hernández, V. y Villalba, M. (2001). Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para el estudio ICMI. PMME-UNISON.