

**26.º Encuentro de**  
**GEOMETRÍA**  
**y sus APLICACIONES**

**Resúmenes de  
contribuciones  
de invitados**



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Resúmenes de contribuciones de invitados

En este documento usted puede leer el resumen de cada una de las contribuciones (conferencia o cursillo) de los invitados internacionales o nacionales al 26.º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. Para ver el conjunto de resúmenes, haga clic en los siguientes textos según el caso:

- [Conferencias presenciales invitados internacionales](#)
- [Conferencias virtuales invitados internacionales](#)
- [Conferencias presenciales invitados nacionales](#)
- [Conferencias virtuales invitados nacionales](#)
- [Cursillos presenciales](#)

### Convenciones

Títulos en **fondo naranja** indican contribuciones en Educación Geométrica

Títulos en **fondo amarillo** indican contribuciones en Geometría o áreas afines.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Invitados internacionales

#### Conferencias presenciales

#### Pensamiento Espacial en Acción: la Geometría en Proyectos STEAM

María Teresa Fernández, *Universidad Santiago de Compostela* (España)

se profundiza en el importante papel que desempeña la geometría dentro del marco de las iniciativas STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas). Se ofrecerán ejemplos concretos de proyectos en los que se evidencia cómo se activa el pensamiento espacial y se fomenta la creatividad geométrica. Estos proyectos ilustrarán cómo la geometría no solo es fundamental en la comprensión y aplicación de conceptos científicos y tecnológicos, sino también en la creación de soluciones innovadoras y en la expresión artística. La integración de la geometría de manera efectiva en las iniciativas STEAM enriquece la experiencia educativa y prepara a los estudiantes para los desafíos del mundo actual.

#### Uso de NeoTrie VR en la enseñanza y aprendizaje de la geometría

José Luis Rodríguez, *Universidad de Almería* (España)

El software NeoTrie VR de geometría dinámica en realidad virtual está siendo implementado en diversos niveles educativos. Esta herramienta proporciona a profesores e investigadores una forma de mejorar la comprensión y el razonamiento espacial en diferentes temas de geometría. Su formato de videojuego ha demostrado ser altamente motivador para los estudiantes. En la conferencia, introduciremos brevemente el software y presentaremos algunos resultados interesantes de una experiencia innovadora con estudiantes del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Almería.

#### Geometría, topología, y la física: esperando la próxima revolución

Simon Scott, *King's College London* (Reino Unido)

En esta charla recordaremos cómo con frecuencia avances en la geometría diferencial y la topología han sido acompañados con avances en la física teórica y en avances tecnológicas, y contemplaremos un poquito sobre lo que podría estar porvenir. Ilustraremos esto con ejemplos de estructuras de la matemática que han tenido un papel significativo en este desarrollo.

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Conferencias virtuales

#### Desarrollando el pensamiento geométrico en edades tempranas: Una mirada al diseño de tareas

Ivonne Sandoval, *Universidad Pedagógica Nacional – Cinvestav* (México)

En esta conferencia se retoman algunas de las grandes ideas de geometría para su abordaje en contextos de la educación primaria. Partiendo de una experiencia en México en la que se impulsó el desarrollo del pensamiento geométrico de niños y niñas entre 6 y 8 años de edad a través del libro de texto oficial, se dará cuenta de los retos tanto en el diseño de tareas como en su implementación. Para finalizar, se mostrarán algunas investigaciones encaminadas a posibilitar la construcción de puentes entre resultados de investigación y prácticas en salones de clase, y cómo el intercambio entre investigadores, investigadores en formación, docentes de primaria y directivos posibilitan oportunidades de aprendizaje conjunto.

#### Integración de prácticas geométricas al estudio de lo trigonométrico

Gisela Montiel, *Cinvestav* (México)

En esta conferencia me propongo compartir algunos avances logrados en la línea de investigación sobre la construcción social de conocimiento trigonométrico, en particular, en torno a un programa de investigación que está problematizando la enseñanza y el aprendizaje de la razón trigonométrica. Esta línea se enmarca en la teoría Socioepistemología y dio inicio con un estudio de corte histórico centrado en el análisis de la matemática como actividad humana normada por prácticas sociales. Con investigaciones de diseño, etnográficas y documentales a planes y programas de estudio, así como a libros de texto, el aludido programa ha robustecido uno de sus planteamientos al rediseño del discurso matemático escolar que más ha dirigido la investigación: la integración de la geometría al estudio de la trigonometría.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Invitados nacionales

#### Conferencias presenciales

#### Teoría de representaciones y cálculo de invariantes de espacios homogéneos

Alexander Cardona Guio, *Universidad de los Andes*

Es un hecho conocido que es posible usar herramientas de análisis para calcular invariantes (geométricos y topológicos) de ciertos espacios (variedades, cocientes de grupos de Lie, entre otros). En esta charla abordaremos técnicas recientes que permiten hacer estos cálculos usando una versión discretizada del análisis, basada en la teoría de representaciones de grupos, en el caso de espacios homogéneos. Ilustraremos estas técnicas y resultados volviendo sobre el cálculo de invariantes para esferas de dimensión arbitraria.

#### Lógica y geometría/física: dos nociones naturales

Andrés Villaveces, *Universidad Nacional de Colombia*

Examinaré brevemente dos nociones naturales que enlazan la lógica (y su rama especial, la teoría de modelos) con la geometría (y en algunos casos, la física): (i) La categoricidad en algún cardinal (con una historia ilustre que se remonta a Aristóteles, la categoricidad es una noción esencial en teoría de modelos contemporánea, desde el teorema de Morley. Con múltiples avatares en lógica de primer orden y en varias lógicas no elementales, en el siglo XXI la categoricidad ha sido un hilo conductor en el estudio de varias cuestiones en geometría aritmética y en geometría algebraica. Daré ejemplos de varios autores (Zilber, Bays, Harris, etc.) y una descripción de un análisis reciente de estos temas junto con Baldwin. Describiré una línea que enlaza con la simetría espejo (trabajos con Cruz, Baldwin y Zilber). (ii) La lógica de la probabilidad (en dos variantes debidas a Keisler y a Fajardo) permite describir fenómenos físicos. Describiré algunos ejemplos (trabajo conjunto con Cipagauta) que muestran el poder expresivo de esta lógica, y sus posibles limitaciones (en sus versiones iniciales), al igual que nuevos caminos modelo-teóricos que permiten nuevas visualizaciones de fenómenos de la cuántica.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

Shea Zellweger (1925-2022): creador del alfabeto lógico

Arnold Oostra, *Universidad del Tolima*

La lógica proposicional clásica tiene 16 conectivos binarios, como se observa al definirlos mediante su tabla de verdad. El norteamericano Shea Zellweger inventó una notación completa para este conjunto, llamada Alfabeto Lógico, en la que la tabla de cada conectivo está asociada de forma natural a su signo. Además de estudiar muchas propiedades lógicas, algebraicas y didácticas de su sistema de signos, a lo largo de su vida Zellweger construyó modelos en diferentes dimensiones que explicitan muchas simetrías sorprendentes escondidas en la lógica elemental.

¿Qué es la Geometría?

Carlos Luque, *Universidad Pedagógica Nacional*

En la conferencia se hará una extensión del punto de vista de la geometría euclidiana a otras geometrías y se presentarán algunas aplicaciones.

Formulación y resolución de problemas de geometría con la mediación de sistemas de geometría dinámica

David Benitez, *Universidad del Valle*

En la conferencia se presentarán los resultados de un conjunto de investigaciones educativas centradas en los procesos de formulación y resolución de problemas de geometría, utilizando el software GeoGebra como instrumento mediador. La investigación aborda el diseño de actividades de aprendizaje y las operaciones cognitivas que los estudiantes despliegan al construir y darle seguimiento a conjeturas geométricas en entornos de geometría dinámica. Además, se discutirán los argumentos relacionados con la demostración formal de las proposiciones geométricas. Los resultados evidencian cómo el uso de GeoGebra facilita la visualización y manipulación de objetos geométricos, promoviendo un entendimiento más profundo de los conceptos y mejorando la capacidad de los estudiantes para formular y darle seguimiento a las conjeturas. Se analizarán ejemplos específicos de actividades de aprendizaje diseñadas para este propósito y se presentarán casos de estudio que ilustran las estrategias cognitivas empleadas por los estudiantes. Asimismo, se explorarán las implicaciones de estos hallazgos para la enseñanza de la geometría y se ofrecerán recomendaciones para las proyecciones en la investigación.

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### ¿Excentricidades en algunos libros de geometría de elementos de euclides?

Edgar Alberto Guacaneme Suárez, *Universidad Pedagógica Nacional*

El estudio de los libros de geometría de Elementos de Euclides enfrenta al lector a algunas ideas geométricas que podrían calificarse como excentricidades. Estas, en los primeros cuatro libros, se pueden asociar con acciones o relaciones geométricas aparentemente naturales (v.g., construir, trazar, poner, levantar, caer, trazar, tocar, cortar, subtender) o con acciones aparentemente sofisticadas (v.g., aplicar, comprender, admitir, adaptar). Otras ideas insólitas se expresan a través de abstrusas definiciones (v.g., II-1; III-7; III-9 o III-11) o sorprendentes proposiciones (v.g., III-16, III-36 y II-14). Todas ellas constituyen una cornucopia de evidencias para, entre otras, aprehender algunos rasgos de la naturaleza de la geometría euclidiana y disponer así de una base a través de la cual contrastar lo que con ella se hace en el ámbito escolar.

### ¿Una recta sin puntos? Una perspectiva alternativa de la Geometría y el Análisis

Francisco Vargas, *Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia*

La visión dominante hoy en día en la Matemática identifica el continuo con los números reales y desde allí aborda las distintas ramas de la Geometría y el Análisis. Presentaremos un modelo para el continuo tal como fue teorizado por C.S. Peirce, en el que la noción de "punto" desaparece, mostrando cómo surgen las nociones fundamentales del cálculo desde una perspectiva infinitesimal (diferente, sin embargo, al análisis no-estándar). Abordaremos finalmente algunas perspectivas didácticas sobre el tema.

### El álgebra lineal en los fundamentos de ChatGPT. Algoritmo word2vec

Germán Combariza, *Universidad Externado de Colombia*

En esta charla, exploraremos los cimientos de la inteligencia artificial desde una perspectiva geométrica. Descubriremos cómo el álgebra lineal sienta las bases para comprender y manipular datos en el contexto de modelos de lenguaje como ChatGPT. Además, nos sumergiremos en el fascinante mundo de Word2Vec, un algoritmo clave en el procesamiento del lenguaje natural. A través de ejemplos y demostraciones, aprenderemos cómo estos conceptos se entrelazan para dar forma a la capacidad de ChatGPT para comprender y generar texto de manera coherente y significativa.

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Una estrategia didáctica para abordar la multiplicación de números reales

Ibeth Marcela Rubio Perilla, *Universidad Nacional de Colombia*

El tema de homotecias se ha incluido en el programa de matemáticas de grado séptimo, aunque usualmente se aborda de manera muy superficial como transformaciones en el plano. La idea de la charla es mostrar cómo se puede aprovechar el isomorfismo entre el grupo multiplicativo de los números reales y el de homotecias del mismo centro bajo composición, para ilustrar y evidenciar las propiedades de la multiplicación de los números reales. Las homotecias pueden ser usadas como una herramienta pedagógica pertinente y motivante para estudiar la multiplicación de los números reales y sus propiedades.

### El conocimiento especializado en la formulación de tareas formativas para el desarrollo del pensamiento espacial en futuros profesores de Educación Básica Primaria

Jenny Patricia Acevedo-Rincón, *Universidad Industrial de Santander*

Esta conferencia permite reconocer elementos conceptuales y metodológicos desde el modelo del conocimiento Especializado del profesor que enseña Matemáticas (Mathematics Teacher Specialized Knowledge) en la selección, adaptación y creación de tareas formativas para los futuros profesores, especialmente en la Educación Básica Primaria, para promover el desarrollo del pensamiento espacial y métrico. Las aproximaciones iniciales registran propuestas centradas en el conocimiento didáctico del contenido (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), enfocando las propuestas de tareas formativas para los profesores de Educación Básica Primaria, basadas en experiencias didácticas con material concreto. Sin embargo, carecen de una adecuada profundización en el Conocimiento disciplinar de las matemáticas: Conocimiento de los tópicos (KoT), Conocimiento de las estructuras matemáticas (KSM) y conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM), dada la generalidad en el tratamiento de la disciplina para Educación inicial y básica, para la formación del futuro profesor, esta conferencia permite visibilizar las necesidades de formación docente frente a las estrategias de apropiación del conocimiento matemático y su didáctica.

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Ambientes categóricos para la topología

José Reinaldo Montañez, *Universidad Nacional de Colombia*

La teoría de categorías aparece como una teoría que unifica el trabajo de las diferentes áreas de la matemática y en particular se ocupa de estudiar los objetos por sus relaciones con los otros más que por estudiarlos interiormente. Para el caso que nos ocupa, se trata de mostrar como algunas categorías como las categorías topológicas y los topos, objetos de estudio en esta exposición, son motivadas desde la topología. Por las relaciones encontradas entre la topología y los dos contextos mencionados, creemos que el trabajo enriquece la topología y a su vez la teoría de categorías.

### TIC o TAC en la resolución de problemas de matemática recreativa

Juddy Amparo Valderrama Moreno, Daniel Moreno Caicedo,

*EDUMAT UIS: Colegio Técnico Vicente Azuero*

La inmersión del uso de la tecnología en la clase de matemática ha permeado el discurso del profesor de matemática y con ello la generación de Prácticas Pedagógicas que superan el nivel de dinamismo y manejo de tecnología. Al facilitar la experimentación se permite la visualización, emerge el razonamiento y se comunica la matemática en un lenguaje propio de la ciencia. En razón, se plantea la actividad matemática de la enseñanza de la Geometría con Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) a partir de la Resolución de Problemas de Matemática Recreativa.

### Prop. I, Lec. X, Lecciones Geométricas de Barrow (1670)

Leonardo Solanilla Chavarro, *Universidad del Tolima*

En esta conferencia se presenta la *Proposición I* de la *Lección X* en las *Lecciones Geométricas* de Barrow (1670). En ella se percibe claramente un método geométrico para encontrar la tangente a una curva construida de cierta manera particular a partir de una curva conocida cualquiera. Además del texto original de Barrow, se muestra que esta proposición es válida en el Cálculo infinitesimal de hoy. También se expone el procedimiento que este matemático inglés utilizó para demostrar dicha proposición. Por último, se señalan algunas particularidades del método de las tangentes de Barrow que hacen que su obra sea de particular interés para la Historia del Análisis matemático.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### El estudio de la Geometría de Descartes para la formación de profesores

Jhon Helver Bello, *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

En esta intervención justifico la hipótesis de que los estudios realizados en el campo de Filosofía de la Práctica Matemática benefician el conocimiento de contenidos matemáticos y didácticos del profesor de matemáticas. Los referentes que utilizan los docentes para aprender matemáticas siguen siendo la presentación axiomática formal, a partir de la cual resulta difícil tener experiencias que permitan la construcción del trabajo del matemático. Quienes trabajan con la idea de práctica ofrecen estudios para entender la constitución de las matemáticas como un proceso cultural, semiótico, histórico y filosófico, que incluye el estudio de herramientas cognitivas que estuvieron en el horizonte de su constitución teórica. La práctica matemática permite consolidar una historia de las matemáticas basada en criterios cognitivos y no en productos. Para ejemplificar estas ideas tomo la historia del método cartesiano y su enseñanza.

### Sobre la compuesta de dos homotecias de centros diferentes

Lorenzo Acosta, *Universidad Nacional de Colombia*

Las transformaciones del plano que transforman rectas en rectas paralelas se llaman dilataciones. Existen dos tipos de dilataciones: aquellas que tienen puntos fijos, llamadas homotecias, y aquellas que no tienen un único punto fijo, llamadas traslaciones. Toda homotecia diferente de la identidad tiene un único punto fijo, llamado el centro de la homotecia. Es fácil ver que las dilataciones constituyen un grupo con la operación de composición y que las traslaciones son un subgrupo normal de este grupo. También es evidente que las homotecias de un mismo centro constituyen un subgrupo del grupo de las dilataciones. Así, la compuesta de dos traslaciones es una traslación, la compuesta de una traslación y una homotecia es, forzosamente, una homotecia y la compuesta de dos homotecias del mismo centro es una homotecia. El propósito de esta charla es mostrar qué pasa cuando se componen dos homotecias de centros diferentes.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Espacios de Banach y la Ley del Paralelogramo

Margot Salas, *Universidad Sergio Arboleda*

La ley del paralelogramo establece que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \forall x, y \in X$ ; lo cual geoméricamente significa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. Dado que la ley del paralelogramo es de carácter bidimensional, ella se traduce en la siguiente caracterización de los espacios de Hilbert. Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si cada uno de sus subespacios bidimensionales es un espacio de Hilbert. De esta forma tenemos que es mucha la información que puede obtenerse acerca de los espacios de Hilbert conociendo la geometría de sus respectivos subespacios bidimensionales. En esta charla, se comenzará discutiendo cómo los espacios de Hilbert pueden ser caracterizados de manera precisa a través del cumplimiento de esta propiedad geométrica. Luego, se examinarán algunas versiones más débiles de la Ley del Paralelogramo que se verifican en ciertos espacios de Banach específicos. Por ejemplo, se analizará el caso de los espacios  $l_p$  de sucesiones, donde si bien no se cumple la ley en su forma original, existen resultados que relacionan propiedades de la norma con variantes atenuadas de dicha ley.

Tarea formativa sobre visualización y visualidad, en una comunidad de aprendizaje y práctica que atiende estudiantes y docentes con diferentes grados de compromiso auditivo

Martha Cecilia Mosquera Urrutia, Diego Fernando Orjuela Garzón, *Universidad Surcolombiana*

Se presentan resultados de un estudio de clase, realizado en una comunidad de aprendizaje y práctica, que atiende el desarrollo del pensamiento matemático con sordos y oyentes; se pudo evidenciar que las personas sordas organizan el mundo lingüístico y enunciativo en un plano visual y que esto incide tanto en los materiales, como en las experiencias que se diseñen para la enseñanza. Esto porque se piensa que las personas sordas tienen desarrollado el pensamiento visual, sin tener en cuenta que el carácter visual es constitutivo de la subjetividad y de la manera en que ellos organizan la realidad y por tanto no les es externo; esto generó la necesidad de caracterizar unos modos de pensamiento específicos de las lenguas de señas.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Curvatura de superficie y singularidades del mapa de Gauss

Mikhail Malakhaltsev, *Universidad de los Andes*

El mapa de Gauss es la aplicación de una superficie en el espacio euclidiano tridimensional a la esfera, asignando a cada punto de la superficie el vector normal unitario en dicho punto. Un punto singular de una aplicación entre dos variedades de la misma dimensión  $n$  es un punto donde la diferencial de esta aplicación tiene rango menor que  $n$ . El teorema de Whitney afirma que una aplicación en posición general entre superficies tiene puntos regulares y puntos singulares de dos tipos: pliegue y cúspide. El objetivo de la charla es explicar el teorema de Whitney y describir el sentido geométrico de los puntos singulares del mapa de Gauss.

### Las cosas simples de los números

Óscar Soto, *Universidad del Nariño*

Miguel de Guzmán, eminente matemático español, fue un seguidor del conocimiento descubierto por los Pitagóricos, fan de ellos, de su exquisito trabajo contemplativo y divulgador de sus resultados. Sería encantador para cualquiera, interesado en el mundo de los números y de las formas, conocer todo lo aprendido por Guzmán. Con seguridad nos sobrecogeríamos de emoción y sorpresa. Con el software de geometría dinámica Cabrí II Plus se hace posible evidenciar algunos resultados sobre números que provienen de la época pitagórica y otros de cierta modernidad o cercanos a nuestros tiempos.

### Construyendo tetraedros con material manipulable y EGD: Un ejemplo de desarrollo de conocimiento geométrico para la enseñanza

Óscar Molina, *Universidad Pedagógica Nacional*

Los currículos implementados de matemáticas de básica secundaria y media carecen de un abordaje, aunque sea tangencial, de la geometría del espacio tridimensional. Esta falencia puede ser producto del limitado conocimiento geométrico para la enseñanza que, al respecto, tienen los profesores de matemáticas. Mediante la conferencia se ilustra un ejemplo de cómo, en un proceso formativo para ser profesor, se puede promover este tipo de conocimiento a través de abordar, con cierto detalle, tareas que llevan a procedimientos para construir diferentes tipos de tetraedros con material manipulable (papel o Zometool) y un EGD (GeoGebra). Se resalta el potencial de la articulación de los recursos y se describe parte del sistema de conocimiento requerido para la enseñanza de la geometría tridimensional que se puede promover con las tareas (e.g., sobre objetos geométricos como el plano mediador, la rotación axial y la simetría especular, o sobre procesos como la visualización, la matematización y la argumentación).

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Tareas de geometría escolar con doblado de papel en la formación inicial y continua de profesores

Zaida Margot Santa Ramírez, *Universidad de Antioquia*

En esta conferencia se presentan algunas tareas de formación de geometría escolar, con doblado de papel, tanto en un proceso de formación continua como en uno de formación inicial de profesores. Para el caso de la formación continua, se analizan algunas tareas que se abordaron en Santa, Jaramillo y Borba (2015), Santa (2016) y Santa-Ramírez, Jaramillo López y Gualdrón-Pinto (2018), las cuales propiciaron una producción de conocimiento geométrico escolar en las interacciones de un colectivo particular con el doblado de papel.

Con respecto a la formación inicial, se presentan algunas tareas que se han desarrollado en el marco de un semillero de investigación con estudiantes de una licenciatura en matemáticas, para la producción de conocimientos geométricos escolares. Específicamente, se analiza el caso de una profesora en formación que implementa algunas de estas tareas con estudiantes que tienen discapacidad visual, con la intención de generar procesos de comprensión de ciertos conceptos básicos de geometría.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

Conferencias virtuales

### Hechos geométricos contraintuitivos y su uso en la didáctica

Carlos Díez, *Universidad Konrad Lorenz*

En la matemática y, en específico, en la geometría hay una gran variedad de hechos contraintuitivos que pueden ser usados en su didáctica, ya que no solamente despiertan la curiosidad, sino que son excelentes semillas para el desarrollo del pensamiento matemático. En esta conferencia, se presentarán algunos hechos de este tipo y se hará énfasis en su uso didáctico.

### Habilidades de Visualización Tridimensional en estudiantes universitarios: una aproximación con geometría dinámica y analogías

Edinsson Fernández-Mosquera, Marisol Santacruz-Rodríguez, Ángel Gutiérrez

*Universidad del Valle, Universidad de Nariño, Universidad de Valencia*

Presentamos avances de una investigación doctoral en curso sobre el desarrollo de habilidades de visualización tridimensional en estudiantes universitarios al resolver problemas de lugares geométricos 3D mediante geometría dinámica. Se exponen los resultados de dos actividades de aprendizaje que emplean analogías entre objetos en el plano y en el espacio, con el objetivo de fomentar estas habilidades. Aunque muchos estudiantes enfrentan dificultades para visualizar lugares geométricos en el espacio, se observa un progreso en habilidades como identificación, reconstrucción, conciencia parcial-total y control teórico. Estas habilidades, más intuitivas, se fortalecen mediante la práctica en diversos contextos geométricos. Se destaca la importancia de estimular la manipulación de objetos geométricos en movimiento para mejorar la visualización tridimensional, contribuyendo así al aprendizaje de la geometría espacial a nivel universitario.

### Conocimiento especializado de docentes de matemática de tierra del fuego: historia de una conformación

Carlos Pérez, *Universidad Instituto de la Educación y del Conocimiento, Universidad Nacional de Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur (Argentina)*

Se presentan los avances en el desarrollo de un proyecto de investigación cuyo objeto de estudio es el conocimiento especializado de las y los docentes que enseñan geometría en el nivel secundario de la provincia argentina Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur, cuando diseñan y gestionan tareas para el aula con el uso de tecnología informática para provocar aprendizajes. En particular, se comparten el recorrido del Equipo de Investigación y las primeras acciones de este para la formación de un espacio de trabajo colaborativo entre docentes de matemática en ejercicio del nivel secundario e investigadores en didáctica de la matemática de la universidad. Se muestran las etapas que se han atravesado, avances y logros, así como también algunos desafíos y tensiones encontrados para la conformación del espacio colaborativo, como otra experiencia de este tipo en Argentina.

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Cursillos presenciales

#### Cu1 (invitado internacional): El diseño de instrumentos para evaluar la comprensión de demostraciones en geometría

Juan Pablo Mejía-Ramos, *Universidad de Rutgers (New Jersey)*

La lectura y comprensión de demostraciones matemáticas es fundamental para el aprendizaje de la geometría tanto en el ámbito escolar como universitario. Sin embargo, ¿qué significa realmente entender una demostración matemática y cómo podemos evaluar esa comprensión en el aula? Este cursillo aborda estas preguntas, mientras aprendemos a diseñar instrumentos para evaluar la comprensión de demostraciones matemáticas. Nos enfocaremos en distintos tipos de demostraciones de teoremas básicos en geometría escolar, como los de Pitágoras y Tales, y elaboraremos preguntas concretas para evaluar aspectos específicos de la comprensión de estas demostraciones.

#### Cu2: Modelación geométrica y la resolución de problemas para la enseñanza de la geometría

Luz Fonseca y Osvaldo Rojas  
*Universidad Antonio Nariño*

El cursillo tiene como propósito presentar una metodología para la enseñanza de la geometría basada en la modelación geométrica y la resolución de problemas en la educación secundaria. También, mostrar la manera en que puede darse la vinculación de la matemática avanzada en grados inferiores y que, normalmente se trabaja a nivel universitario. Todo ello, para la consolidación de aprendizajes significativos nuevos con base a los construidos en relación con los estándares básicos de competencia (EBC) propuestos en Colombia, con miras de aportar al desarrollo del pensamiento matemático y cerrar la brecha entre la secundaria y la educación superior. La primera intervención es teórica con ejemplos y la segunda es de trabajo práctico.





### Cu3: Geometría en los concursos de Matemáticas

Alberto Cuéllar, Hugo Cuéllar, Carlos Zuluaga, *Colombia Aprendiendo*

Para nadie es un secreto que la detección de talentos en matemáticas se da a través de la gran red de concursos matemáticos que tienen lugar en todos los continentes. Estos concursos comienzan en la escuela básica y se extienden hasta alcanzar los ámbitos universitarios. En este taller trabajaremos juntos en una muestra internacional de problemas de geometría para la escuela básica propuestos por docentes con una larga experiencia en el planteamiento de problemas. Estos problemas van más allá de los problemas rutinarios y constituyen retos que les exigen a los estudiantes poner a prueba sus capacidades de razonamiento. Este taller está dirigido a personas con conocimientos de geometría básica interesados en aprovechar las experiencias de otros países con el propósito de contribuir al desarrollo de la formación geométrica que recibimos los colombianos.

### Cu4: Una variación del Teorema de Morley

María Losada, *Universidad Antonio Nariño*

¿Por qué hablamos de variación? El teorema de Morley es uno de esos teoremas en donde se puede construir un triángulo equilátero adentro de cualquier triángulo. Específicamente dice que los puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo forman un triángulo equilátero. Si  $ABC$  es un triángulo, entonces los puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos  $B,C$ ;  $A,C$ ;  $A,B$  de  $ABC$  son puntos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  tales que  $\angle A_1BC = \frac{1}{2}\angle ABA_1$  y  $\angle A_1CB = \frac{1}{2}\angle ACA_1$ ,  $\angle B_1CA = \frac{1}{2}\angle BCB_1$  y  $\angle B_1AC = \frac{1}{2}\angle BAB_1$ , y  $\angle C_1AB = \frac{1}{2}\angle CAC_1$  y  $\angle C_1BA = \frac{1}{2}\angle CBC_1$ .

Los puntos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  no son los únicos puntos que podemos construir con las trisectrices. Podemos intersecar también las trisectrices NO adyacentes. Notemos que si  $BC_1$  y  $CB_1$  se intersecan en  $A_2$ ,  $CA_1$  y  $AC_1$  en  $B_2$ , y  $AB_1$  y  $BA_1$  en  $C_2$ , entonces por pura definición  $A_1$  es el incentro de  $A_2BC$  y  $B_1$  es el incentro de  $AB_2C$  y  $C_1$  es el incentro de  $ABC_2$ . Este hecho es importante para demostrar el teorema de Morley. Dada esta configuración es natural preguntarse qué pasaría si no estamos hablando de incentros sino de otro tipo de centros. Supongamos que lo que queremos son puntos parecidos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  y  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  tales que  $A_1$  es el circuncentro de  $A_2BC$  y  $B_1$  es el circuncentro de  $AB_2C$  y  $C_1$  es el circuncentro de  $ABC_2$ . ¿Qué condiciones tienen que cumplir  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  y  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ? y ¿Qué podemos inferir de esta situación? Este escenario inspiró el siguiente problema de la Olimpiada Internacional de Matemáticas del 2023:

Sea  $ABC$  un triángulo equilátero. Sean  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  puntos interiores de  $ABC$  tales que  $BA_1 = A_1C$ ,  $CB_1 = B_1A$ ,  $AC_1 = C_1B$ , y  $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$ . Supongamos que  $BC_1$  y  $CB_1$  se intersecan en  $A_2$ ,  $CA_1$  y  $AC_1$  en  $B_2$ , y  $AB_1$  y  $BA_1$  en  $C_2$ . Demostrar que si el triángulo  $A_1B_1C_1$  es escaleno, entonces los tres circuncírculos de los triángulos  $AA_1A_2$ ,  $BB_1B_2$  y  $CC_1C_2$  pasan por dos puntos comunes.

En el cursillo trataremos todas las nociones que nos llevan a abordar las cuestiones indicadas.

Inicio







## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Cu5: Dialéctica Exploración/Anticipación y programación de actividades autónomas en dgpad-colombia

Martín Acosta, *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

La aplicación web dgpad-colombia, gracias a sus posibilidades de programación de retroacciones didácticas, posibilita la creación de diferentes medios y sistemas de representación con los cuales los estudiantes pueden interactuar para adquirir aprendizajes por adaptación. Las herramientas de interacción con el usuario y de evaluación de estas interacciones permiten organizar secuencias de actividades que los estudiantes pueden recorrer de manera autónoma. En este curso, los participantes se familiarizarán con esas herramientas de dgpad-colombia y aprenderán a diseñar tanto ejercitadores para practicar procedimientos matemáticos en diferentes áreas de las matemáticas, como situaciones adidácticas que promuevan en los estudiantes la construcción de conocimientos nuevos.

### Cu6: Tangram

Óscar Soto, *Universidad del Nariño*

El Tangram original (En el recorrido del tiempo, han aparecido otras versiones del juego) es un rompecabezas compuesto por 7 piezas que son secciones de un cuadrado: un romboide, un cuadrado y cinco triángulos. Con ellas es factible simular la apariencia de una gran cantidad de objetos, animales, personas en su oficio, casas, símbolos y letras entre otros con solo ubicarse contiguas unas a otras sin superponerse. Existe una leyenda que asegura que un sirviente de un emperador chino cargaba en sus brazos un mosaico de cerámica, muy caro y frágil, y tropezó rompiéndolo en pedazos. Desesperado, el sirviente trató de formar de nuevo el mosaico forma cuadrada y fracasó en los miles de intentos, pero con ellos, con los intentos, experimentalmente observó que podía formar gran cantidad de otras figuras con los pedazos. Esta leyenda, convierte al tangram en un divertido juego de rompecabezas creativo.

### Cu7: Around Orbifold Euler characteristic

John Alexander Cruz, *Universidad Nacional de Colombia*

Después de introducir algunas ideas básicas sobre la característica de Euler topológica, discutiremos la idea de "orbifold Euler characteristic" definida en los años 80 por Dixon-Harvey-Vafa-Witten. Siguiendo a Hirzebruch-Hofer presentaremos algunos ejemplos en los cuales el orbifold  $X/G$  tiene una resolución de singularidades con fibrado canónico trivial. En estos casos la "orbifold Euler characteristic" es precisamente la característica de Euler de la resolución.

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Cu8: "ROMPECABEZAS" Un Problema de Construcción para Entrenar el Razonamiento deductivo

Mitchel Alexander Garzón Torres, *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

En geometría existen dos tipos de problemas, de construcción y de demostración, y para resolverlos se deben generar las deducciones necesarias, sustentadas en leyes de la geometría. En tanto, es importante diseñar secuencias de tareas que promuevan el razonamiento deductivo, descubriendo hechos geométricos, y que luego estos se utilicen para resolver problemas.

El problema "Rompecabezas", es un problema de construcción. Este problema se resolverá en dos momentos, en el primero se presentan secuencias de tareas para descubrir hechos geométricos. En el segundo momento, se gestiona el problema a través de preguntas que estimulen la producción de deducciones. Luego, con las deducciones necesarias y los hechos geométricos descubiertos en el primer momento, se resuelve el problema.

### Cu9: ¿Qué hace que una tarea tenga mayor posibilidad de propiciar la formulación de argumentos?

Carmen Samper, Claudia Vargas, Leonor Camargo, Patricia Perry y Óscar Molina

*Universidad Pedagógica Nacional*

Cualquier tarea, dependiendo de la gestión del profesor, puede favorecer la producción de argumentos. Sin embargo, es posible que el solo enunciado de una tarea incluya elementos que aumentan la posibilidad de que esta producción se dé. En el curso, a partir de la definición de argumento matemático que expondremos, examinaremos enunciados de diferentes tareas que se pueden proponer en el aula de geometría, para identificar características comunes de aquellos que tienen mayor viabilidad para propiciar argumentos. Estas se relacionarán con la propuesta que tiene el Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional ( $\mathcal{A}\bullet\mathcal{G}$ ) para tal fin con el propósito de consolidar pautas que sean útiles para determinar el potencial mencionado. Finalmente, estas serán usados para analizar otros enunciados de tareas.





## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Cu10: Potencial de la programación en Blockly y Java Script para el diseño de tareas en DGPad-Colombia

Luis Ángel Pérez, *Universidad Industrial de Santander*

Este taller tiene dos propósitos: en primer lugar, que los asistentes usen la programación en Blockly y Java Script que ofrece la aplicación web gratuita DGPad-Colombia para diseñar tareas tanto de geometría como de aritmética, a partir de plantillas y diseños que hemos desarrollado en el grupo de investigación en educación matemática EDUMAT-UIS. En segundo lugar, reflexionar sobre los fundamentos teóricos del diseño de las tareas y el potencial didáctico de DGPad-Colombia para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media. La reflexión teórica la haremos principalmente desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, donde DGPad se concibe como parte del medio con el cual interactúan los alumnos.

### Cu11: Geometrías asociadas a algunos sistemas de control

Nicolás Martínez Alba, *Universidad Nacional de Colombia*

Es sabido que varios sistemas físicos se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero hay una clase particular de estos sistemas llamado sistemas de control, en los cuales se tiene de forma explícita una función de control (o de retroalimentación en algunos textos) que determina el sistema. Desde el inicio de estudio, de estos sistemas, varios métodos se han establecido, en su mayoría métodos analíticos, sin embargo, se pueden replantear por medio de técnicas de geometría diferencial y explorar diferentes herramientas para estos problemas. En particular, este cursillo se dividirá en dos partes: (1) Planteamiento clásico de algunos sistemas de control, y (2) elementos básicos de geometría necesarios para los modelos geométricos. Este cursillo es una invitación para indagar en métodos modernos de estudio de sistemas tanto físicos como geométricos, pues la exposición tendrá como culmen una descripción de una geometría común para todos los modelos descritos en las dos sesiones.

### Cu12: Matemática y arte

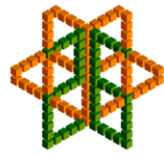
Iván Castro Chadid, *Pontificia Universidad Javeriana*

En este cursillo presento un resumen de mi libro *Matemáticas y Arte*. En él recojo el trabajo en computación gráfica realizado en más de treinta años empleando el programa de álgebra computacional DERIVE. Toda la programación que allí aparece es de mi propia autoría, así como también los diseños gráficos. Este trabajo, además de novedoso, ha contado con excelentes evaluaciones de destacados matemáticos y artistas. En este cursillo el lector se encuentra frente a un amplio espectro que le permita reflexionar sobre la variedad de formas, figuras, gráficas y dibujos que pueden producir las funciones matemáticas cuando se dispone de una herramienta digital de gran alcance para apreciarlas con mayor facilidad y sorprendernos con cada ejemplo.

Inicio



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*



## 26.º Encuentro de **GEOMETRÍA** y sus **APLICACIONES**

### Cu13: Espacio y trayectorias: oportunidades para comprender la diversidad en educación matemática.

Olga Lucia León, Angélica Devia, Paola Niño, Weimar Muñoz y John Páez,  
*Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

La diversidad se constituye en un rasgo que evidencia tanto espacios, como trayectorias, para que la mayor parte de personas puedan aprender, enseñar o investigar las matemáticas para todos y todas. Este cursillo profundiza en tres trayectorias. La primera explorará una relación geométrica que subyace en los trabajos de Newton y de Leibniz sobre el Teorema Fundamental del Calculo y su adaptación a herramientas tecnológicas actuales. La segunda explorará recursos geométricos para la eliminación de barreras en el aprendizaje de números enteros en ambientes con estudiantes con discapacidad intelectual. La última trayectoria es una inmersión en inteligencia artificial donde se propone una geometría para los espacios de problema articulada a un modelado computacional para caracterizar rutas de jugadores en un juego estructurado matemáticamente.

### Cu14: Isometrías en el plano en teselas artísticas. Un contexto para favorecer procesos de conceptualización y argumentación

Leonor Camargo, *Universidad Pedagógica Nacional*

En el cursillo presentaré un conjunto de tareas propuestas por estudiantes de licenciatura en matemáticas para trabajar las isometrías del plano (traslación, rotación y reflexión) en el contexto de teselas artísticas. Además de proponer una reflexión sobre la propuesta curricular del Ministerio de Educación sobre isometrías, muestro producciones de estudiantes de secundaria en donde es posible evidenciar cómo se promueve la conceptualización y la formulación de argumentos inductivos y deductivos.

