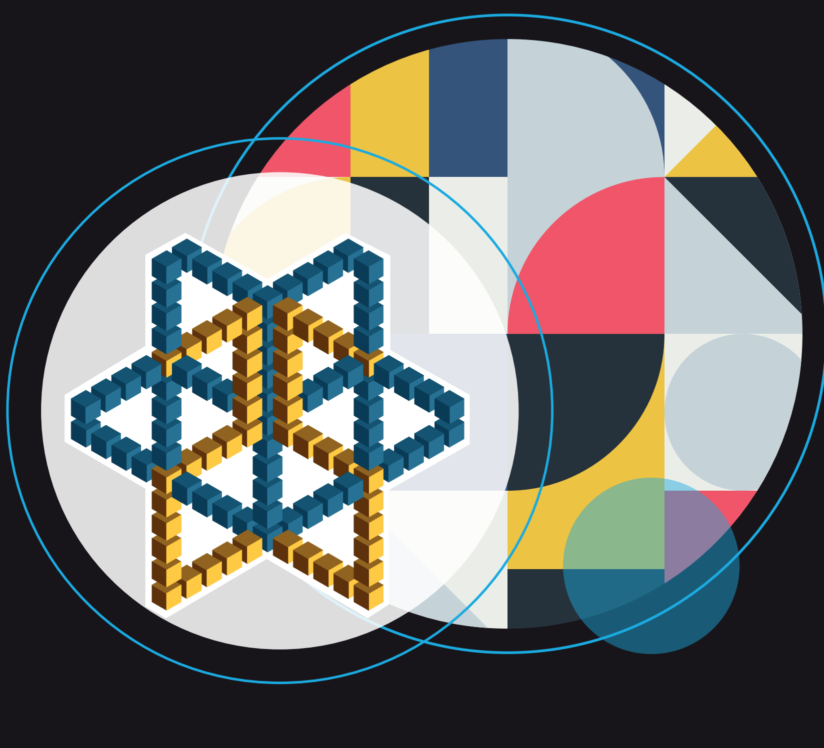
MEMORIAS

Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

22 al 24 de junio de 2022



Organizan:

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Universidad del Rosario

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO
UNIVERSIDAD

Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

22 al 24 de junio de 2022

Patricia Perry

EDITORA

ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES, 25

EDICIÓN

Patricia Perry

DIAGRAMACIÓN DE PORTADA Y PORTADILLAS

Viviana Torres

Dirección de mercadeo y comunicaciones
Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

ISSN: 2346-0539

Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Calle 72 No. 11 86
Bogotá, Colombia

PRESENTACIÓN

En las Memorias del vigésimo quinto Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones se recogen escritos que corresponden a presentaciones hechas en el evento que se llevó a cabo del 22 al 24 de junio de 2022. Algunos de los documentos son de los invitados a participar en el evento. Los demás, son de aquellas personas que culminaron con éxito dos procesos: i) la evaluación de la calidad de su propuesta, realizada por miembros del Comité Académico, que les dio el derecho de presentar una comunicación o un póster en el evento; y ii) la invitación a publicar en las Memorias, y su participación en el proceso de edición del escrito, proceso que culminó favorablemente.

Los documentos reflejan el ejercicio académico realizado una vez más y después de haber superado una de las situaciones más difíciles que hemos atravesado los seres humanos, con muchas pérdidas de vidas y muchas complicaciones económicas y sociales. Pero acá estamos nuevamente.

Con mucho esfuerzo, dedicación y también orgullo, llegamos a esta versión del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, cuya trayectoria lo posiciona como uno de los más importantes en el área. Es un evento académico de carácter internacional que en esta oportunidad fue organizado por tres instituciones académicas: la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Gravito, la Universidad del Rosario y la Universidad Pedagógica Nacional. Contó con el auspicio de las siguientes instituciones: Gimnasio Vermont, Instituto GeoGebra Latinoamérica, Universidad de Barcelona (España), Universidad de Los Lagos (Chile), Universidad del Valle, Universidad Konrad Lorenz, Universidad Sergio Arboleda y Universidad Surcolombiana.

El propósito del Encuentro ha sido siempre convocar a matemáticos, educadores matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Esperamos haber contribuido con la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y profesores de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones; el fomento del estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

Perry, P. (Ed.) (2022). *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

El selecto grupo de invitados nacionales y extranjeros fue garantía del nivel académico del evento y, también, certeza de que este fue un espacio de muchos aprendizajes. Contamos con la presencia de profesores de reconocida trayectoria académica a nivel internacional, especialmente, Nathalie Sinclair (de la Universidad Simón Fraser de Vancouver, Canadá), Vicente Liern (de la Universidad de Valencia, España), Juan Pablo Mejía-Ramos (de la Universidad de Rutgers, New Jersey, EUA), Enrique Reyes (de la Universidad Santiago de Chile, Chile), Adriana Breda (de la Universidad de Barcelona, España), Joan Hernández (de la Universidad Autónoma de Barcelona, España), Elizabeth Hernández (de la Universidad de Los Lagos, Chile) y Sergio Rubio-Pizzorno, de la Comunidad GeoGebra Lationoamérica. A nivel nacional, participaron con una conferencia o un cursillo profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas: Colombia Aprendiendo, Universidad Antonio Nariño, Universidad de Antioquia, Universidad de los Andes, Universidad de Nariño, Universidad de Tolima, Universidad del Valle, Universidad Externado de Colombia, Universidad Industrial de Santander, Universidad Javeriana, Universidad Konrad Lorenz, Universidad Militar Nueva Granada, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Sergio Arboleda, Universidad Surcolombiana, y de las universidades organizadoras.

Comité Organizador
Bogotá, junio de 2022

Organización del Encuentro

Comité organizador

Universidad Pedagógica Nacional

Carmen Samper, Claudia Vargas, Leonor Camargo, Natalia Morales, Óscar Molina

Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Alicia Guzmán y Carlos Álvarez

Universidad del Rosario

Margot Salas

Comité de revisión académica

Universidad de Antioquia

Carlos Jaramillo, John Durango y Jorge Toro

Universidad de los Andes

Mikhail Malakhaltsev

Universidad del Rosario

Margot Salas, Martín Andrade y Mauro Artigiani

Universidad del Valle

Luis Carlos Arboleda

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Luis Bohórquez, Martín Acosta y Olga León

Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Alicia Guzmán, Carlos Álvarez, Julián Agredo, Nora Rojas y Raúl Chaparro

Universidad Industrial de Santander

Jenny Acevedo y Luis Pérez

Universidad Nacional de Colombia

John Cruz, José Ramírez y Yeison Sánchez

Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)

Carmen Samper, Claudia Vargas, Leonor Camargo, Natalia Morales, Óscar Molina, Patricia Perry

Universidad Pedagógica Nacional (México)

Ivonne Sandoval

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Clara Rojas

APOYO ADMINISTRATIVO

Instituto Pedagógico Nacional, Oficina de Relaciones Interinstitucionales Universidad Pedagógica Nacional

ENTIDADES AUSPICIADORAS

Colegio Reyes Católicos, Gimnasio Vermont, Instituto GeoGebra Latinoamérica, Universidad de Barcelona, Universidad de Los Lagos, Universidad del Valle, Universidad Konrad Lorenz, Universidad Sergio Arboleda, Universidad Surcolombiana

ENTIDADES PATROCINADORAS

Belpapel Ltda., Nissan

TABLA DE CONTENIDO

Perry, P. (Ed.) (2022). *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.|

COMUNICACIONES

PÓSTERES

Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

22 al 24 de junio de 2022

Conferencias

CURVAS DE PERSECUCIÓN: UNA MIRADA DESDE LA GEOMETRÍA

Carlos Álvarez
Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
carlos.alvarez@escuelaing.edu.co

En este artículo se presentan las curvas de persecución en dos casos particulares, partiendo de algunas relaciones geométricas y trigonométricas. También se utiliza *software* de geometría dinámica para construir y visualizar las curvas de persecución. La idea es revisar este concepto sin recurrir de manera directa a las ecuaciones diferenciales de forma que, eventualmente, pueda ser abordado con estudiantes de últimos años de bachillerato o primeros semestres universitarios.

INTRODUCCIÓN

En mis cursos de ecuaciones diferenciales se abordan varios problemas de aplicación, entre ellos el estudio de las llamadas curvas de persecución. Es un bonito tema para que los estudiantes resuelvan algunos ejercicios y se maravillen con las gráficas resultantes.

Cuando me invitaron a presentar una charla en el 25.° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, me pareció interesante exponer el tema sin recurrir a las ecuaciones diferenciales, haciendo uso de geometría de coordenadas y algo de trigonometría, álgebra y cuestiones básicas de derivadas. Además, utilizando *software* de geometría dinámica para la visualización de las curvas de persecución.

En este documento se presentan los detalles realizados para dos modelos básicos, llegando a visualizar las curvas de solución con el uso de algunas relaciones de forma paramétrica, pero sin encontrar fórmulas cartesianas explícitas para dichas curvas.

PRELIMINARES

Las curvas de persecución surgen cuando nos preguntamos por la trayectoria que debe seguir un cazador (el que persigue) al seguir a su presa (el que huye), suponiendo que los dos se encuentran localizados en un plano. Para simplificar la situación, por lo regular, se supone que las velocidades tanto del cazador como de la presa son constantes.

Álvarez, C. (2022). Curvas de persecución: una mirada desde la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 3-10. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

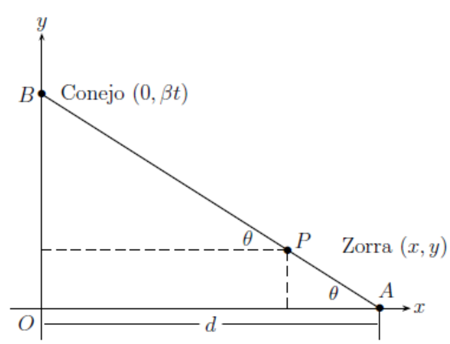
Los dos se encuentran inicialmente en dos puntos distintos y cuando el cazador detecta a la presa sale tras ella; en ese mismo instante, la presa sale huyendo y, al hacerlo, sigue una cierta trayectoria; el cazador lo persigue manteniendo siempre la vista fija en la presa. La curva que nos interesa analizar es la trayectoria descrita por el cazador en su persecución. Este problema se conoce como de persecución tipo 1 (Nagle et al., 2005).

Otro problema de persecución, un poco diferente, surge cuando se tienen n individuos ubicados en los vértices de un polígono de n lados y cada uno persigue al que se encuentra al lado (todos para el mismo lado). En ese caso nos interesa analizar las trayectorias seguidas por cada uno de los individuos en su persecución. Este problema se conoce de persecución tipo 2 (Stewart, 2006).

LA ZORRA Y EL CONEJO

Este es un problema de persecución tipo uno, consideraremos que el perseguidor es la zorra y el que huye es el conejo. Asumiremos que el conejo se encuentra en el origen del plano O y que la zorra se encuentra a una cierta distancia sobre el eje x, en un punto A a una distancia d del conejo. Además, que las velocidades de ambos son constantes, digamos que α es la velocidad de la zorra y β la del conejo (véase la Figura 1).

Figura 1: esquema general de la zorra persiguiendo al conejo



De la Figura 1 y teniendo en cuenta que αt es la distancia recorrida por la zorra en un intervalo pequeño de tiempo, se observa que, por un lado

$$\sin(\theta) = \frac{y}{\alpha t} \qquad \cos(\theta) = \frac{d - x}{\alpha t}$$
$$y = \alpha t \sin(\theta) \qquad x = d - \alpha t \cos(\theta)$$

y, por otro lado, del triángulo AOB, se tiene que

$$\sin(\theta) = \frac{\beta t}{\sqrt{d^2 + (\beta t)^2}} \qquad \cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + (\beta t)^2}}$$

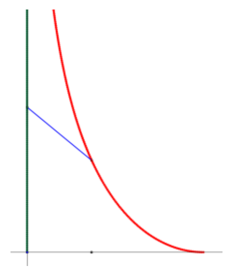
de donde se deduce que

$$x(t) = d - \alpha t \frac{d}{\sqrt{d^2 + (\beta t)^2}} = d\left(1 - \frac{\alpha t}{\sqrt{d^2 + (\beta t)^2}}\right)$$

$$y(t) = \alpha t \frac{\beta t}{\sqrt{d^2 + (\beta t)^2}} = \frac{\alpha \beta t^2}{\sqrt{d^2 + (\beta t)^2}}$$

Así que, la posición de la zorra en cada instante $t \geq 0$ está dada por estas ecuaciones paramétricas y, por lo tanto, esa debe ser la curva de persecución. En la Figura 2 se muestra la gráfica de persecución asumiendo que ambos tienen la misma velocidad y que $d = 0$.

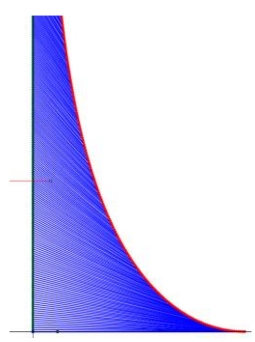
Figura 2: gráfica de persecución con velocidades iguales



La línea azul en la Figura 2 resalta la posición relativa de la zorra y el conejo en el mismo instante de tiempo. Si pintamos varias de ellas, se puede observar cómo se va disminuyendo la distancia a medida que transcurre el tiempo (véase Figura 3).

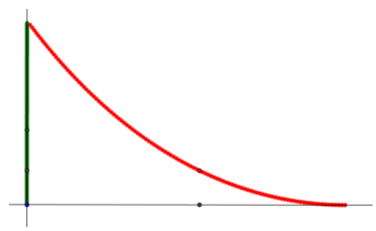
La pregunta obvia es ¿atrapa la zorra al conejo? O mejor, ¿bajo qué condición la zorra logra atrapar al conejo?

Figura 3: gráfica de persecución con velocidades iguales resaltando distancias relativas



Para contestar la pregunta, debemos tener en cuenta que para que tal condición ocurra, la posición de la zorra y la del conejo deben coincidir para algún tiempo t_0 finito, esto es $\left(x(t_0), y(t_0)\right) = (0, \beta t)$, de donde se obtiene que $t_0 = \frac{d}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$. Luego, solo se logrará una captura si $\alpha > \beta$; de hecho, si la velocidad de la zorra es cercana a la del conejo, el tiempo tiende a infinito, y si tienen la misma velocidad no habrá captura. En la Figura 4 se muestra la modelación cuando la zorra lleva el doble de velocidad que el conejo.

Figura 4: gráfica de persecución con velocidades diferentes, más rápido la zorra



En este caso, de hecho, el tiempo de captura será $t_0 = \frac{\sqrt{3}d}{3\beta}$.

Persecución de hormigas

Este problema consiste en que un grupo de n hormigas, ubicadas inicialmente en los vértices de un polígono regular de n lados, se persiguen unas a otras, de forma que cada una persigue a la que se encuentra a su lado, digamos siguiendo una orientación positiva o anti horaria. Cada hormiga mantiene su mirada fija en su compañera a la que persigue.

Para poder hacer la modelación en este caso, es necesario recordar un par de cuestiones más o menos básicas. La primera es respecto a la derivada de algunas funciones (Apostol, 1986).

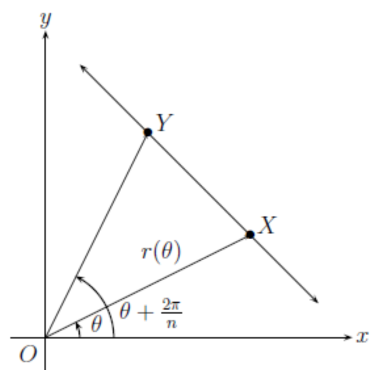
$$\frac{d}{dt}\left[e^{(at)}\right] = ae^{(at)} \quad \frac{d}{dt}[\sin(at)] = a\cos(at) \quad \frac{d}{dt}[\cos(at)] = -a\sin(at).$$

La segunda es sobre la ecuación vectorial de una recta en el plano, conociendo un punto por el que pasa y un vector dirección. Si el punto es P y el vector es V, entonces la ecuación vectorial de esa recta es $X = P + tV$ (Stewart, 2006), donde X es un punto arbitrario de la recta y t es un parámetro de valor real.

Ahora sí, empecemos a resolver el problema. Para simplificar la situación vamos a imaginarnos únicamente la situación de dos hormigas en la que una persigue a la otra, es decir pensar en dos vértices consecutivos del polígono regular.

Sea $X(\theta)$ la posición de la hormiga que se encuentra en el vértice n y $Y(\theta)$ la posición de la que se encuentra en el vértice $n+1$. El parámetro θ será el ángulo medido en sentido anti horario desde el eje positivo x, asumiendo que el primer vértice del polígono está ubicado ahí en ese eje (véase Figura 5).

Figura 5: posiciones relativas de dos hormigas



La trayectoria que nos interesa es la que describe la primera hormiga, es decir, el rastro de $X(\theta)$. Sea $r(\theta)$ la distancia entre el origen y la primera hormiga; en realidad, es la misma distancia entre el origen y cada una de las hormigas, recuérdese que todas están haciendo exactamente lo mismo. Como el polígono es de n lados, la separación en ángulo entre una hormiga y la siguiente es de $\frac{2\pi}{n}$. De acuerdo con lo anterior y revisando la Figura 5, se tiene que:

$$X(\theta) = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$$
$$Y(\theta) = \left(r(\theta)\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right), r(\theta)\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

También sabemos que la recta que pasa por $X(\theta)$ y $Y(\theta)$ es tangente a la curva que estamos buscando y que el vector de velocidad de $X(\theta)$ es tangente a la misma curva (Apostol, 1986), entonces la ecuación vectorial de esta recta puede ser escrita como

$$P(t) = X(\theta) + t\frac{d}{d\theta}X(\theta) = X(\theta) + tX'(\theta)$$

donde

$$X' = (r' \cos(\theta) - r\sin(\theta), r'\sin(\theta) + r\cos(\theta))$$

y así tenemos que

$$P(t) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + t(r'\cos(\theta) - r\sin(\theta), r'\sin(\theta) + r\cos(\theta)).$$

Ahora bien, como la recta pasa por $X(\theta)$ y $Y(\theta)$, existe algún valor de t, digamos t_0 para el cual $P(t_0) = Y(\theta)$. Para simplificar la notación hacemos

$$a = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad b = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

de donde se tiene que

$$\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) = a\cos(\theta) - b\sin(\theta)$$
$$\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) = a\sin(\theta) + b\cos(\theta)$$

Y de la igualdad vectorial obtenemos las siguientes igualdades:

$$ar\cos(\theta) - br\sin(\theta) = r\cos(\theta) + t_0 r'\cos(\theta) - t_0 r\sin(\theta)$$
$$ar\sin(\theta) + br\cos(\theta) = r\,\mathrm{sen}(\theta) + t_0 r'\,\mathrm{sen}(\theta) + t_0 r\cos(\theta).$$

Al despejar t_0 en cada expresión, igualar y hacer algunas cuentas llegamos a

$$(ar^2 - r^2 - brr') = 0 \;\rightarrow\; \frac{a-1}{b} r = r' \rightarrow r(\theta) = Ke^{\left(\frac{a-1}{b}\theta\right)}$$
$$r(\theta) = Re^{\left(\frac{a-1}{b}\theta\right)},$$

siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al polígono inicial, es decir $r(0) = R$. Así, sabemos que el comportamiento del punto $X(\theta)$ está dado por las ecuaciones paramétricas

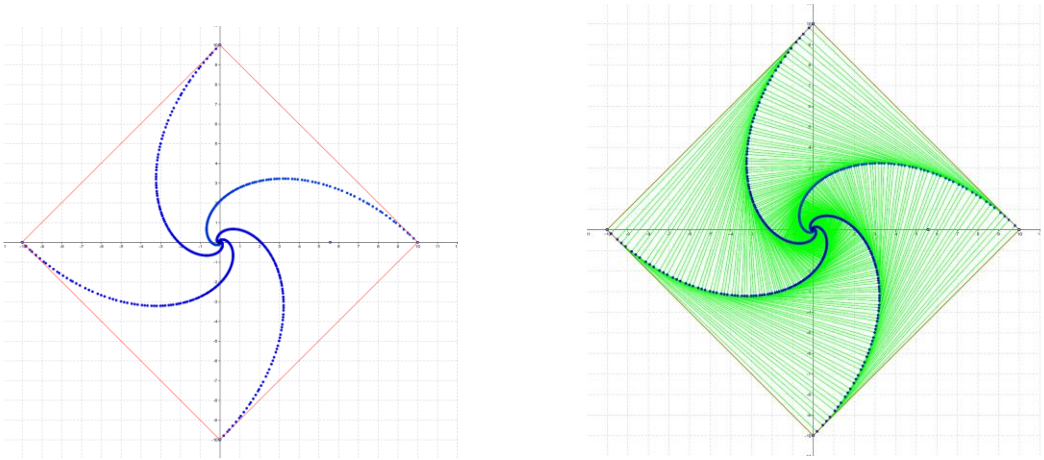
$$X(\theta) = \left(Re^{\left(\frac{a-1}{b}\theta\right)}\cos(\theta), Re^{\left(\frac{a-1}{b}\theta\right)}\sin(\theta)\right).$$

Por ejemplo, si el polígono inicial es un cuadrado, entonces $n = 4$ y supongamos que $R = 10$, entonces las ecuaciones serán las siguientes:

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad b = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$X(\theta) = \left(10e^{(-\theta)}\cos(\theta), 10e^{(-\theta)}\sin(\theta)\right).$$

A continuación, en la Figura 6 se muestra la gráfica de esta situación hecha en GeoGebra.

Figura 6: curvas de persecución en el caso de 4 individuos



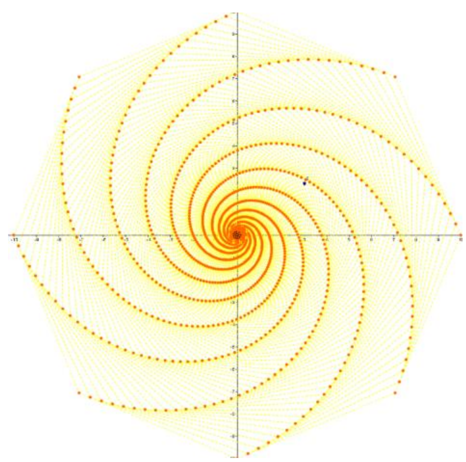
Para poder trazar las curvas, el punto $X(\theta)$ sirve de base; luego se van construyendo los demás puntos. En cada caso el ángulo se va aumentando

$$\theta_k = \theta + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 1,2,\dots,n-1.$$

De esa forma se obtienen los n puntos y luego se animan.

La gráfica que se observa en la Figura 7 corresponde a las curvas de persecución cuando tenemos ocho individuos siguiéndose unos a otros.

Figura 7: curvas de persecución en el caso de 8 individuos



Con las ecuaciones dadas arriba y la ayuda de un *software* como GeoGebra es posible trazar las curvas de persecución de cualquier cantidad finita de individuos que se persiguen unos a otros, y con el poder de la geometría dinámica se logra observar incluso el movimiento de la persecución y no simplemente la gráfica como tal.

REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1986). *Calculus* (vol. 1) (segunda edición). Barcelona, España: Editorial Reverté.

Stewart, J. (2006). *Cálculo: conceptos y contextos* (tercera edición). Bogotá, Colombia. Thomson Learning.

Nagle, K., Saff, E. y Snider, A. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (cuarta edición). México: Editorial Pearson - Addison Wesley.

REFLEXIÓN Y REDISEÑO RELATIVOS A UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE ISOMETRÍAS EN EL PLANO USANDO CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA[1]

Joan Hernández y Adriana Breda
Universitat de Barcelona
jhernaga24@alumnes.ub.edu, adriana.breda@ub.edu

El objetivo de este artículo es describir la reflexión de un futuro profesor acerca de la creación, la implementación y el rediseño de una unidad didáctica sobre isometrías en el plano, implementada con un grupo de alumnos de secundaria de un instituto público de Barcelona. La valoración cualitativa de la unidad didáctica se basó en los criterios de idoneidad didáctica, una herramienta didáctica evaluativa enmarcada en el Enfoque Ontosemiótico. Se concluye que, pese a que las adecuaciones cognitiva y ecológica limitaran la programación didáctica, se debería haber dado mayor peso al criterio epistémico y a las conexiones intramatemáticas. De este modo, se habría acercado el alumnado a la complejidad real del objeto de estudio y a un enfoque interdisciplinar.

INTRODUCCIÓN

Uno de los fines de la Didáctica de las Matemáticas es el análisis de los factores condicionantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje (EA) de las matemáticas. Con tal fin, esta disciplina científica trata de describir y comprender minuciosamente tales procesos. No obstante, tal y como expone Steiner (1985), hay otro contingente que esta disciplina persigue de manera paralela: el desarrollo y la investigación de programas y recursos que mejoren los procesos de EA (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2013).

De esta manera, la Didáctica de las Matemáticas, más allá de su aspecto analítico, posee un carácter creativo, que ha llevado a autores a catalogarla como una "ciencia de diseño" (Lesh y Sriraman, 2010; Godino, 2013). Esta idea conlleva la necesidad de elaborar modelos y teorías de diseño instruccional, que no están exentos de una gran falta de consenso a la hora de tratar de determinar qué se

[1] Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto de Investigación en Formación de Profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MINECO/FEDER, UE).

Hernández, J. y Breda, A. (2022). Reflexión y rediseño relativos a una unidad didáctica sobre isometrías en el plano usando criterios de idoneidad didáctica. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 11-21. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

considera una “buena enseñanza” (Franke, Kazemi y Battey, 2007; Hiebert y Grouws, 2007).

Esta complejidad y falta de robustez provoca que una propuesta de normas y pautas para los sistemas didácticos deba hacerse de forma cautelosa. Igualmente, más allá de este aspecto, esto no entra en conflicto con el hecho de que la posesión de ciertos conocimientos predisponga al profesorado a tomar ciertas decisiones (locales) frente a otras (Godino, 2013).

Partiendo de esta premisa, surge la necesidad de la existencia de una figura “experta” en didáctica. De aquí nace el concepto de competencia didáctica del profesorado (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), estrechamente ligado al constructo teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007; Godino, Batanero y Font, 2019). Es en este marco teórico donde se ubica una herramienta conocida como *idoneidad didáctica*, la cual propone criterios para analizar y reflexionar de forma sistemática sobre los procesos de EA que intervienen en la práctica docente (Godino et al., 2007; Godino, 2013; Godino et al., 2017; Breda y Lima, 2016; Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Tales criterios pueden servir tanto para diseñar los procesos de EA como para evaluarlos, convirtiéndose en una herramienta de desarrollo del profesorado.

A partir de la noción de idoneidad didáctica, los autores de este artículo describen la reflexión que hace un futuro profesor acerca de la creación, la implementación y el rediseño de una unidad didáctica (UD) de isometrías en el plano, mediante el constructo criterios de idoneidad didáctica (CID). Para tal fin, presentan de forma detallada el marco teórico en el que se engloba el análisis, así como los resultados y las conclusiones obtenidas a partir de este.

FUNDAMENTO TEÓRICO: CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Criterios de idoneidad didáctica como herramienta del EOS

El EOS integra distintas aproximaciones y modelos que se emplean en la investigación en Educación Matemática. Esta teoría ofrece diversos tipos de análisis que permiten estudiar los procesos de EA de las matemáticas (Godino et al., 2019). Entre sus herramientas se cuentan los criterios de idoneidad didáctica (Godino et al., 2019; Breda et al., 2018).

Se define la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción matemática como un atributo de adecuación con respecto a una serie de parámetros que permiten calificarlo como idóneo. Los factores que hacen que tal proceso presente esta propiedad empezaron a ser formulados por Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005). Una descripción más actualizada, formulada por Godino et al. (2019), la define como la adaptación entre los significados personales de los estudiantes (logrados a través de un proceso de aprendizaje) y los significados institucionales implementados (los que se reflejan en el proceso de enseñanza), tomando en consideración las circunstancias y los recursos.

Criterios de idoneidad didáctica y sus componentes

Se proponen seis criterios que, a su vez, están desglosados en componentes e indicadores conforme lo presentan Breda, Font, Lima y Pereira (2018).

Criterio de idoneidad epistémica. Un proceso de estudio matemático presenta una mayor idoneidad epistémica, si el grado de representatividad de los significados institucionales que se pretenden implementar con respecto a un significado de referencia es el adecuado. Esta idoneidad está formada por cuatro componentes de estudio: errores, ambigüedades, riqueza de procesos matemáticos y representatividad (con esto último nos referimos a si los significados parciales, modos de expresión y nociones trabajadas muestran, de forma representativa, la complejidad real del objeto de estudio).

Criterio de idoneidad cognitiva. La idoneidad cognitiva valora el grado en el cual los significados que se pretenden enseñar se encuentran a una distancia óptima respecto a lo que el alumnado conoce. Es decir, si se encuentran en la Zona de Desarrollo Potencial de los estudiantes (Breda y Lima, 2016; Coll y Solé, 1989; Onrubia, 1993). Como componentes de estudio de esta idoneidad se consideran los siguientes: conocimientos previos, adaptación curricular individualizada, seguimiento del aprendizaje y presencia de procesos de alta demanda cognitiva (tales como los cambios de representación, abstracción, conexiones intra y extramatemáticas, etc.).

Criterio de idoneidad interaccional. Un proceso de EA se caracteriza por tener un mayor grado de idoneidad interaccional, si la programación y la actuación didáctica permiten identificar y resolver dificultades durante el proceso de instrucción, así como conflictos con el discurso y el lenguaje matemático (conflictos semióticos) (Godino, 2013). Los componentes que se tienen en cuenta son la interacción profesor-discente, la interacción entre discentes, la autonomía del aprendizaje y la evaluación formativa.

Criterio de idoneidad mediacional. Entendemos la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para la realización adecuada del proceso de EA (Godino, 2013). Los componentes que se tienen en cuenta son los recursos materiales; el número de alumnos; el horario y las condiciones del aula; y el tiempo de enseñanza, tutorización y aprendizaje.

Criterio de idoneidad afectiva. Este tipo de idoneidad estudia el grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio. En este punto ha de tenerse en cuenta un gran abanico de influencias: la institución escolar, el historial académico, los intereses dominantes en lo concerniente a la clase, o la promoción de actitudes y hábitos (Godino, 2013). Los componentes de estudio de esta idoneidad son los intereses y las necesidades del alumnado, las actitudes y emociones presentes durante el proceso de estudio.

Criterio de idoneidad ecológica. Este tipo de idoneidad hace referencia al grado de ajuste del proceso de instrucción al Proyecto Educativo del Centro, al instituto, a la sociedad y a los condicionantes del entorno en el que se lleva a cabo. Entre los componentes considerados están los siguientes: adaptación al currículo, conexión intra e interdisciplinar, utilidad sociolaboral y, finalmente, presencia de métodos y técnicas innovadoras desde un punto de vista didáctico.

Aplicabilidad y justificación de los criterios

La lectura de los criterios de idoneidad didáctica nos invita a pensar que ellos, o parte de ellos, son tenidos en cuenta por el profesorado, implícitamente, en un ejercicio de práctica reflexiva, aunque estos no hayan sido presentados formalmente en procesos de formación previa. Por esta razón, se considera útil su enseñanza con tal de desarrollar la competencia metadidáctica de los profesores, siendo estos criterios una herramienta que permite pautar el análisis de la propia práctica (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Breda et al., 2018; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015). Además, tal y como se discute en el estudio de Breda (2020), el reflejo de la utilidad del constructo CID se ve en la capacidad del profesorado de proponer mejoras, así como en la justificación de su aplicabilidad y en la presencia equilibrada de los diferentes criterios (Breda et al., 2018).

Enseñanza de los criterios de idoneidad en el máster de formación de profesorado de secundaria

El análisis que presentamos orbita en torno al estudio que realiza un estudiante de un máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria, durante su periodo de prácticas preprofesionales, sobre su propio ejercicio de la docencia. El proceso de reflexión efectuado por el estudiante fue pautado por algunas herramientas (siendo una de ellas el constructo CID) que se presentaron en el máster anteriormente mencionado.

La naturaleza implícita de los CID en los ejercicios reflexivos del profesorado motiva a presentarlos en el máster como conceptos que son generados en espacios controlados a partir de consensos grupales, motivando así el siguiente modelo de instrucción (Esqué y Breda, 2021):

- Análisis de casos (sin teoría). Se propone a los estudiantes del máster que realicen un análisis de episodios y programaciones didácticas sin ninguna pauta previa.

- Emergencia de diferentes tipos de análisis didáctico (descriptivo, explicativo y valorativo). Puesta en común de los diferentes análisis y detección de líneas de estudio recurrentes.

- Tendencias en la enseñanza de las matemáticas. Presentación de las diferentes tendencias presentes en la Didáctica de las Matemáticas (Breda et al., 2018) y observación de su presencia (implícita) en los análisis realizados.

- Teoría (el constructo CID). Presentación del constructo teórico, entendido como un conjunto de principios consensuados por la comunidad educativa.

- Lectura y comentario de partes de algunos trabajos de final de máster de cursos anteriores. Reflexión sobre los testimonios didácticos de estudiantes de cursos pasados y su implementación de los CID.

- Prácticas y trabajo de final de máster. Los alumnos usan los CID para valorar su práctica. Concretamente, valoran la UD diseñada una vez implementada, y proponen un rediseño y mejoras en función de los CID.

La unidad didáctica

La UD propuesta por el futuro profesor trata procesos y conceptos geométricos; se sitúa en las matemáticas que involucran transformaciones isométricas del plano: translaciones, giros y reflexiones, así como el concepto de simetría.

El tema tratado se considera de carácter académico. Por esta razón, según los comentarios de la mentora de prácticas (profesora del instituto que desempeñaba el papel de guía, asistente y evaluadora del estudiante en prácticas), el tema se abordaba rara vez en un curso habitual. De hecho, una de las pretensiones al proponer esta unidad era romper con la tónica, imperante en secundaria, de identificar los conceptos de geometría y medida, para lo cual el estudio de las transformaciones geométricas y la búsqueda posterior de simetrías respecto a estas constituía una oportunidad.

La distribución prevista de contenidos y actividades durante las sesiones (de una hora) se muestra a continuación,

- 1.ª hora: presentación de la unidad didáctica y prueba escrita individual.
- 2.ª y 3.ª horas: realización de un dosier sobre nociones básicas de translaciones y actividad lúdica en formato de concurso.
- 4.ª y 5.ª horas: trabajo sobre un dosier acerca de nociones básicas de giros e introducción del concepto de centro de giro.
- 6.ª y 7.ª horas: estudio de las reflexiones y actividad de ampliación en un contexto lúdico, basado en el ajedrez, en el que se trabajaba la composición de reflexiones.
- 8.ª hora: realización de un dosier en el que se trabaja el concepto de simetría a partir de algunas de las obras de Maurits Cornelis Escher y diversos mosaicos de la Alhambra.

El conjunto de actividades fue pensado para que se realizara en agrupaciones de tres estudiantes, fomentando el trabajo cooperativo y el debate. La evaluación del grado de aprendizaje del alumnado se basó, en parte, en la producción escrita; por otra parte, fue de naturaleza formativa (Sanmartí, 2020). Así, se realizó una observación y seguimiento sistemático durante toda la intervención mediante rúbricas de evaluación para cada actividad, tanto para el profesorado como para el alumnado.

Acerca de la idoneidad epistémica

El futuro profesor considera que se estudiaron las isometrías de forma subordinada al objeto al cual se aplicaban. Así, propone que en una nueva UD se daría más peso a actividades donde se estudiasen las isometrías en sí mismas, como transformaciones, lo que acercaría el alumnado a la complejidad real del objeto matemático. Más concretamente, basada en la secuenciación que exponen Martín (2019) y Salvador y Molero (2020), una nueva planificación centraría la atención de manera más específica en conexiones internas, con un dosier dedicado a la composición de isometrías y otro a la síntesis de contenidos. Se seguiría optando por no hacer intervenir el lenguaje simbólico o numérico en el estudio de giros y reflexiones por dificultades motivacionales y cognitivas del alumnado. No obstante, si no se dieran las mencionadas condiciones respecto al lenguaje, se presentaría el análisis formal de manera introductoria mediante el uso de applets de GeoGebra: una para giros y otra para reflexiones, las cuales permitirían el trabajo simbólico y numérico de manera exploratoria. Además, se fomentarían las conexiones internas (se presentarían las isometrías lineales como objetos matriciales) y se innovaría didácticamente (Breda, 2020).

Acerca de la idoneidad cognitiva

Destacan la abstracción y, por consiguiente, las conexiones internas y externas con respecto a la matemática. Igualmente, sobresale el proceso de traducción de procesos del lenguaje escrito al gráfico (y viceversa) y, en el caso de las translaciones, al simbólico (se trabajó con vectores de translación). No obstante, a pesar de la existencia y activación de tales procesos, se considera que no se pudieron llegar a desarrollar con el grado que se pretendía. Esto es así a la luz de la mayoría de las respuestas recopiladas en las actividades. En ellas se reflejaba cómo el alumnado todavía no entendía las particularidades que caracterizaban a cada isometría, hecho que se tradujo en la imprecisión de las respuestas del dosier final de simetrías.

El futuro profesor comenta que en una nueva programación fomentaría las conexiones intramatemáticas y la comprensión de los giros y reflexiones como transformaciones de todo el plano. Esto implicaría una mayor calidad en las respuestas que pueda dar el alumnado, pues se habría trabajado con más profundidad los procesos de abstracción y comunicación.

Acerca de la idoneidad mediacional

Se utilizaron continuamente dos pizarras y un ordenador de sobremesa, con salida de vídeo a un proyector y con salida de audio a unos altavoces. También se emplearon los ordenadores portátiles personales de cada alumno (distribuidos por el instituto). Estos recursos permitieron el trabajo de todas las actividades –salvo la prueba inicial y el dosier básico de reflexiones– de manera virtual (disminuyendo así el consumo de papel) y agilizaron la coordinación grupal mediante entornos de trabajo cooperativo en la nube. También se usó un recurso manipulativo en la sesión de ampliación de reflexiones de la 7.ª hora.

El futuro profesor considera que el uso constante que se hizo de los ordenadores personales fue contraproducente: en la mayoría de las ocasiones resultó una distracción y un obstáculo para los alumnos que olvidaron llevarlo a la clase. En una nueva programación se limitaría su uso para el concurso de translaciones y el último dosier de simetrías, pasando a trabajar durante las sesiones restantes en formato físico. Esto conduciría a una mayor eficiencia temporal.

Acerca de las idoneidades afectiva e interaccional

Los aspectos interaccionales y emocionales fueron los que el futuro profesor tuvo más en cuenta en la planificación de la UD, desde el primer contacto con los grupos de alumnos (3 meses antes), en el que se detectaron actitudes de rechazo y apatía hacia la asignatura. Además, dado que las relaciones de afinidad eran una gran fuente de motivación, se permitió –por recomendación de la mentora– que fuesen los propios alumnos quienes formasen los grupos. No obstante, aunque los integrantes de un grupo tuvieran relación de amistad, sus intereses académicos no siempre coincidían.

Las mejoras propuestas en este ámbito están relacionadas con la creación de un *clima de trabajo* en el aula de matemáticas, como paso previo y necesario con tal de lograr un aprendizaje cooperativo (Pujolás, 2008). Acciones que se llevarían a cabo en una nueva programación abarcarían desde involucrar a los tutores de las agrupaciones de alumnos en la formación de los grupos de trabajo, hasta evitar los casos en los que un solo integrante acabe realizando todas las tareas y los demás se limiten a copiarlas al final de la sesión.

Acerca de la idoneidad ecológica

Se considera que los contenidos tratados han ilustrado al alumnado sobre la posibilidad de análisis de problemáticas diversas desde una óptica matemática distinta al enfoque típico de la aritmética y la medida. Desde un punto de vista pragmático, se ha fomentado el ejercicio de una ciudadanía más crítica en contextos cotidianos, lúdicos o académicos.

El futuro profesor cree, además, que el conjunto de nuevas medidas tomadas desde lo cognitivo enriquecería el abanico de conexiones internas e interdisciplinares. También ofrece algunos de los ejemplos propuestos por Gutiérrez (2005) para estudiar los mosaicos creados por Escher, hecho que ilustra, en particular, la utilidad matemática como herramienta de expresión artística, ya sea restringida al mundo académico o aplicada al mundo laboral.

CONSIDERACIONES FINALES

El futuro profesor considera que durante el proceso de diseño de la UD se enfocó, sobre todo, en tener en cuenta las problemáticas relativas a la gestión del aula y a las carencias cognitivas y motivacionales, mientras que dejó de lado procurar una mejora de los procesos y contenidos matemáticos. Efectivamente, el proceso de análisis de la UD mediante los CID ha llevado al futuro profesor a detectar que las deficiencias que más han salido a la luz han sido unas de carácter básico: las relativas a la calidad matemática de la enseñanza.

Dejando de lado las particularidades matemáticas de la intervención didáctica, el futuro profesor reconoce que el conjunto de actitudes, hábitos y emociones negativas –la tónica imperante que impregnó cada una de las sesiones– fue el germen de la mayoría de las problemáticas. Esta observación corrobora una de las ideas que expone Pujolás (2008) en su artículo, en el que habla de la cooperación entre alumnos como herramienta de aprendizaje. De hecho, expone que la cohesión del grupo es un recurso didáctico indispensable para estructurar de forma cooperativa una actividad y un grupo de estudiantes. La realidad que se percibió coincide con lo anterior y pone en evidencia que un paso previo necesario, si se pretende trabajar en grupo, consiste en generar un clima de clase saludable y propicio para el aprendizaje.

Referencias

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(6), 69-88. doi: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A. y Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo de final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-105. doi: https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1955

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo de idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278. doi: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. y Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*, 1893-1918. doi: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Coll, C. y Solé, I. (1989). Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. *Cuadernos de Pedagogía*, 168, 16-20.

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta idoneidad didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54. doi: https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, Carolina del Norte: NCTM y IAP.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the learning of Mathematics*, *39*(1), 38-43. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/26742011

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113. doi: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *4*(2), 1-26. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/articulos_ingles/suitability_criteria_functions.pdf

Gutiérrez, A. (2005). Los cubrimientos de Escher en la enseñanza de las isometrías del plano. *Integra+*, 9, 15-28. Recuperado de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut90a.pdf

Hiebert, J. y Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, Carolina del Norte: NCTM y IAP.

Lesh, R. y Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En L. English. y B. Sriraman (eds.), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers* (pp. 123-146). Hiedelberg, Alemania: Springer.

Martín, M. (2019). Propuesta didáctica para la enseñanza de las isometrías en Educación Secundaria. *Educación y futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 40, 15-47.

Onrubia, J. (1993). *Enseñar: crear Zonas de Desarrollo Próximo e intervenir en ellas. El constructivismo en el aula*. Barcelona, España: Editorial Graó.

Pino-Fan, L. R., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics Science & Technology Education*, *11*(6), 1429-1456. doi: https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Pujolás, P. (2008). Cooperar per aprendre i aprendre a cooperar: el treball en equips cooperatius com a recurs i com a contingut. *Suports: revista catalana d'educació especial i atenció a la diversitat*, *12*(1), 21-37. Recuperado de https://raco.cat/index.php/Suports/article/view/120854

Salvador, A. y Molero, M. (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas: 3ºA de ESO. Capítulo 8: Movimiento en el plano y en el espacio*. Recuperado de https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3B/08_Movimientos_3B.pdf

Sanmartí, N. (2020). *Avaluar és aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.* Barcelona, España: Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. Direcció General de Currículum i Personalització.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Hacia una teoría de la competencia en la enseñanza de las matemáticas. En D. Tirosh y T. L. Madera (eds.), *Herramientas y procesos en la formación del profesorado de matemáticas* (pp. 324-354). Róterdam: Sense Publisher.

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education (TME). *For the learning of mathematics*, *5*(2), 11-17.

APLICACIONES DE LA GEOMETRÍA A LA TOMA DE DECISIONES

Vicente Liern
Depto. Matemáticas para la Economía y la Empresa - Universitat de València
Vicente.liern@uv.es

La comprensión y el uso de las matemáticas resultan fundamentales para afrontar cuestiones personales, profesionales y sociales; de ahí, la necesidad de que nuestros alumnos sean capaces de reconocer la presencia de las matemáticas en el mundo y que estas les ayuden a emitir juicios y decisiones bien fundamentados. Una buena parte de la toma de decisiones económicas, empresariales y financieras se basa en argumentos geométricos. Las diferentes alternativas se suelen modelar como puntos o vectores y las opciones se comparan y ordenan calculando la distancia a una alternativa ficticia que se considera óptima (ideal) y otra que se considera la peor (anti-ideal). Se mostrará, a través de ejemplos, cómo abordar estos aspectos en las aulas.

INTRODUCCIÓN

Nos pasamos la vida teniendo que elegir una opción entre las disponibles. Es tan habitual la actividad de tomar decisiones que, en palabras del premio Nobel D. Kahneman y su colaborador A. Tversky, “es como hablar en prosa, la gente lo hace todo el tiempo, lo sepa o no” (Kahneman y Tversky, 1984). Sin embargo, la mayoría de las decisiones que se toman en la vida real suponen valorar, medir, comparar, modelar y ordenar diferentes alternativas. Aunque en ocasiones estos procesos se hacen inconscientemente, se basan en los conceptos de *distancia* y de *orden* a los que tan acostumbrados estamos en Matemáticas.

Por esta razón, la toma cotidiana de decisiones se puede convertir en una aliada muy útil en el aula de matemáticas, siempre que no intentemos camuflar los problemas, sino que busquemos la autenticidad y el interés del estudiantado porque, como afirma C. Alsina (Alsina, 2000)

> muy a menudo tenemos una tendencia a falsear la realidad creando una acción en la cual es ‘la realidad’ la que se pone al servicio de la matematización y no al revés.

Teniendo en cuenta la filosofía del proyecto PISA, que persigue aumentar la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas

Liern, V. (2022). Aplicaciones de la geometría a la toma de decisiones. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 23-37. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

de la vida cotidiana, vamos a reflexionar en torno a la toma de decisiones racionales[1] basada en múltiples criterios.

En la mayoría de los métodos de decisión multicriterio (MDM), las diferentes alternativas se suelen modelar como puntos o vectores y, a partir de ahí, se pueden operar como elementos de espacios vectoriales o afines. De entre los muchos métodos existentes, aquí trabajaremos con uno de los más utilizados: el método TOPSIS, acrónimo de *Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution*. Fue desarrollado por Ching-Lai Hwang y Yoon, a principio de la década de 1980 (Hwang y Yoon, 1981), y se basa en que la alternativa elegida debe tener la menor distancia geométrica a una solución ideal y la mayor distancia geométrica a una solución anti-ideal. Estas soluciones suelen ser ficticias y se construyen con las mejores y las peores puntuaciones, respectivamente, de cada criterio. Una vez normalizados los datos, acción necesaria puesto que los criterios suelen tener dimensiones incongruentes, el ideal y el anti-ideal se convierten en nuestros puntos de referencia para tomar la decisión.

Para que la relación entre decisiones multicriterio y geometría sea más explícita, en la Tabla 1 expresamos el concepto geométrico y cuál es el uso que se hace en el método.

Tabla 1: conceptos geométricos utilizados en el método TOPSIS

	Concepto geométrico	Uso en el método
1.	Modelación vectorial	Cada alternativa es valorada en m criterios, generando un vector de m coordenadas
2.	Transformaciones lineales	Normalización de los datos
3.	Sistemas de referencia	Determinación de la solución ideal y anti-ideal
4.	Cálculo de distancias	Obtención de proximidad relativa y ordenación de alternativas

Es muy habitual asociar la toma de decisiones con alcanzar un máximo o un mínimo, aunque sean locales. Sin embargo, hay muchas situaciones de la vida cotidiana en las que la decisión óptima no está en los extremos. Por ejemplo, en

[1] S. Robbins y T. Judge afirman que toda decisión racional se caracteriza por seis pasos: (1) identificar y analizar el problema, (2) determinar los criterios de decisión, (3) establecer prioridades, (4) generar las opciones de solución, (5) evaluar las opciones y, finalmente, (6) seleccionar la mejor opción (Robbins y Judge, 2017).

el ámbito de la salud, lo mejor no suele ser que los marcadores estén en los límites, sino en valores intermedios. En el ámbito del comercio, surgen multitud de ejemplos. Cuando nos ofrecen tres productos de características muy similares y precios distintos, hay una tendencia a desconfiar de los extremos y elegir el producto de valor intermedio. De hecho, esta es una estrategia que se utiliza para las ventas (Robson, 2019).

Mostraremos que, con transformaciones geométricas sencillas, se puede conseguir que algunos métodos de decisión multicriterio puedan utilizarse cuando hay criterios en los que el objetivo no es llegar al máximo ni al mínimo, sino alcanzar un punto intermedio.

En primer lugar, mostraremos el método TOPSIS y en las secciones siguientes analizaremos sus propiedades y repercusiones que tiene la variación de algunos de los conceptos geométricos en los que se basa y.

TOMA DE DECISIONES CON MÚLTIPLES CRITERIOS

El problema que nos planteamos es elegir la mejor entre n alternativas, $A_i, 1 \leq i \leq n,$ que han sido valoradas en m criterios, $C_j, 1 \leq j \leq m$. La manera de modelar los datos es identificar cada alternativa A_i con un vector,

$$A_i \implies (x_{i1}, x_{i1}, \dots, x_{im}) \in \mathbb{R}^m, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Si expresamos en una matriz todos los vectores, se obtiene una matriz denominada *matriz de decisión*:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \; x_{12} \; \dots \; x_{1m} \\ x_{21} \; x_{22} \; \dots \; x_{2m} \\ \vdots \\ x_{n1} \; x_{n2} \; \dots \; x_{nm} \end{pmatrix}.$$

Un supuesto de TOPSIS es que el objetivo de cada criterio es llegar al máximo o al mínimo y no a algún punto intermedio entre ellos. Como veremos más adelante, esta exigencia puede evitarse utilizando transformaciones geométricas adecuadas; en concreto, transformaciones lineales o lineales a trozos (Acuña-Soto et al., 2020, 2021).

El método TOPSIS se puede expresar de la forma siguiente:

Inputs (1) Alternativas, $A_i, 1 \leq i \leq n$, valoradas en m criterios $[x_{ij}]$

(2) Importancia relativa (peso) de cada criterio $w_j, 1 \leq j \leq m$, de modo que suman 1

Paso 1 Matriz de valoraciones (matriz de decisión) normalizada $[r_{ij}]$

Paso 2 Matriz de decisiones normalizada y ponderada $[w_j \cdot r_{ij}]$

Paso 3 Determinación de las soluciones ideal A^+ y anti-ideal A^- con los mejores y peores valores de todas las alternativas y todos los criterios, respectivamente

Paso 4 Calcular la distancia de cada alternativa al ideal y al anti-ideal

$$d_i^+ = d(A_i, A^+), \qquad d_i^- = d(A_i, A^-), \qquad 1 \leq i \leq n$$

Paso 5 Calcular la proximidad relativa

$$R_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Output Ordenación de las alternativas de acuerdo con los valores de R_i

Por propia construcción, R_i se encuentra en el intervalo [0, 1]. Cuanto más alto sea el valor de R_i, mejor situada estará la alternativa. Si $R_i = 0$, la alternativa A_i es el anti-ideal, mientras que si $R_i = 1$, la alternativa A_i es el ideal. Veamos en un ejemplo sencillo cómo funciona el método TOPSIS.

Ejemplo 1. Tenemos que elegir una alternativa entre cinco que han sido valoradas en dos criterios (véase Tabla 2). Las puntuaciones están normalizadas en el intervalo [0, 1] y son adimensionales.

Tabla 2: valoración de cinco alternativas en dos criterios

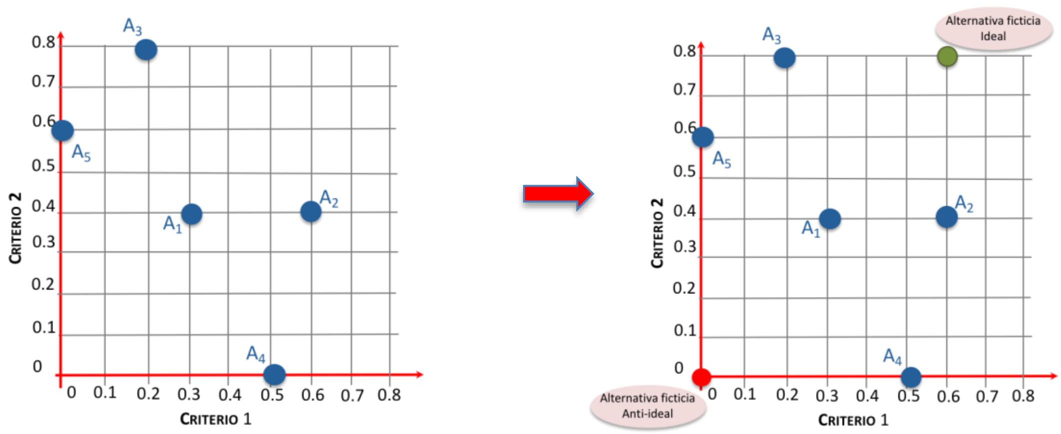
Alternativas	Criterio 1	Criterio 2
A_1	0.3	0.4
A_2	0.6	0.4
A_3	0.2	0.8
A_4	0.5	0
A_5	0	0.6

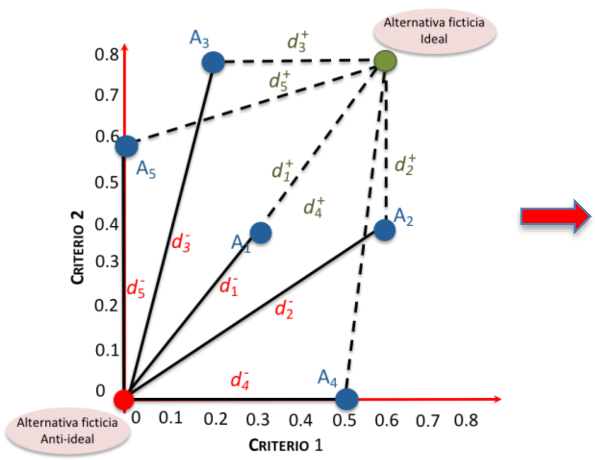
En la Figura 1 se esquematiza la aplicación TOPSIS y se muestra que la elección debería ser la alternativa A_3. De hecho, el método ordena las alternativas de la forma siguiente:

$$A_3 > A_2 > A_1 > A_5 > A_4$$

Y se ha elegido la mejor situada, que es A_3. Por otro lado, es interesante reseñar que a pesar de que es un ejemplo pequeño y que los criterios son de maximizar, TOPSIS no es equivalente a calcular la media aritmética, porque si fuese así A_3 y A_2 estarían empatados puesto que la media de ambas es 0.5.

Figura 1: representación geométrica del método TOPSIS





	Crit. 1	Crit. 2	d(Ai, Id.)	d(Ai, Ant-I)	Ri
A_1	0.3	0.4	0.5000	0.5000	0.5000
A_2	0.6	0.4	0.4000	0.7211	0.6432
A_3	0.2	0.8	0.4000	0.8246	0.6734
A_4	0.5	0	0.8062	0.5000	0.3828
A_5	0	0.6	0.6325	0.6000	0.4868
Ideal	0.6	0.8			
Anti-ideal	0	0			

Teniendo en cuenta lo expuesto en el Ejemplo 1, a continuación, analizaremos las repercusiones que tiene en el método (y por tanto en la decisión) una modificación en la normalización (*transformaciones lineales y lineales a trozos*), en la elección del ideal y el anti-ideal (*sistemas de referencia*), y en la proximidad relativa (*distancias*).

TRANSFORMACIONES LINEALES Y NORMALIZACIÓN

En esta sección abordaremos muy brevemente dos problemas importantes en la toma de decisiones:

(a) Cómo homogeneizar adecuadamente datos medidos en diferentes unidades, de manera que se puedan manejar conjuntamente.

(b) Cómo tomar una decisión cuando hay criterios cuya meta se alcanza en el máximo, otros criterios que persiguen llegar al mínimo y criterios en los que la meta está en algún punto intermedio.

A continuación, veremos que ambas cuestiones se pueden resolver mediante transformaciones lineales o lineales a trozos (normalizaciones).

Normalizar los datos es trasladarlos a un intervalo específico, habitualmente [0, 1], y hacerlos adimensionales, de manera que datos de diferentes unidades o magnitudes puedan compararse y ponderarse. En principio, una normalización real puede ser cualquier aplicación N: R⟶[0,1], de manera que N(x) es adimensional. No obstante, en la práctica suele imponerse alguna condición sobre la función al operar sobre el conjunto de datos, como son monotonía, continuidad, etc. Por esta razón, normalmente se analizan las normalizaciones restringidas al conjunto de datos N: S⊂R⟶[0,1].

Si partimos de los datos $[x_{ij}]$ a los que nos referíamos en la sección anterior, las normalizaciones más habituales son las homotecias o cambios de escala:

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}}, n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max\limits_{i} x_{ij}}, n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}, \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$$

Como el conjunto de datos es conocido, los denominadores anteriores son constantes positivas. Si expresamos cualquiera de ellos como α^{-1}, las normalizaciones anteriores se pueden expresar como una homotecia $n(x) = \alpha x$. Otra opción muy habitual, que tiene en cuenta la dispersión en los datos, es considerar una homotecia y traslación (Ouenniche et al., 2018),

$$n_{ij} = \frac{x_{ij} - \min\limits_{i} x_{ij}}{\max\limits_{i} x_{ij} - \min\limits_{i} x_{ij}}, \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$$

que se puede expresar como $n(x) = \alpha x + \beta$.

Para resolver el problema planteado en (b), cuando el objetivo del criterio no es alcanzar el máximo ni el mínimo sino algún punto intermedio, recurriremos a homotecias y traslaciones a trozos.

Para mostrar un escenario realista de toma de decisiones presentamos el Ejemplo 2 en el que aparecen tres criterios:

(a) La presión arterial (C1). Claramente lo óptimo no es ni el máximo ni el mínimo. Siguiendo las indicaciones de *American Heart Association*, el óptimo estaría en el intervalo [80, 120].

(b) Las habilidades sociales (C2), valoradas del 0 al 10 por los compañeros de trabajo. Desde luego, para C2 el óptimo será el máximo.

(c) La distancia del domicilio al centro de trabajo (C3), medida en km. Obviamente se trata de un criterio que nos interesa minimizar.

Ejemplo 2. Una empresa evalúa tres características de 5 empleados para ofrecer un ascenso. Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 2, ¿cuál debería ser la decisión?

Tabla 3: valoración de cinco alternativas en dos criterios

Empleados	Presión arterial (mmHg) C1	Habilidades sociales (puntos) C2	Distancia al centro (km) C3
P_1	155	7	3
P_2	123	6	6
P_3	134	8	11
P_4	166	7	9
P_5	99	5	7

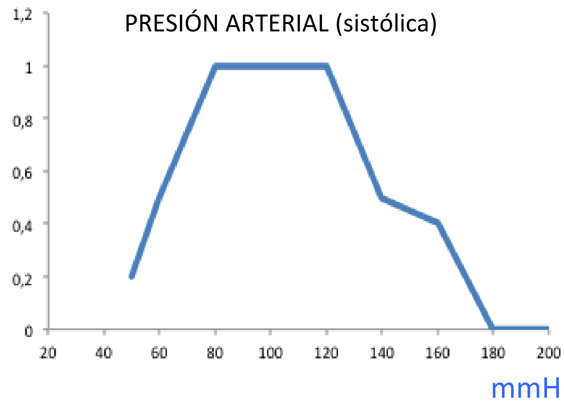
La clave para poder tomar una decisión adecuada está en el proceso de normalización de los datos.

Para el primer criterio, modelaremos con una transformación lineal a trozos las indicaciones de *American Heart Association*. Cuando la categoría es normal se le asigna un 1, antes de esa categoría la función crece desde 0 hasta 1, y después decrece según se muestra en la Figura 2.

Para el segundo criterio vamos a dividir el valor entre el máximo de toda la columna, es decir 8.

Figura 2: normalización del criterio C2 del Ejemplo 2 (Fuente: elaboración propia y *American Heart Association*)

Categoría	Sistólica (mmHg)
Hipotensión	menor de 80
Normal	80-120
Prehipertensión	120-139
Hipertensión grado 1	140-159
Hipertensión grado 2	160 o superior
Crisis hipertensiva	superior a 180



Para el tercer criterio calculamos $1 - x_{ij}/\max x_{ij}$, es decir, una vez obtenido cada valor dividido por el máximo de la columna –que es 11–, calculamos 1 menos los nuevos valores.

Tabla 4: normalización de los datos del Ejemplo 2

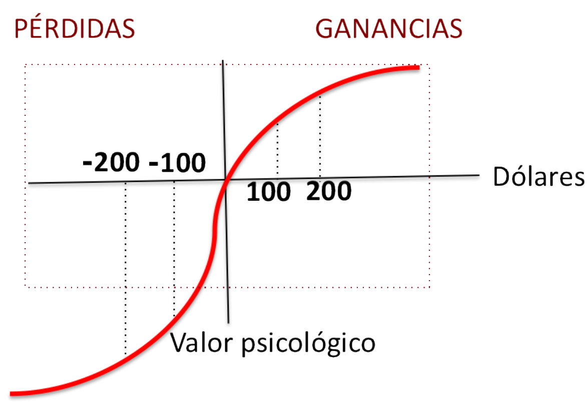
Empleados	C1	C2	C3	Media
P_1	0.425	0.875	0.727	0.384
P_2	0.925	0.75	0.455	0.460
P_3	0.65	1	0.000	0.217
P_4	0.28	0.875	0.182	0.154
P_5	1	0.625	0.364	0.455

En la Tabla 4 se muestra la normalización de los tres criterios del Ejemplo 2. En todos los casos, los valores normalizados representan (en una escala del 0 al 1 y de forma adimensional) cuál es el grado de parecido con el óptimo del criterio. Esto significa que, además de aplicar TOPSIS u otro método multicriterio de decisión, la media aritmética ya es capaz de proporcionar una información adecuada para tomar una decisión. En este caso, el empleado al que se le ofrecería el ascenso es a P_2.

SISTEMAS DE REFERENCIA Y DECISIONES

Uno de los puntos clave del método es la determinación de la solución ideal con las mejores puntuaciones de cada criterio y la solución anti-ideal con las peores puntuaciones en cada criterio. La cuestión es: ¿no sería suficiente con compararse con el ideal? La respuesta a esta pregunta la proporciona la *teoría prospectiva* o de las *perspectivas*, desarrollada por D. Kahneman y A. Tversky a finales de los años setenta (Kahneman, 2013). Desde el punto de vista de la geometría, esta teoría se basa en que el punto de referencia desde el que se decide es fundamental. En la Figura 3 se muestra una estimación de la diferencia que supone la ganancia de 100 o 200 dólares y la pérdida de la misma cantidad de dinero. Está claro que la respuesta a la pérdida de 100$ es más enérgica que la respuesta a la ganancia de 100$.

Figura 3: representación de la aversión al riesgo (Fuente: elaboración propia a partir de Kahneman (2013, p. 368))



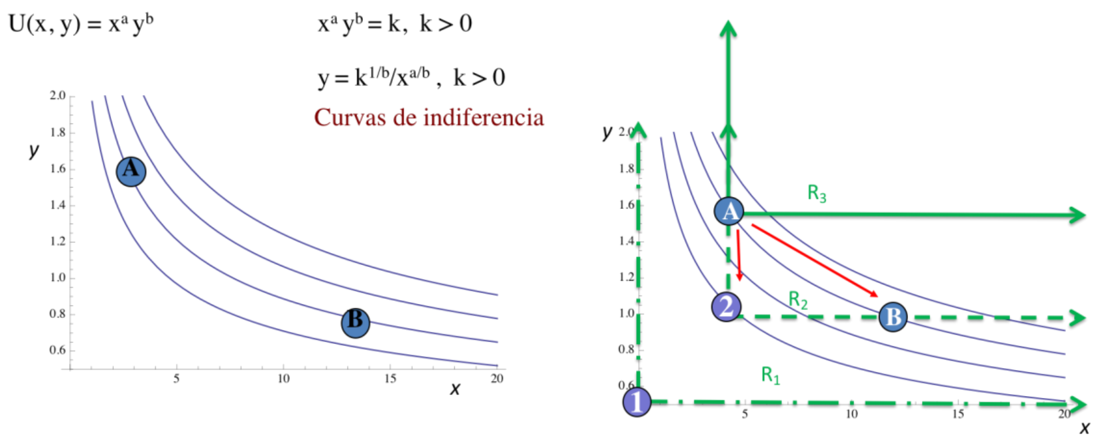
La función de valoración tiene forma de "S" y es asimétrica (Figura 3) y esta asimetría tiene consecuencias claras en la toma de decisiones. Se estima que una pérdida tiene un impacto 2.5 veces superior a un beneficio de la misma magnitud (Rey Rodríguez, 2021). Para ver las repercusiones, supongamos que la satisfacción o utilidad que obtiene un consumidor cuando disfruta de una determinada cantidad de dos bienes x, y, se modela mediante la función de utilidad $U(x,y)$. Cuando se analizan las curvas de indiferencia[2] de la función de

[2] Las curvas de indiferencia son combinaciones de los bienes x, y, para los cuales la satisfacción de un consumidor es idéntica. Si la función de utilidad es $U(x,y)$, la curva de indiferencias de nivel $k > 0$ se expresa con la ecuación $U(x,y) = k$.

utilidad (Figura 4a), si se hace con un punto de vista clásico, el punto de referencia es el origen de coordenadas (marcado con 1 en la Figura 4b) y el sistema de referencia es R_1.

Un consumidor se encuentra en la situación 2 de la Figura 4b y le proponen dos posibles cambios que le proporcionan la misma utilidad: aumentar x, y pasar a A o aumentar y para pasar al punto B, ambos representados en la Figura 4b (Kahneman, 2013, p. 380). Para la teoría clásica, el sistema de referencia sigue siendo R_1, sin embargo, para la teoría de la perspectiva, el sistema de referencia ahora es R_2.

Figura 4: representación geométrica del método TOPSIS (Fuente: elaboración propia a partir de Kahneman (2013, p. 368))



(a) (b)

Supongamos que el consumidor elige pasar al punto A, con lo cual, su sistema de referencia ya es R_3. Si ahora se le propone que se replantee quedarse en A o pasar a B, el nuevo sistema de referencia (nueva perspectiva) hace que permanecer en A signifique no ganar ni perder en x ni en y, mientras que pasar a B significa ganar en x y perder en y. Como se muestra en la Figura 3, las ganancias deberían ser al menos 2.5 veces las pérdidas para que tuviese sentido considerar el cambio.

La asimetría en el valor psicológico de las pérdidas y de las ganancias es coherente con la proximidad relativa que se calcula con el método TOPSIS, en la cuál es más decisiva la distancia al anti-ideal que la distancia al ideal.

FUNCIÓN DISTANCIA: ELEMENTO PARA REFLEXIÓN EN EL AULA

La necesidad de medir formas, objetos, etc., que da lugar a la aparición de la geometría, es un buen ejemplo para recordarnos a los profesores e investigadores que las matemáticas no son patrimonio nuestro. Si a un conductor le preguntamos, de forma poco precisa, ¿a cuánto está Cartagena de Barranquilla?, la respuesta podría ser "aproximadamente a dos horas" o "aproximadamente 120 km". Aunque en matemáticas el intervalo de tiempo no suele considerarse una distancia, lo cierto es que en la vida cotidiana ambas se usan como una distancia.

Si acudimos al diccionario de la Real Academia Española, la palabra "distancia" tiene cinco acepciones, de las cuales tres hacen referencia a las matemáticas:

> Del lat. *distantia*.
>
> 1. f. Espacio o intervalo de lugar o de tiempo que media entre dos cosas o sucesos.
> 2. f. Diferencia, desemejanza notable entre unas cosas y otras.
> 3. f. Alejamiento, desvío, desafecto entre personas.
> 4. f. Geom. Longitud del segmento de recta comprendido entre dos puntos del espacio.
> 5. f. Geom. Longitud del segmento de recta comprendido entre un punto y el pie de la perpendicular trazada desde él a una recta o a un plano.

La aparente ambigüedad entre tiempos y espacios incluso se hace más llamativa cuando para desplazarse a un lugar situado a pocos kilómetros, por la orografía, las condiciones del tráfico, la disposición de las calles, etc., se requiere mucho más tiempo que para ir a otro mucho más alejado. De acuerdo con J. Gómez (2011)

> […] lo que ocurre es que cuando uno se imagina un trayecto, lo dibuja en su mente de manera geométricamente ideal, a veces incluso casi en línea recta; y la realidad no es geométricamente ideal […]. Los cálculos están determinados porque las manzanas de casas no son perfectamente cuadradas, los cruces de las calles no describen ángulos rectos o perfectos … ¿Significa eso que es imposible diseñar un buen trayecto para ir a trabajar por la mañana?

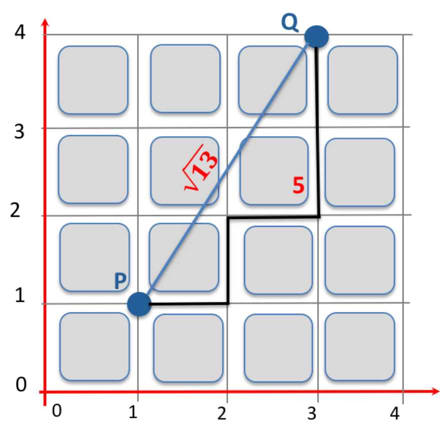
Evidentemente, a pesar de todo somos capaces de diseñar el trayecto, lo que sucede es que la distancia euclídea[3] no parece la más adecuada para medir distancias en las ciudades. A principios del siglo pasado, Hermann Minkowski (1864-1909) propuso una distancia mucho más útil para ese cometido, la conocida como *distancia Manhattan*, *distancia taxicab* o *distancia de Minkowski*.

Dados dos puntos del plano, $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, la distancia de Taxicab entre P y Q viene dada por

$$d_T(P, Q) = |\, p_1 - q_1| + |\, p_2 - q_2|.$$

Si suponemos que la Figura 5 representa el plano de una ciudad y los recuadros en gris son edificios, la distancia que deberíamos recorrer para ir del punto $P = (1,1)$ a $Q = (3,4)$ no puede ser $d(P, Q) = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ (que es la que nos proporciona la distancia euclídea), porque supone atravesar algunos edificios. Sin embargo, la distancia Taxicab mide el recorrido real sin atravesar edificios $d_T(P, Q) = |2| + |3| = 5$ unidades.

Figura 5: distancias euclídea y Taxican entre los puntos P y Q



Pero el cambio de la distancia euclídea por la distancia Taxicab no solo permite dejar de atravesar edificios, como veremos a continuación, puede suponer modificaciones en la toma de decisiones. En definitiva, el método TOPSIS se fundamenta en un cociente de distancias a dos puntos fijos, por lo tanto, la elección de la función distancia puede influir decisivamente.

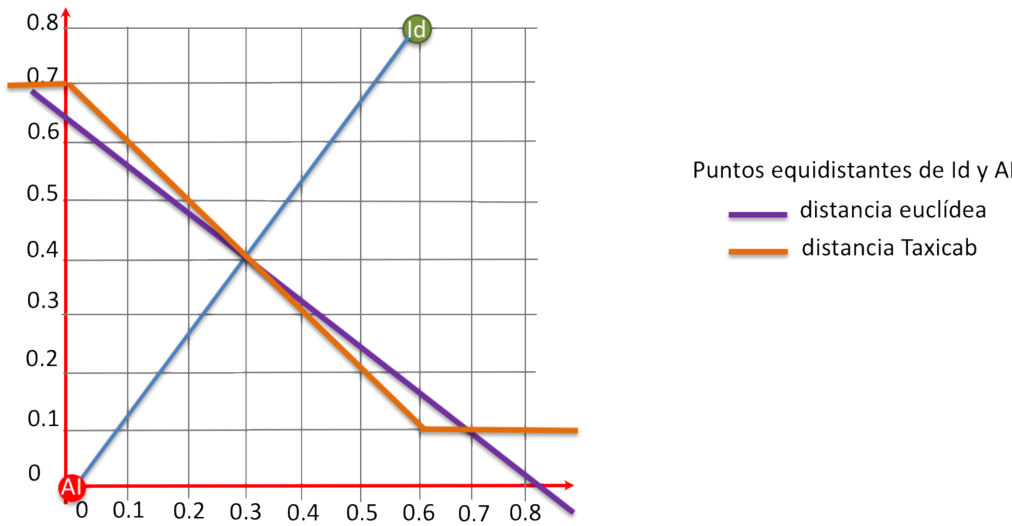
[3] La distancia euclídea entre $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ se define de la siguiente manera: $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.

Para ver la importancia de la distancia elegida en la toma de decisiones, vamos a considerar los datos del Ejemplo 1. En este caso, los puntos AI = (0, 0) e Id = (0.6, 0.8), son el anti-ideal e ideal (respectivamente). Para los puntos P que equidistan de AI e Id, la proximidad relativa del método TOPSIS es 0.5.

$$R_P = \frac{d(AI,P)}{d(AI,P)+d(I,P)} = 0.5,$$

y este valor marca la frontera entre los que están más alejados del ideal que del anti-ideal y los que están menos alejados.

Figura 6: representación de puntos equidistantes de Id y de AI



Si la distancia que utilizamos es la euclídea, los puntos equidistantes son los del conjunto $\mathcal{P}_1$,

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \left(x, \frac{1}{8}(5-6x) \right), \ x \in \mathbb{R} \right\},$$

que, como es bien conocido, es la mediatriz del segmento que une Id y AI.

Si la distancia utilizada es la distancia Taxicab, los puntos equidistantes son los del conjunto $\mathcal{P}_2$,

$$\mathcal{P}_2 = \{(x, 0.7-x), x \in [0, 0.6]\} \cup \{(x, 0.7), x < 0\} \cup \{(x, 0.1), x > 0.6\}.$$

Como puede verse en la Figura 6, los conjuntos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ no son iguales y, por lo tanto, los puntos más cercanos a Id no son los mismos con d que con d_T.

CONCLUSIONES

En la sociedad actual, la comprensión y el uso de las matemáticas, al menos en cierto grado, resultan fundamentales para afrontar cuestiones del mundo que nos rodea. De ahí que, desde distintos foros de evaluación y análisis para el desarrollo, se esté haciendo hincapié en la necesidad de que nuestros estudiantes sean capaces de reconocer la presencia de las matemáticas en el mundo y que estas les ayuden a emitir juicios críticos y decisiones bien fundamentadas.

Para poder tomar una decisión se necesita conocer, aunque sea de forma aproximada, las distintas alternativas y poder compararlas entre ellas o con alternativas externas. El éxito de la decisión se fundamentará, entre otras cosas, en una elección adecuada de la función distancia y una normalización de los datos que permita el manejo conjunto de todos ellos. Todos estos son aspectos en los que la geometría juega un papel fundamental y pueden abordarse en las aulas de matemáticas, sobre todo si se trabaja con ejemplos adecuados al nivel del estudiante y que reflejen la realidad del entorno de nuestros estudiantes.

REFERENCIAS

Acuña-Soto, C. M., Liern, V. y Pérez-Gladish, B. (2020). Multiple criteria performance evaluation of YouTube mathematical educational videos by IS-TOPSIS. *Operational Research 20*(4), 2017-2039.

Acuña-Soto, C. M., Liern, V. y Pérez-Gladish, B. (2021). Normalization in TOPSIS-based approaches with data of different nature: Application to the ranking of mathematical videos. *Annals of Operations Research, 296*(1-2), 541-569.

Alsina, C. (2000). *Geometría y realidad*. Recuperado de http://claudialsina.com/geometria-y-realidad

Gómez, J. (2011). *Cuando las rectas se vuelven curvas. Las geometrías no euclídeas*. Villatuerta, España: RBA Coleccionables S.A.

Hwang, C. L. y Yoon, K. (1981). *Multiple* attribute *decision making methods and applications*. Berlín, Alemania: Springer.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1984). Choices, values, and frames. *American Psychologist, 39*(4), 341-350.

Kahneman, D. (2013). *Pensar rápido, pensar despacio*. Barcelona, España: Penguin Random House.

Ouenniche, J., Pérez-Gladish, B. y Bouslah, K. (2018). An out-of-sample framework for TOPSIS-based classifiers with application in bankruptcy prediction. *Technological Forecasting and Social Change*, *131*(C), 111–116.

Rey Rodríguez, L. (2021). *Teoría de la* perspectiva*: cómo tomamos decisiones de inversión.* Fundspeople. Recuperado de https://fundspeople.com/es/glosario/teoria-perspectiva-decisiones-de-inversion

Robbins, S. y Judge, T. (2017). *Comportamiento organizacional*. México DF, México: Pearson.

Robson, D. (2019). El efecto señuelo, el sencillo truco que usan las empresas para que compres el producto más caro. BBC Worklife. Recuperado de
https://www.bbc.com/mundo/vert-cap-49375600

LOS CUADERNOS DE PEIRCE-KRIPKE

Arnold Oostra
Universidad del Tolima
noostra@ut.edu.co, aaoostra@gmail.com

Los gráficos existenciales, creados por Charles S. Peirce a finales del siglo XIX, constituyen una versión geométrica bidimensional de la lógica clásica. Estos diagramas se desarrollan sobre una hoja, pero también se pueden considerar varias hojas unidas de alguna manera, dando lugar a un auténtico cuaderno. Por un lado, esto da como resultado un modelo natural para lógicas modales, que corresponde a un modelo de Kripke. Por otra parte, tal cuaderno es un haz sobre cierto espacio topológico, que a su vez constituye uno de los objetos geométricos más versátiles y poderosos.

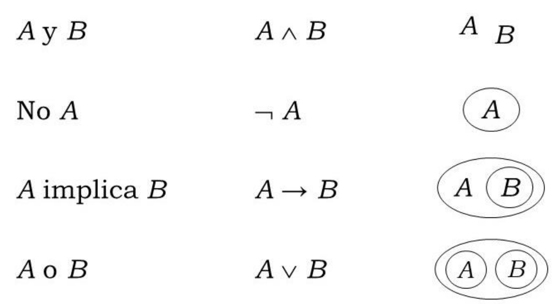
INTRODUCCIÓN

Salvo en algunos contextos excepcionales, los diagramas han sido subestimados en la matemática actual. En la lógica matemática es quizás donde menos se esperaría su uso, pero recientemente los diagramas se están abriendo un lugar en esta disciplina, gracias a los gráficos existenciales de Charles S. Peirce. Los aportes de este científico y pensador norteamericano durante la década de 1880 fueron fundamentales para el desarrollo de la lógica de predicados de tipo algebraico, como se usa hoy en día en toda la matemática. En esos años, Peirce concibió la idea de dibujar las fórmulas lógicas mediante diagramas bidimensionales, representando los sujetos con líneas y las relaciones o predicados con nodos. A un nodo puede converger cualquier cantidad de líneas, según los sujetos relacionados por el predicado simbolizado. Por otro lado, cada línea se puede ramificar para conectarse con cualquier número de nodos. Varios lustros después, en 1896, Peirce introdujo el óvalo como signo para la negación, completando así su sistema de *gráficos existenciales*. Para que tengan un pleno sentido lógico, estos diagramas están acompañados de adecuadas reglas de transformación que permiten realizar de manera del todo gráfica cualquier demostración de la lógica de predicados (Zeman, 1964; Roberts, 1973; Thibaud, 1982, Zalamea, 1997; Zalamea, 2010).

Oostra, A. (2022). Los cuadernos de Peirce-Kripke. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 39-44. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

La parte más sencilla de los gráficos, a la que Peirce llamó *Alfa*, se cristaliza al considerar los gráficos sin líneas. En ese caso, solo hay nodos sin líneas asociadas, que corresponden a sentencias o proposiciones. Escribir una letra significa afirmar una proposición; escribir varias, significa afirmarlas todas; encerrar una letra o una combinación de letras significa negar el contenido del encierro –o *corte*, como lo llamó Peirce–. La Figura 1 muestra los gráficos Alfa para los conectivos proposicionales básicos.

Figura 1: gráficos Alfa para los conectivos proposicionales



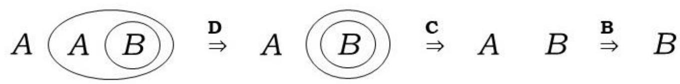
Las reglas de transformación para los gráficos Alfa son las siguientes:

- **Borramiento.** En un área par, esto es, rodeada por un número par de cortes, está permitido borrar cualquier gráfico.
- **Escritura.** En un área impar está permitido dibujar cualquier gráfico.
- **Iteración.** Está permitido copiar cualquier gráfico en su misma área o en el interior de cortes dentro de esa área, que no formen parte del gráfico que se va a iterar.
- **Desiteración.** Está permitido borrar cualquier gráfico si persiste una copia de este en su área o en algún área que lo rodea.
- **Corte doble.** Está permitido dibujar un corte doble, consistente en dos cortes encajados sin letras ni cortes en el área comprendida entre los dos, alrededor de cualquier gráfico en cualquier área. También está permitido borrar un corte doble dejando su contenido.

La Figura 2 muestra una demostración gráfica de *modus ponendo ponens*. Con estas reglas se pueden realizar demostraciones para todas las deducciones de la lógica proposicional. Incluso cuando no hay premisas, esto es, cualquier tautología se puede demostrar de manera gráfica a partir de la hoja en blanco.

Las mismas reglas, adaptadas de manera adecuada a las *líneas de identidad* que representan los sujetos, completan el sistema de gráficos existenciales, al que Peirce denominó *Beta*. Este sistema permite realizar demostraciones gráficas para todas las deducciones de la lógica de predicados.

Figura 2: demostración gráfica de *modus ponendo ponens*



DE LA HOJA A LOS CUADERNOS

Peirce llamó *hoja de aserción* a la superficie plana sobre la que se desarrollan los gráficos existenciales. Los gráficos que se pueden demostrar a partir de la hoja en blanco corresponden a las tautologías o verdades de la lógica, por ello la hoja se interpreta como el universo de las posibilidades de verdad.

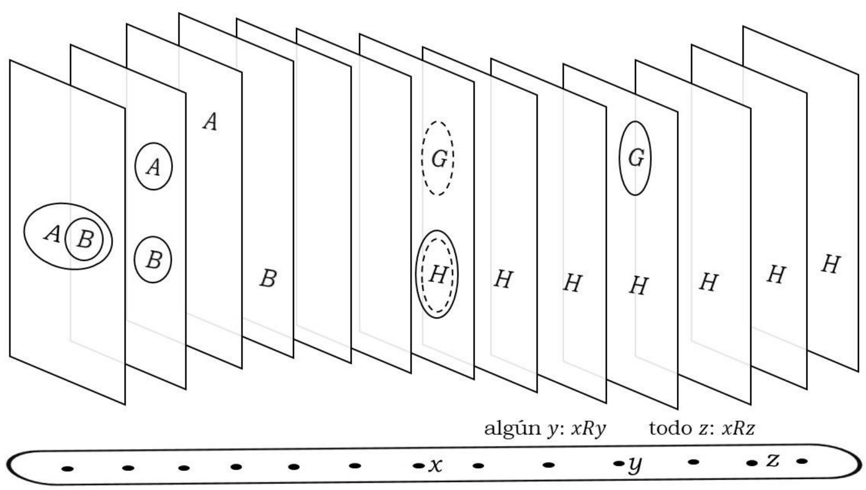
Por otro lado, la interpretación básica de los gráficos Alfa indica que escribir una sentencia sobre la hoja significa que ella se acepta como verdadera, o que ella se afirma. Eso entraña que la conjunción no requiere de un signo especial. En ese sentido, cuando se realiza la demostración gráfica de que a partir de determinadas premisas se obtiene cierta conclusión, el primer paso es dibujar los gráficos que representan las premisas. A partir de este hecho, la hoja de aserción ya no es el universo de todas las posibilidades de verdad, sino el universo de todas las posibles consecuencias de ciertas premisas. De esta manera, en cualquier hoja se tiene la ilimitada libertad matemática de dibujar los gráficos que se quieran. Pero, una vez trazados, la hoja determina la inexorable necesidad matemática de todas las consecuencias de esos gráficos.

Luego surge la idea de considerar varias hojas de aserción, en cada una de las cuales se dibujan algunos gráficos con total libertad. Incluso, no se excluye la posibilidad de que el significado de los gráficos en una hoja contradiga el de los diagramas en otra. Si estas hojas se juntan o se pegan de alguna manera, se obtiene un auténtico cuaderno, en el cual está permitido escribir en cualquier hoja con toda libertad, sin la forzosa coherencia que se espera en un libro. Correspondiendo a los diferentes modelos de cuadernos, en el conjunto de las hojas se considera una relación binaria R que puede ser un orden lineal, o una relación circular, o incluso la igualdad –esta última opción corresponde a una colección de hojas sueltas–. Imaginando cada hoja “sobre” el conjunto (X, R) de las hojas con su relación, y teniendo en cuenta que en cada hoja se desarrolla la lógica clásica, este cuaderno corresponde con exactitud a un *modelo de Kripke* (López, 2013). Por ello, se propone llamar *cuaderno de Peirce-Kripke* a un conjunto de hojas de aserción relacionadas de una manera específica entre sí.

CORTES QUEBRADOS Y LA LÓGICA MODAL

Los cuadernos de Peirce-Kripke permiten dar una interpretación natural a otro elemento gráfico introducido por Peirce que es el *corte quebrado*. Esta lectura es del todo coherente con la idea del pensador, por un lado, y con el uso de los modelos de Kripke para la lógica modal, por el otro. Un corte quebrado es un corte con trazo interrumpido, o dibujado con guiones separados. Si se imagina esa figura en un cuaderno con hojas traslúcidas, un corte borroso significa que existe un corte en alguna hoja situada más adelante –o más atrás, según como se mire–. De manera más técnica, un gráfico G encerrado por un corte quebrado en la hoja x significa que en alguna hoja y tal que xRy el gráfico aparece encerrado con un corte continuo usual, es decir, que el gráfico G es falso en la hoja y. De manera consecuente, un gráfico H encerrado por un corte doble, el corte exterior continuo y el interior quebrado, significa que el gráfico H es verdadero en todas las hojas z tales que xRz. La Figura 3 ilustra estas nociones.

Figura 3: el corte quebrado en un cuaderno de Peirce-Kripke



En los modelos de Kripke, que formalizan la idea de los mundos posibles, la validez de una fórmula en algún punto posterior se interpreta como la *posibilidad* de la fórmula, y su validez en todos los puntos posteriores como su *necesidad*. En una de las interpretaciones dadas por Peirce, un corte quebrado indica que lo que encierra es posiblemente falso. En los cuadernos de Peirce-Kripke estas diferentes ideas de los dos pensadores convergen de manera perfecta. Así, con los cortes quebrados se pueden representar las fórmulas lógicas *modales*. Según Peirce, estos cortes quebrados se enmarcan en sus gráficos *Gama*, así que ahora se denominan gráficos Gama modales (Molina, 2001; Oostra, 2012).

En cada hoja se conservan las reglas de transformación Alfa y Beta. Respecto a los cortes quebrados, los cuadernos permiten deducir algunas reglas de manera muy evidente. Por ejemplo, el permiso de escribir siempre un corte doble con el corte exterior continuo y el interior quebrado, y con el área interior vacía. Otra regla que se observa con claridad es que está permitido distribuir tal corte doble respecto a los gráficos que encierra. En contraste, los cuadernos facilitan visualizar las dificultades que se presentan al permitir la iteración y desiteración de gráficos a través de cortes quebrados. Por fin, el borramiento de un corte continuo transformándolo en un corte quebrado, o la escritura de un corte quebrado en uno continuo, fueron postulados por Peirce. En los cuadernos, se observa que estas reglas solo valen para determinadas relaciones R, como es bien sabido en la teoría de los modelos de Kripke.

De esta manera, los cuadernos de Peirce-Kripke ayudan a comprender cómo diferentes reglas de transformación para el corte quebrado dan lugar a variados sistemas lógicos gráficos, correspondientes a diversas lógicas modales.

HACES

Un haz es una de las estructuras más versátiles y potentes de la geometría, y quizás de toda la matemática. Se puede entender como una familia de objetos de cualquier tipo que se despliega sobre los abiertos de un espacio topológico base. Esto induce a su vez una topología sobre las fibras, así que al final un haz consiste en dos espacios topológicos conectados por un homeomorfismo local (Tennison, 1975).

Es bien conocido que los modelos de Kripke sobre una relación de orden R constituyen un haz. De manera reciente, se estableció una topología adecuada sobre el conjunto X con cualquier relación R tal que, de forma natural, un modelo de Kripke es un haz sobre los abiertos del espacio resultante (Prada, 2018). De esta manera, un cuaderno de Peirce-Kripke es también un haz de hojas de aserción, en el que la lógica se va desplegando de manera continua.

REFERENCIAS

López, K. (2013). *Modelos de Kripke para lógicas modales*. Trabajo de grado (programa de Matemáticas con énfasis en Estadística), Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Molina, F. (2001). *Correspondencia entre algunos sistemas de lógica modal y los gráficos existenciales Gama de Peirce*. Trabajo de grado (programa de Matemáticas con énfasis en Estadística), Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Oostra, A. (2012) Los gráficos existenciales Gama aplicados a algunas lógicas modales intuicionistas. *Cuadernos de Sistemática Peirceana, 4*, 27-50.

Prada, R. (2018). *Gráficos existenciales Gama, modelos de Kripke y haces*. Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Roberts, D. (1973). *The existential graphs of Charles S. Peirce*. La Haya: Mouton.

Tennison, B. R. (1975). *Sheaf theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Thibaud, P. (1982). La lógica de Charles S. Peirce: del álgebra a los gráficos. Madrid: Paraninfo.

Zalamea, F. (1997). Lógica topológica: una introducción a los gráficos existenciales de Peirce. *Memorias del XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Zalamea, F. (2010). Los gráficos existenciales peirceanos. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Zeman, J. (1964). *The graphical logic of C. S. Peirce*. Disertación doctoral, Chicago, University of Chicago.

ARGUMENTACIÓN EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS: PERSPECTIVAS, RETOS Y RUTAS DE INVESTIGACIÓN

Jorge Toro
Universidad de Antioquia
jandres.toro@udea.edu.co

En este artículo se discuten posibles respuestas a los siguientes interrogantes: ¿se discuten tareas con los estudiantes en las clases de matemáticas?, ¿se planifican y diseñan tareas que favorezcan la interacción y la participación de los estudiantes en las clases de matemáticas?, ¿cómo responder a dudas, preguntas o intervenciones de los estudiantes?, ¿cómo se podría hacer una gestión de los errores de los estudiantes para favorecer el aprendizaje y la argumentación?, ¿se considera posible investigar sobre prácticas argumentativas en lecciones habituales de clases de matemáticas? Estas cuestiones hacen parte de las prácticas habituales de profesores de matemáticas y pueden ser de interés para profesores tanto en formación como en ejercicio y, por supuesto, para los formadores de estos profesores.

INTRODUCCIÓN

Considere el siguiente fragmento de una lección de la clase de matemáticas de décimo grado (estudiantes de entre 15 y 16 años), donde la profesora y sus estudiantes (grupo femenino) discuten la tarea *Construir con regla y compás un triángulo equilátero, luego verificar con el transportador si en realidad es un triángulo equilátero.* Las estudiantes han empezado a resolver la tarea de manera individual en su cuaderno, la profesora pasa por los puestos de las estudiantes, mientras tiene lugar la pregunta de una estudiante quien tiene dudas sobre la medida de un ángulo del triángulo equilátero.

50.	Clara:	¿Uno puede medir 59°?
51.	Profesora:	Uno puede medir 59°. Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60°, sin embargo, recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error, ¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?
52.	Estudiantes:	De dos...
53.	Profesora:	¿De dos qué?

Toro, J. (2022). Argumentación en la clase de matemáticas: perspectivas, retos y rutas de investigación. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 45-59. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

54.	Anny:	Adelante y atrás.
55.	Profesora:	¿Pero de dos qué? ¿Centímetros? ¿Milímetros?
56.	Isabel:	¡Centésimas!
57.	Profesora:	¿Centésimas?
58.	Estudiantes:	(Risas)
59.	Profesora:	¿Qué es lo que estamos midiendo?
60.	Estudiantes:	Grados.
61.	Profesora:	Lo que estamos midiendo...
62.	Anny:	De dos grados.
63.	Profesora:	Sería de dos grados, porque lo que estamos midiendo ¿qué son?
64.	Estudiantes:	Grados.
65.	Profesora:	¡No!
66.	Isabel:	¿Triángulos?
67.	Estudiantes:	¡Ángulos!
68.	Profesora:	(Asiente con la cabeza) Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que los ángulos se miden son en grados, no se miden en centímetros, ni milímetros... Porque los ángulos... Eh... nos están mostrando es la amplitud, estamos midiendo es la amplitud que hay entre un segmento y otro, cuando estamos midiendo una longitud esa sí la estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros (...)

Imagine que es el profesor en esta clase e indague por los siguientes interrogantes: ¿discute tareas con sus estudiantes?; si es así, ¿cómo lo hace?; ¿planifica y diseña tareas para tal fin? Según su experiencia y conocimiento de las matemáticas, ¿cómo concibe el aprendizaje?, ¿cómo afrontaría estas situaciones en una lección de clase?, ¿cómo responde a dudas, preguntas o errores de sus alumnos?

Ahora suponga que es un investigador interesado en indagar respecto a la argumentación en la clase de matemáticas y cuestiónese tomando como base las siguientes preguntas: ¿encuentra posibles aspectos interesantes en este fragmento?, ¿podría este fragmento ser analizado de acuerdo con su postura investigativa respecto a la argumentación?, ¿considera que la tarea presentada por la profesora puede favorecer la argumentación?, ¿se le ocurre algún método para reconocer la argumentación en este fragmento?, ¿cree posible hacer un estudio sobre la argumentación en una lección habitual de una clase de matemáticas?

En este documento se exploran respuestas a algunas de estas cuestiones. Por ello, en primer lugar, se da una mirada al currículo de matemáticas en algunos países; en segundo lugar, se hace un análisis de resultados en estudiantes colombianos respecto a pruebas estandarizadas; en tercer lugar, se precisan perspectivas teóricas acerca de la argumentación; en cuarto lugar, se indican y discuten líneas investigativas sobre argumentación en Educación Matemática; en quinto lugar, se analiza el fragmento tomando como referencia una posición particular que es resultado de una investigación doctoral (Toro, 2020); y en sexto lugar, se muestran retos y preguntas que abren el espacio a posibles rutas de investigación en este campo.

UNA MIRADA AL CURRÍCULO EN ALGUNOS PAÍSES

La importancia dada a la argumentación en Educación Matemática puede reconocerse en la atención que le prestan instituciones encargadas de la organización y planeación de estándares. Tal es el caso de Estados Unidos, donde de un lado, en los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2003) se comenta que

> los estudiantes pueden aprender a razonar a través de la discusión de las argumentaciones de los compañeros […] En las clases en las que se anima a los alumnos a exponer lo que piensan y en las que cada uno contribuye a evaluar el pensamiento de otros, se proporciona un rico ambiente para el aprendizaje del razonamiento matemático. (p. 61)

Y, de otro lado, en los *Common Core State Standars for Mathematics* (CCSSI, 2010), que describen ocho estándares para la práctica matemática, se plantea "[c]onstruir argumentaciones correctas y criticar el razonamiento de otros" (p. 6). Este estándar propone que el profesor promueva en sus estudiantes el planteamiento de conjeturas, el reconocimiento y uso de contraejemplos, la justificación y comunicación de conclusiones, la comparación y la eficacia de argumentos plausibles, la construcción de argumentos usando referentes concretos tales como objetos, dibujos, diagramas y acciones, entre otros (CCSSI, 2010).

En Colombia, por su parte, en los *Estándares Básicos de Competencias* (MEN, 2006), se señalan diferentes procesos generales presentes en toda la actividad matemática. Entre ellos se plantea el proceso del razonamiento, en el que se debe “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración” (p. 51); y en el proceso de comunicación se deben usar distintas formas de expresar y comunicar preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos, que permitan cierta comprensión de las matemáticas.

Y en Chile, en las *Bases Curriculares de la Educación Básica* (MINEDUC, 2012), se precisa sobre la habilidad de argumentar y comunicar para desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido, se afirma que esta habilidad se aplica al tratar de convencer a otros sobre la validez de los resultados obtenidos.

> La argumentación y la discusión colectiva sobre la solución de problemas, escuchar y corregirse mutuamente, la estimulación a utilizar un amplio abanico de formas de comunicación de ideas, metáforas y representaciones favorece el aprendizaje matemático. (p. 89)

Considerar las propuestas curriculares de estos países indica que la tarea del profesor es cada vez más compleja (Selling, García y Ball, 2016). Respecto a ello, los *Principles to Actions, Ensuring Mathematical Success for All* (NCTM, 2014) señalan que el profesor en sus prácticas de enseñanza debe implementar acciones que promuevan el razonamiento, facilitar el discurso matemático y utilizar preguntas con el propósito de evaluar el razonamiento de los estudiantes, donde gestione diversos tipos de conocimientos –didácticos, epistémicos, curriculares, culturales, sociales, cognitivos, tecnológicos, regulatorios–.

Resultados de estudiantes colombianos en pruebas estandarizadas

En el Informe Nacional de Resultados para Colombia - PISA 2018 (ICFES, 2020) se señala cómo los estudiantes colombianos obtuvieron un rendimiento menor que la media de la OCDE en matemáticas (391) y otras áreas, y su rendimiento fue más cercano al de los estudiantes de países como Albania, México, la República de Macedonia del Norte y Qatar. Solo 35 % de los estudiantes alcanzó el Nivel 2 de competencia en matemáticas, nivel que se encuentra un poco debajo en comparación con Latinoamérica, pero muy inferior si se compara con el resto de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico OCDE.

De acuerdo con este mismo informe, es el Nivel 4 donde los estudiantes pueden estar en capacidad de elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones, y solo 2 % de los estudiantes colombianos que resolvieron la prueba se sitúan en este nivel.

De otro lado, en el contexto local, los estudiantes del último grado de la Educación Media presentan la prueba SABER 11, la cual está estructurada en tres competencias. Una de ellas es la argumentación, donde se evalúa la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en diversas situaciones.

Según los resultados de la última prueba SABER 11[1], aplicada en 2021, en promedio solo 6 % de los estudiantes de Medellín se ubican en el Nivel 4 de competencia, lo cual no difiere mucho de los resultados nacionales, donde este valor se ubica en 5 %. Sin embargo, este porcentaje es de solo 2 % en las instituciones educativas de los barrios de más bajos ingresos. En este nivel de competencia, los estudiantes deben ser capaces de hacer comparaciones y establecer relaciones entre los datos presentados, de identificar y extraer información local y global de manera directa, así como de resolver problemas y justificar la veracidad o falsedad de afirmaciones.

Los resultados de la prueba PISA y de la prueba SABER 11 reflejan diferentes falencias en las competencias matemáticas de los estudiantes colombianos y, de manera particular, de los de Medellín. Si bien estas falencias podrían deberse a diferentes situaciones como la inequidad del sistema educativo colombiano, la poca preparación de los estudiantes para atender este tipo de pruebas, o las posibles falencias en la articulación del currículo en las instituciones educativas, se considera que ellas podrían deberse a las competencias didáctico-matemáticas de los profesores al momento de plantear y diseñar diferentes tareas, en particular las que podrían favorecer la argumentación.

PERSPECTIVAS TEÓRICAS ACERCA DE LA ARGUMENTACIÓN

La argumentación ha logrado su desarrollo gracias al impulso interdisciplinario de filósofos, lógicos formales e informales, analistas del discurso y de la conversación, estudiosos de la comunicación y representantes de otras disciplinas, impulso que ha permitido que la argumentación se convierta en un objeto de estudio independiente, en expansión y con aplicación en diferentes campos del conocimiento.

[1] https://view.genial.ly/61fda1b2e940aa00121bafa4

Según Wenzel (2006) se podría hablar de tres perspectivas: la lógica, la dialéctica y la retórica. La perspectiva lógica se centra en los argumentos como productos textuales y tiende a analizar la argumentación como producto. La perspectiva retórica se centra en los procesos en los que interesa persuadir a un auditorio. Y la perspectiva dialéctica se centra en los procedimientos en los que interesa la interacción entre proponente y oponente con miras a convencer.

En relación con la perspectiva lógica, se resalta el modelo Toulmin, ampliamente aplicado en la investigación, el cual más que estudiar la argumentación enfatiza en la estructura del argumento; lo importante no son las relaciones que existen entre argumentos, sino las relaciones entre las diferentes componentes de un argumento (Pedemonte y Balacheff, 2016). En relación con dichos componentes, se distinguen los *datos*, elementos utilizados para justificar y validar la aserción; la *aserción*, enunciado conclusión; las *garantías*, reglas que permiten conectar datos y aserción; el *soporte*, el respaldo a la garantía; el *calificador modal*, la fuerza del argumento; y el *refutador*, la posible excepción a la garantía (Toulmin, 2007).

LÍNEAS INVESTIGATIVAS SOBRE ARGUMENTACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En lo concerniente a la argumentación, en el campo de la Educación Matemática se podría hablar de un discurso en construcción. Los avances que ha tenido ese discurso en las dos últimas décadas permiten señalar algunas implicaciones para la clase de matemáticas. Los reportes de investigación indican un interés en la argumentación en diferentes niveles educativos –desde la educación primaria (Krummheuer, 2013), la educación secundaria (Ayalon y Even, 2016), hasta el nivel universitario en la formación de profesores (Molina, Font y Pino-Fan, 2019)–; muestran que se han tenido en cuenta diferentes temáticas: de carácter geométrico (González y Herbst, 2013), algebraico (Whitenack, Cavey y Ellington, 2014), estadístico (Goizueta, 2019) o numérico (Fahse, 2017).

Así mismo, los resultados informan cómo se podría favorecer la argumentación en la clase de matemáticas –con actividades matemáticas adecuadas (Boero, 2011); con condiciones propicias (Solar y Deulofeu, 2016); con contextos específicos que incluyan la interacción en clase (Krummheuer, 2012); con el involucramiento de los estudiantes en la solución de tareas con cierto nivel de complejidad (Fielding-Wells, 2016); o con la participación de profesor y estudiantes en la argumentación colectiva (Conner et al., 2014)–. En lo que concierne al profesor se resalta su papel en estudios durante procesos de demostración (Knipping y Reid, 2015), en la orientación e interpretación de las discusiones de clase (Forman et al., 1998), en las estrategias utilizadas para preguntar a los estudiantes (Kosko, Rougee y Herbst, 2014), en el análisis de la estructura de argumentos (Metaxas, Potari y Zachariades, 2016), en cómo su conocimiento puede influenciar la discusión y el razonamiento de los estudiantes (Mueller, Yankelewitz y Maher, 2014), o en la gestión al planear y dirigir tareas (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016).

Estos avances en la investigación permiten afirmar que la argumentación es, sin duda, importante en la Educación Matemática, lo cual abre un espacio para considerar otras miras y realizar diferentes investigaciones. También se puede reconocer una línea de investigación en rápida expansión, con preguntas abiertas, para las cuales se requieren respuestas teóricas, metodológicas y pragmáticas.

ESTUDIO SOBRE LA ARGUMENTACIÓN DEL PROFESOR EN LECCIONES DE CLASE

De manera específica, el trabajo doctoral *Argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase* (Toro, 2020) intenta contribuir a la investigación en Educación Matemática en las líneas argumentación y demostración, y comunicación y lenguaje, en lo que refiere a comprender cómo es la argumentación del profesor de matemáticas en lecciones habituales de clase donde tienen lugar la discusión de una serie de tareas. Se adopta una perspectiva teórica, que se apoya en la articulación de dos consideraciones teóricas: la argumentación y el discurso en la clase de matemáticas. En esta tesis, de acuerdo con un enfoque interpretativo de corte cualitativo a partir de la observación de dos profesores de secundaria, se buscó responder la pregunta: ¿cómo es la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase? Para ello se plantearon tres preguntas auxiliares que dirigen el análisis de los datos: (i) ¿cuáles son las características de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?, (ii) ¿cuáles son los propósitos de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?, y (iii) ¿cuáles son las condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?

La respuesta a la primera pregunta auxiliar contempló considerar elementos del análisis del discurso y de aspectos teóricos, lo cual permitió identificar características en tres dimensiones. En la dimensión comunicativa se reconocen aseveraciones, preguntas y gestos o expresiones; en la dimensión interaccional se reconocen la participación, los medios y las normas de clase para convencer y discutir; y en la dimensión epistémica se reconocen el tratamiento del objeto matemático, los conceptos y las definiciones, el retomar otras lecciones, el tratamiento de errores, procedimientos y respuestas, y el justificar y/o refutar. Cada una de las dimensiones está acompañada de una serie de acciones del profesor (Ruthven y Hofmann, 2016), que permiten identificarlas en situaciones de lecciones de clase.

La respuesta a la segunda pregunta requirió de la inclusión de términos como intervención argumentativa y cierre, que permitieron identificar determinados propósitos educativos en la argumentación de los profesores en los diferentes fragmentos seleccionados para el análisis.

La respuesta a la tercera pregunta necesitó la adaptación de un referente teórico (Solar y Deulofeu, 2016), para poder identificar indicadores dentro de condiciones que activan la argumentación del profesor. Se identifican las siguientes condiciones propiciadoras: preguntas y oportunidades de participación en las estrategias comunicativas e interactivas; intervenciones argumentativas y cierres en el enfoque de la lección; tipo de tarea y procedimiento de solución de la tarea en el enfoque de la tarea; y tratamiento de objetos matemáticos, retomar otras lecciones, prever lecciones futuras y maneras de justificar y refutar en el conocimiento profesional.

A continuación, se retoma el escenario expuesto al comienzo de este documento. La profesora protagonista del fragmento tiene experiencia en la enseñanza de las matemáticas, ostenta un título de formación posgraduada en Educación Matemática y accedió de manera voluntaria a hacer parte de la investigación. La profesora tuvo autonomía para la preparación de sus lecciones y diseño de tareas.

Cada fragmento inicia con una intervención argumentativa (letra en azul) y termina con un cierre (en naranja); en algunos casos, la intervención argumentativa está precedida de turnos que la contextualizan; no siempre hay una intervención argumentativa y un cierre, puede presentarse más de una intervención argumentativa o más de un cierre. Al final de cada intervención de la profesora, destacada en letra cursiva, se incluye un marcador de posición con letras minúsculas, así como un código para caracterizar la reacción. En los análisis se discuten las diferencias de opinión y cómo la profesora logra convencer a los estudiantes, lo cual permite analizar la argumentación en el fragmento. Además, se indican los propósitos de la argumentación de la profesora y las condiciones que activaron dicha la argumentación.

50.	Estudiante 1:	¿Uno puede medir 59°?
51.	Profesora:	*Uno puede medir 59°* $_{aRet}$. *Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60°*$_{bExp}$, *sin embargo, recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error* $_{cRed}$ *¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?* $_{dAve}$
52.	Estudiantes:	De dos...
53.	Profesora:	*¿De dos qué?* $_{a}$
54.	Estudiante 2:	Adelante y atrás.
55.	Profesora:	*¿Pero de dos qué?... ¿Centímetros? ¿Milímetros?* $_{Red}$
56.	Estudiantes 3:	¡Centésimas!
57.	Profesora:	*¿Centésimas?* $_{Des}$
58.	Estudiantes:	*(*Risas*)*
59.	Profesora:	*¿Qué es lo que estamos midiendo?* $_{Ave}$
60.	Estudiantes:	Grados.
61.	Profesora:	*Lo que estamos midiendo* $_{Ret}$...
62.	Estudiante 2:	De dos grados.
63.	Profesora:	*Sería de dos grados* $_{aApr}$, *porque lo que estamos midiendo ¿qué son*? $_{b}$
64.	Estudiantes:	Grados.
65.	Profesora:	*¡No!* $_{Des}$
66.	Estudiante 3:	¿Triángulos?
67.	Estudiantes:	*¡Ángulos!*
68.	Profesora:	(*Asienta con la cabeza* $_{aApr}$) *Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que los ángulos se miden son en grados, no se miden*

en centímetros, ni milímetros... Porque los ángulos... Eh... nos están mostrando es la amplitud, estamos midiendo es la amplitud que hay entre un segmento y otro, cuando estamos midiendo una longitud esa sí la estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros ***bExp*** (...)

El fragmento que tiene lugar en una lección de geometría muestra cómo la argumentación de la profesora intenta vincularse con preguntas de las estudiantes y con dificultades al nombrar objetos matemáticos. A continuación, en las Tablas 1, 2 y 3 se enuncian las características correspondientes a cada una de las dimensiones.

Tabla 1: características de la dimensión comunicativa

Característica	Acciones
Aseveraciones	- Plantear aseveración para retomar y expandir intervención de un estudiante [51a-b] - Plantear aseveración para redireccionar la intervención del estudiante [51c] - Plantear aseveración para retomar la intervención anterior [61] - Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante [63a] - Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante [68b]
Preguntas	- Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante [55] - Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores [51d] - Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante [53a, 63b]
Gestos o expresiones	- Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante [65] - Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante [68a]

Una pregunta de una estudiante en [50], considerada acá como una diferencia de opinión, desencadena una intervención de la profesora en [51]. Siguen a esta intervención aseveraciones y preguntas de la profesora con las que además de intentar responder a la estudiante, pretende comunicar las matemáticas y lograr que las estudiantes se expresen de una manera acorde, o al menos esperada, al grado en el cual se encuentran. En particular, en este fragmento llama la atención cómo los actos verbales son acompañados de expresiones y gestos [65, 68a], con los cuales la profesora aprueba o desaprueba intervenciones de las estudiantes.

Tabla 2: características de la dimensión interaccional

Característica	Acciones
Participación	-Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante [51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 68] - Atender a duda presentada por un estudiante [51]
Normas de clase	- Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por él mismo [51c]
Convencer	- Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o un estudiante [51b-c, 68]

Se identifican como características de orden interaccional en este fragmento las siguientes: participación, normas de clase y convencer, las cuales permiten afirmar que la profesora considera importante vincular a sus estudiantes para dar respuesta a una pregunta, y busca plantear una justificación que logre convencer de la respuesta a la pregunta inicial y de la situación que esta desencadenó.

Tabla 3: características de la dimensión epistémica

Característica	Acciones
Tratamiento del objeto matemático	- Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta [51b, 68b] - Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático [53, 55, 59, 61, 63b]
Retomar otras lecciones	- Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta [51c]
Justificar o refutar	- Refutar la intervención de un estudiante [57, 65] - Presentar justificación para el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta [68b]

La dimensión epistémica en este fragmento presenta tres características: (i) el tratamiento del objeto al plantear propiedades y al solicitar claridad, (ii) retomar otras lecciones, y (iii) justificar o refutar. Estas características permiten reconocer no solo elementos discursivos en la argumentación de la profesora, sino también elementos que permiten reconocer una intención de educar en matemáticas.

Desde la intervención argumentativa en [50] hasta el cierre en [68] se pueden señalar, al menos, tres propósitos de la argumentación de la profesora: resolver preguntas de los estudiantes [51, 68], aclarar el procedimiento de solución de la tarea [51, 59, 63, 68] y puntualizar en las propiedades de los objetos matemáticos involucrados en el procedimiento de solución de la tarea [55, 57, 59, 61, 63, 68], en este caso ángulo y triángulo. Los tres propósitos señalados permiten identificar cómo la profesora, además de presentar la solución de una determinada tarea en la que se abordan aspectos matemáticos propios de la lección y del curso, está interesada en que sus estudiantes participen del discurso de clase.

La pregunta de Clara en [50] corresponde en este fragmento a la condición que activó, inicialmente, la argumentación en la profesora. La estudiante tiene dudas respecto a la figura que ha construido, observa que su triángulo no cumple de manera exacta con la indicación de la tarea, por lo cual recurre a una validación por parte de la profesora. Además de la pregunta de Clara, la profesora plantea una pregunta en [51d], para involucrar a las demás estudiantes en la respuesta. Pregunta que al parecer era solo de seguimiento al discurso, es decir, la profesora esperaba que las estudiantes respondieran ‘de dos ángulos’. Por lo cual, la manera como la profesora aborda la tarea a partir de la intervención de las estudiantes en [52], se convierte en una segunda condición que activó su argumentación, es decir no fue la tarea misma la que exigió una argumentación por parte de la profesora, sino la manera como la profesora aborda el desarrollo y comprensión de esta.

Retos en la investigación

De acuerdo con los apartados anteriores podrían señalarse diferentes retos para los profesores de matemáticas en formación y en ejercicio, para los formadores de profesores, para las facultades de Educación y para la comunidad de investigación en Educación Matemática, en relación con la argumentación en las clases matemáticas. Entre estos retos es posible resaltar trece: (1) apropiación del currículo y estándares curriculares por la comunidad educativa; (2) incorporación de la argumentación en las prácticas habituales de aula; (3) diseño y gestión de tareas que favorezcan la argumentación; (4) gestión de errores y de contingencias en lecciones de clase; (5) creación de oportunidades de comunicación y participación en las lecciones de clase, (6) creación de oportunidades de discusión de tareas en las lecciones de clase, (7) creación de oportunidades que permitan encontrar conexiones entre la explicación y la argumentación, o la demostración y la argumentación; (8) creación de un ambiente en las lecciones de clase que favorezca la justificación, la refutación, los contraejemplos, entre otros; (9) formación en competencias argumentativas a los futuros profesores; (10) investigaciones que consideren estudios longitudinales y naturaleza cuantitativa; (11) investigaciones que permitan encontrar vínculos entre modelación y argumentación; (12) investigaciones que se cuestionen por la orquestación de discusiones en clase para favorecer la argumentación; (13) investigaciones que profundicen en el estudio del discurso matemático del profesor en relación con la argumentación.

Referencias

Ayalon, M. y Even, R. (2016). Factors shaping students' opportunities to engage in argumentative activity. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, 575-601. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9584-3

Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 120-130). Rzeszów, Polonia: ERME.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. y Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86(*3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Fahse, C. (2017). Issues of a quasi-longitudinal study on different types of argumentation in the context of division by zero. *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Dublin, Irlanda: ERME.

Fielding-Wells, J. (2016). "Mathematics is just 1 + 1 = 2, what is there to argue about?": Developing a framework for argument-based mathematical inquiry. En B. White, M. Chinnappan y S. Trenholm (eds.), *Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 214-221). Adelaide: MERGA.

Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. y Brown, C. (1998). “You’re going to want to find out which and prove it”: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8*(6), 527-548.

Goizueta, M. (2019). Epistemic issues in classroom mathematical activity: There is more to students’ conversations than meets the teacher’s ear. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.007

González, G. y Herbst, P. (2013). An oral proof in a geometry class: How linguistic tools can help map the content of a proof. *Cognition and Instruction, 31*(3), 271-313. https://doi.org/10.1080/07370008.2013.799166

ICFES (2020). *Informe Nacional de Resultados para Colombia - PISA 2018.* Bogotá, Colombia: ICFES.

Knipping, C. y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 75-101). NY: Springer.

Kosko, K., Rougee, A. y Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal, 26,* 459-476. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0116-1

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas (coord..), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 61-78). Barcelona, España: Grao.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics, 84*(2), 249-265. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9471-9

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher’s pedagogical arguments using Toulmin’s model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 383-397. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9701-z

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá, Colombia: Autor.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares educación básica*. Santiago de Chile, Chile: Autor.

Molina, Ó., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Mueller, M., Yankelewitz, D. y Maher, C. (2014). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 369-387. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9354-x

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to actions ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Autor.

Pedemonte, B. y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior,* 41,104-122. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008

Ruthven, K. y Hofmann, R. (2016). A case study of epistemic order in mathematics classroom dialogue. *PNA*, *11*(1), 5-33. https://doi.org/10.30827/pna.v11i1.6079

Selling, S., García, N. y Ball, D. (2016). What does it take to develop assessments of mathematical knowledge for teaching?: Unpacking the mathematical work of teaching. *The Mathematics Enthusiast*, *13,* 35-51. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1364

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema,* 30, 1092-1112. http://dx.doi.org//10.1590/1980-4415v30n56a1

Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Toro, J. (2020). *Argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase.* Tesis doctoral, Universidad de Antioquia, Colombia.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona, España: Ediciones Península.

Wenzel, J. (2006). Three perspectives on argument. En R. Trapp (ed.), *Perspectives on argumentation* (pp. 9-26). NY, EUA: Idebate Press.

Whitenack, J., Cavey, L. y Ellington, A. (2014). The role of framing in productive classroom discussions: A case for teacher learning. *Journal of Mathematical Behavior* 33, 42-55. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.003

Encuentro de
GEOMETRÍA
y sus APLICACIONES
22 al 24 de junio de 2022

Cursillos

ASPECTOS ALGEBRAICOS EN LA GEOMETRÍA ELEMENTAL

Alberto Donado, Reinaldo Montañez y Jorge Hernández
Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Nacional, Universidad Distrital
adonado@pedagogica.edu.co, jrmontanezp@unal.edu.co, jahernandezp@udistrital.edu.co

La geometría es una de las ciencias más antiguas de la humanidad; aparece como una herramienta para resolver problemas de medidas. En el estudio de la geometría están presentes otras áreas de las matemáticas, como la aritmética y el álgebra. Un objetivo principal de este cursillo es recalcar este hecho para propender por una educación de carácter integral en el aula. Para lograr el eje central del cursillo, se ilustran de manera interactiva y dinámica algunos resultados conocidos que creemos interesantes para los asistentes.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la congruencia de figuras en el plano y en el espacio aparece para formalizar lo que en el mundo cotidiano se conoce como la "igualdad". En particular, y de manera intuitiva, dos figuras son congruentes si una de ellas se puede superponer en la otra. Por su parte, la semejanza refleja intuitivamente las ideas de ampliar o reducir figuras. Es de anotar que, en particular, la semejanza se puede abordar como una noción puramente algebraica o desde el estudio de las transformaciones geométricas.

Apoyados en la semejanza de triángulos, mostramos los siguientes dos resultados clásicos de la geometría: la concurrencia de las medianas y de las bisectrices de un triángulo, lo que lleva a que el punto de intersección de las bisectrices sea el centro de la circunferencia inscrita. Como veremos este segundo resultado es un corolario de la prueba de la concurrencia de las bisectrices, pero no del respectivo teorema. Con este ejemplo pretendemos hacer ver la conveniencia de demostrar, en muchos casos, un mismo resultado de varias maneras, pues si bien es cierto que hay corolarios que se desprenden directamente de los enunciados de los teoremas, existen otros que se desprenden de las pruebas mismas de los teoremas.

Ahora bien, otros resultados que nos ocupan en este documento tienen que ver con los teoremas clásicos de Ceva y Menelao, relacionados con la concurrencia y la colinealidad. Haciendo uso del teorema de Ceva se sigue la concurrencia

Donado, A., Montañez, R. y Hernández, J. (2022). Aspectos algebraicos en la geometría elemental. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 63-66. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

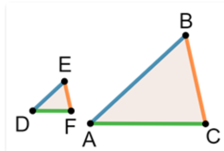
de las medianas y de las bisectrices, pero de las respectivas pruebas no se derivan los mismos corolarios de los teoremas mencionados al comienzo del documento. Finalmente, haciendo uso del teorema de Menelao se prueban entre otros, los teoremas de Pappus, de Pascal y de Desargues; teoremas que están ligados al álgebra abstracta (Oostra, 2005; Hilbert, 1930; Rincón, 1994).

El cursillo pretende ser autocontenido y dinamizado haciendo uso de la tecnología. En últimas, se busca, como siempre, motivar el estudio de la geometría a nivel escolar y mostrar sus relaciones con la matemática moderna.

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

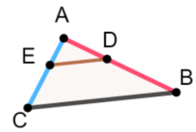
Para nuestro cursillo, es necesario que los asistentes tengan presente algunas definiciones y afirmaciones de geometría elemental. En particular, la definición de semejanza de triángulos y el teorema fundamental de la proporcionalidad (Moise y Downs, 1964).

Definición de semejanza de triángulos: Los ΔABC y ΔDEF son semejantes si y solo si $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F, \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$



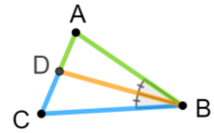
Teorema fundamental de la proporcionalidad: Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros lados, entonces determina sobre ellos, segmentos que son proporcionales a dichos lados.

En el ΔABC, sean D y E puntos sobre AB y AC tales que $DE \parallel BC$. Entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

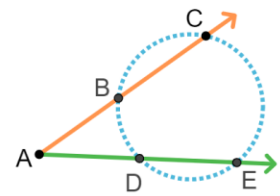


RESULTADOS QUE IMPLICAN LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Teorema de la bisectriz: Sea ΔABC. Si BD es bisectriz del $\angle ABC$, entonces $\frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB}$.



Teorema de la potencia de un punto a una circunferencia: Sean $\mathcal{C}$ una circunferencia y A un punto de su exterior. Sea l_1 una recta secante que pasa por A e interseca a $\mathcal{C}$ en los puntos B y C. Sea l_2 otra recta secante que pasa por A e interseca a $\mathcal{C}$ en los puntos D y E. Entonces, $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



Afirmaciones respecto a las medianas de un triángulo:

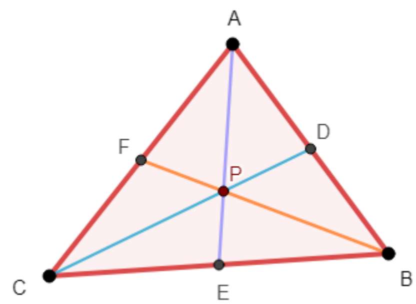
Las medianas de un triángulo son concurrentes. El punto de intersección de las medianas se llama *baricentro*.

Las medianas se intersecan a dos tercios de cada vértice.

De acuerdo con la figura, $BP = 2PF$, $AP = 2PE$ y $CP = 2PD$.

Los triángulos ΔAPF, ΔAPD, ΔDPB, ΔBPE, ΔEPC, ΔCPF tienen la misma área.

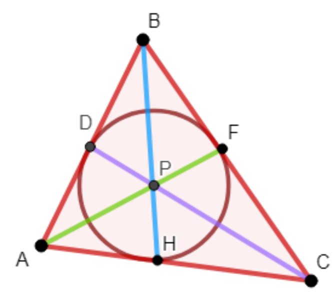
En la figura, P es el punto de intersección de las medianas del ΔABC.



Afirmaciones respecto a las bisectrices de un triángulo:

Las bisectrices de un triángulo son concurrentes. El punto de intersección de las bisectrices se llama *incentro*.

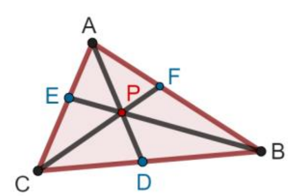
El punto de intersección de las bisectrices de un triángulo es el centro de la circunferencia inscrita.



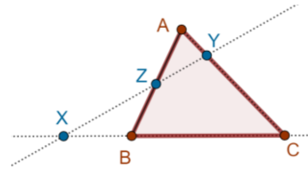
COLINEALIDAD Y CONCURRENCIA

A continuación, se presentan algunos resultados relacionados con la colinealidad, la concurrencia y algunas líneas notables de un triángulo, los cuales serán trabajados en el cursillo.

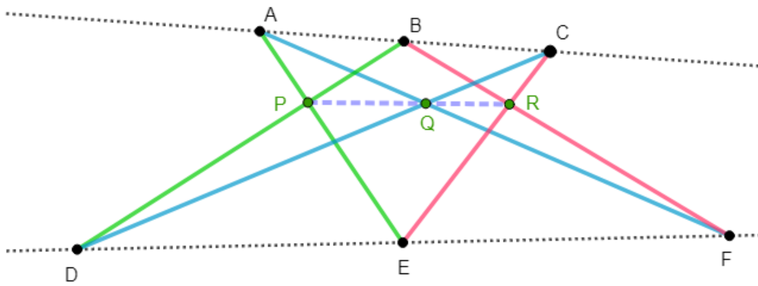
Teorema de Ceva: En el ΔABC, sean D, E, F puntos sobre BC, AC y AB respectivamente. Las cevianas AD, BE y CF son concurrentes sí y solo si $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.



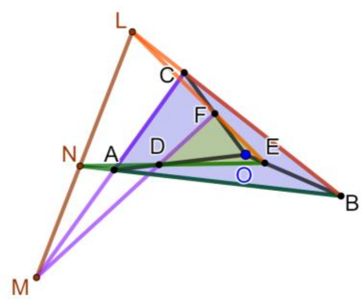
Teorema de Menelao: En el ΔABC, sean X, Y, Z puntos sobre BC, AC y AB (o sus prolongaciones) respectivamente. Los puntos X, Y, Z son colineales si y solo si $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.



Teorema de Pappus: Sean A, B, C tres puntos sobre una recta l_1 y D, E, F puntos sobre una recta l_2. Sean $P = AE \cap BD$, $R = BF \cap CE$, $Q = AF \cap CD$. Entonces los puntos P, Q, R son colineales.



Teorema de Desargues: Sean ΔABC y ΔDEF dos triángulos tales que AD, BE y CF concurren en un punto O. Sean $L = BC \cap EF$, $M = CA \cap FD$ y $N = AB \cap DE$. Demostrar que L, M, N son colineales.



REFERENCIAS

Hilbert, D. (1930). *Fundamentos de geometría* (reimpresión de traducción 1953 de séptima edición alemana (1930)). Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid. 1996.

Moise, E. y Downs, F. (1964). *Geometry*. EUA: Ed. Addison – Wesley. Harvard University.

Oostra, A. (2005). *Huellas en los Encuentros de Geometría y Aritmética*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Rincón, G. (1994). *Un recorrido por la geometría*. Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.

Trayectorias de la amplitud angular articulando la agrimensura con prácticas ancestrales Wayúu

Olga León, Fredy Barbosa, Meilis Ibarra, Neil Garrido y Jadrián Hernández
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
olleon@udistrital.edu.co, fabarbosam@correo.udistrital.edu.co, meibarraf@correo.udistrital.edu.co, ndgarridow@correo.udistrital.edu.co, jadahernandezc@correo.udistrital.edu.co

La educación matemática basada en el lugar rural es un constructo teórico que ayuda a articular la historicidad de la geometría empírica, las culturas rurales y el sistema educativo escolar. Dicha articulación realza el valor que tienen los saberes de las comunidades Wayúu en una educación matemática con todos y para todos. Este cursillo pretende aportar al diseño curricular de trayectorias de aprendizaje que incorporan la magnitud amplitud angular, la agrimensura y prácticas ancestrales de los indígenas Wayúu. Se desarrolla en tres partes relacionadas con la Educación Matemática Basada en el Lugar Rural, el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje de la amplitud angular y la identificación de trayectorias reales de aprendizaje de dicha magnitud.

Educación matemática basada en el lugar rural y prácticas ancestrales Wayúu en un currículo escolar de la geometría

La educación matemática basada en el lugar rural (EMBLR) privilegia el valor que tienen la historia, la geografía y la cultura de un lugar, en el aprendizaje de las matemáticas (Howley et al., 2005). El lugar rural se considera una fuente para una fenomenología de los conocimientos matemáticos escolares (Waters et al., 2008), y para las experiencias que convierten la clase de matemáticas en un laboratorio de aprendizaje (Dewey, 1938).

La EMBLR en currículos escolares y saberes ancestrales de las comunidades indígenas

La EMBLR nace del interés de las comunidades rurales en comprender cómo se pueden potencializar los conocimientos de la cultura indígena, y cómo algunos de estos pueden articularse con el conocimiento académico eurocéntrico que comúnmente se enseña en las escuelas rurales. Para ello, este enfoque reconoce la importancia de los ancianos de estos grupos étnicos en la promulgación

León, O., Barbosa, F., Ibarra, M., Garrido, N. y Hernández, J. (2022). Trayectorias de la amplitud angular articulando la agrimensura con prácticas ancestrales Wayúu. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 67-80. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

del conocimiento. Parsons (2015), desde una perspectiva etnomatemática, desarrolló una investigación con ancianos Yup'ik: se cuestionó sobre la manera en que los ancianos guiaban la construcción de los barcos a partir de los conocimientos ancestrales que se derivan del uso de medidas antropométricas. La investigación señalada también se preguntó sobre las formas en que estos conocimientos ancestrales pueden apoyar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas indígenas.

En la EMBLR se reconoce que el aprendizaje desarrolla un sentido del lugar, por medio de las experiencias humanas, se va más allá de una faceta ecológica, y se involucran aspectos como: lo natural, lo social, lo cultural y lo político (Semken y Freeman, 2008). Las experiencias se construyen mediante el intercambio de las personas con los Lugares; en el Lugar se desarrolla la comprensión en relación consigo mismo, con los demás y con la tierra que se habita.

La axiología, la epistemología y la cosmología, Parsons (2015) las considera campos reveladores de prácticas ancestrales. El primero de ellos, se focaliza en los valores que guían a cada pueblo en la búsqueda del conocimiento. El segundo reconoce que los pueblos a través de su historia oral y de su experiencia han constituido constructos para desarrollar diferentes tipos de prácticas. Y el tercero está relacionado con el conjunto de creencias de los pueblos indígenas, que además de dinamizar el conocimiento ancestral, lo materializan en el desarrollo de todas sus prácticas.

Las comunidades indígenas Wayúu están localizadas en los resguardos de la Alta y Media Guajira colombiana, pero también una buena parte están localizados en territorio venezolano. El territorio es para los Wayúu un Lugar Sagrado, su hábitat principal son las rancherías que están compuestas por viviendas tradicionales, enramadas, corrales y cementerio (Álvarez, 2018).

La construcción de corrales y de rancherías son prácticas ancestrales Wayúu. De ellas cabe destacar algunos rasgos:

- Desde el campo axiológico. Se escogen los corrales de forma circular por el valor de abundancia que el Wayúu asigna a tal forma (testimonio del sabedor en comunicación personal, 2020/07/10). El diseño y el entramado representa la presencia de la interacción con sus antepasados (testimonio del sabedor en comunicación personal, 2020/07/10). El Wayúu aprende desde niño a valorar las conversaciones como fuente de saber, observa cómo sus abuelos, tíos, padres y las personas mayores realizan sus actividades, siempre debe estar atento a todas las conversaciones e interacciones con sus mayores, ya que generalmente así aprenden el uno del otro, (testimonio del sabedor en comunicación personal, 2020/07/10).

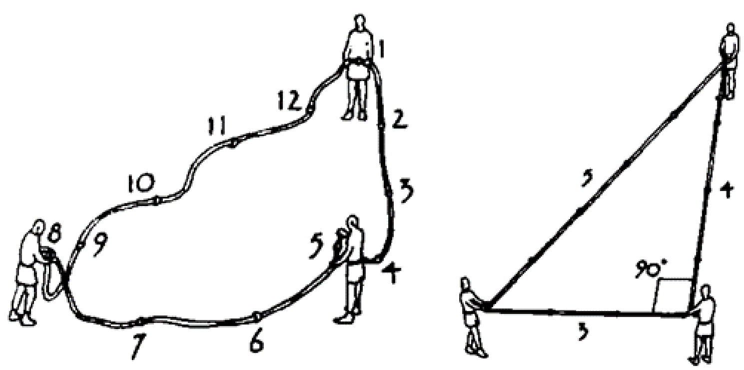
- Desde el campo epistemológico. Toda práctica es una forma de conocimiento. Entre las prácticas ancestrales se destaca la construcción de los corrales, "corresponde al momento histórico en el que la cultura Guajira adopta el pastoreo como medio de producción dejando de lado un poco, el agrícola" (Marín, 2014, p. 165). El corral se convierte en una infraestructura indispensable para proteger o resguardar a los animales y los cultivos comunales, así también como para dividir sus posesiones (Rúa, 2019). De igual manera representa la economía, la sostenibilidad y la plena identidad de cada familia (testimonio del sabedor en comunicación personal, 2020/07/07). El tamaño del corral depende de la cantidad de materiales disponibles, y se mide teniendo en cuenta la cantidad de animales; el material más utilizado es el árbol de trupillo, ya que es el que más abunda en la región (Rúa, 2019).
- Desde el campo cosmológico. Asumir el pastoreo en la cultura Wayúu implicó traspasar una frontera iniciática entre la vida y la muerte (supervivencia cultural), entre los espíritus malvados y la protección familiar (Castro, 2016). Por lo tanto, antes de realizar cualquier construcción, primero deben pedir permiso a los espíritus que habitan en ese territorio. Así mismo, el Wayúu crea barreras del adentro y del afuera; ubican sus dormitorios en un punto central que consideran su lugar de intimidad y refugio. Con ese centro hay un grupo de cuatro o cinco anillos concéntricos en los que organizan especialmente las otras construcciones de su vivienda. Se considera, además, una estrategia para mantener el control de sus territorios (Marín, 2014).

En la práctica de construcción de corrales se identifican dos tipos de procesos: el primero, es el de toma de decisiones de los indígenas Wayúu y el segundo, la secuencia de construcción de un corral, en el que están inmersas las variadas formas de medir un terreno.

La agrimensura y su papel en la medición de terrenos

La agrimensura es una práctica ancestral que desarrolló la civilización egipcia, consistente en la medición de los campos de terreno que quedaban luego de las inundaciones del río Nilo (Vergés, 1967; Landaverde, 1963). Inicialmente, esta práctica se desarrolló con instrumentos rudimentarios como estacas y cuerdas, con lo que estirando cuerdas se podían hacer figuras en los campos de terreno, y apoyados en el cuerpo se median las superficies. Para materializar el ángulo recto, los antiguos egipcios tomaban una cuerda, en la que realizaban 12 nudos equidistantes uno del otro y con tres estacas construían un triángulo rectángulo; usaban el siguiente procedimiento: clavar una estaca sobre el suelo, estirar 3 nudos, colocar una nueva estaca, estirar 4 nudos más, clavar la última estaca, y cerrar el polígono que se está formando con 5 nudos restantes. El método anterior fue nominado por los agrimensores egipcios como 3, 4 y 5; corresponde a una fenomenología para la formulación de ternas pitagóricas (León, 2005).

Figura 1: método 3, 4 y 5 usado para medir ángulos rectos en agrimensura



Luego de la independencia de Colombia, este saber se usó para la adjudicación de las tierras baldías de los indígenas y campesinos. A finales del siglo XIX, en Colombia se dictaminó que una persona podía ser propietaria de una tierra siempre y cuando pudiera realizar un plano topográfico, que le sirviera para cercarla y así evitar que el ganado pasara a otros terrenos (Lleras, 1834).

Por otra parte, la agrimensura fue muy importante para el avance de las matemáticas en Colombia y, en particular, para la geometría, Ya que este saber era obligatorio en la enseñanza de las escuelas normales masculinas y fue fundamento de programas como la topografía y la ingeniería civil. Actualmente, muchos de los problemas de agrimensura están presentes en los libros de texto de geometría y de trigonometría (Barbosa, 2019; Jiménez, 2018).

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de la magnitud amplitud angular (THA-MAA)

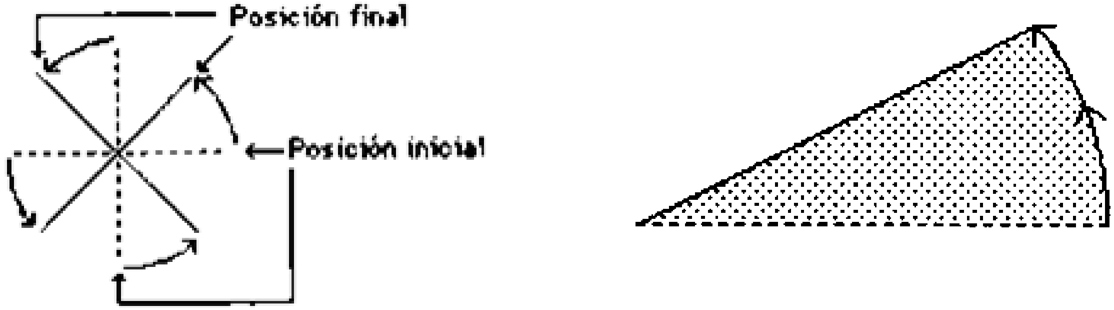
Desde la perspectiva de la comunidad Wayúu y de investigadores como Clements y Sarama (2015), aprender es vivir y vivir es aprender. La vida es la síntesis de múltiples trayectorias de aprendizaje. La escuela es solo un Lugar de aprendizaje para muchas comunidades indígenas; para otros grupos sociales es El Lugar de Aprendizaje, pero en definitiva es lugar de aprendizaje y, como lo indica Laurillard (2012), el diseño curricular es una labor que debe ser desarrollada por profesionales comprometidos con la educación. Diseñar trayectorias hipotéticas de aprendizaje es responder preguntas como: ¿qué objetivos se deben establecer para desarrollar el aprendizaje de nuestros estudiantes?, ¿dónde inicia el aprendizaje?, ¿qué pasos deberían seguirse para continuar desarrollando aprendizajes en nuestros estudiantes?, ¿de qué manera se logra identificar la culminación de un paso de aprendizaje, para ir al siguiente?

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) tienen tres componentes: una metamatemática, una ruta de desarrollo y un conjunto de actividades instructivas (Clements y Sarama, 2015). El primero hace referencia a las ideas matemáticas como agrupaciones de conceptos, y a las habilidades para potenciar en los estudiantes. El segundo hace referencia a los niveles que se necesitan para favorecer el entendimiento conceptual sobre un tema matemático específico. Y, el tercero corresponde puntualmente a las actividades que se desarrollan con base en el desarrollo del niño, desde aspectos sociales y culturales del Lugar en el que habitan.

Las hipótesis sobre amplitud angular desde aspectos geométricos y cognitivos

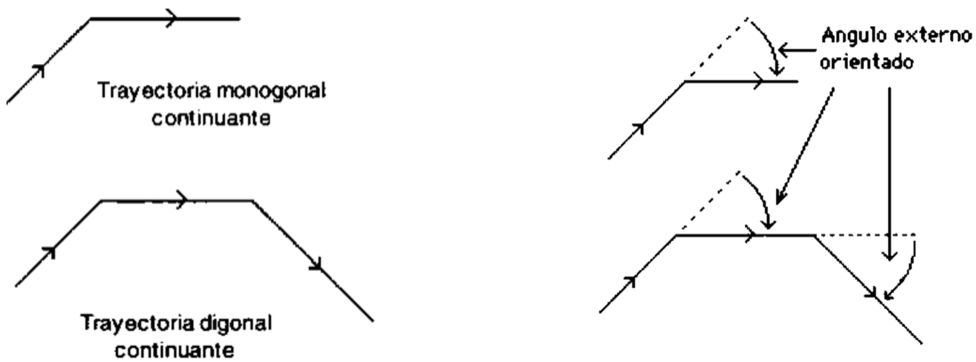
En lo que respecta a la magnitud amplitud angular, Vasco (1998) señala que no hay una definición precisa de ángulo. El ángulo se puede considerar de manera dinámica como un ángulo de giro, en el que se percibe como el barrido de una región plana por líneas que salen del vértice y que siempre están orientadas. O también, el ángulo puede considerarse, más ampliamente, como la “amplitud de giro”, cuya unidad natural es la vuelta. En la Figura 2 se presenta el ángulo desde el punto de vista dinámico:

Figura 2: representación del ángulo como giro y del ángulo barrido (Vasco, 1998)



Vasco (1998) señala que, desde el aspecto propiamente métrico, el ángulo se puede ver como trayectorias continuantes que tienen una magnitud amplitud básica.

Figura 3: trayectorias continuantes y ángulos de giro puntuales propuestos por Vasco (1998)



Desde un enfoque estático, Vasco (1998) identifica "la isla de las regiones angulares" que se encuentran cerca de las islas dinámicas de barrido y de giro. Estas en sí, son huellas que deja el ángulo de barrido, y pueden ser orientadas o no orientadas.

Práctica ancestral de construcción de vivienda tradicional y corral

Para diseñar la THA-MAA que incorpora tanto la agrimensura como la práctica ancestral de construcción de viviendas tradicionales Wayúu, los sabedores Wayúu aportaron elementos para articular práctica ancestral de la construcción con la agrimensura y la magnitud amplitud angular.

En la Figura 4 se puede apreciar el fragmento de una entrevista realizada a dos sabedores Wayúu que ilustran el proceso para construir una vivienda Wayúu.

Figura 4: los sabedores hacen mención del uso de medidas antropométricas ancestrales

Sabedor (Ilustra con las cuerdas cómo se va a realizar la construcción de la vivienda)

Sabedora La medida para la construcción de las viviendas. El Wayúu utiliza una pita o una cabuya que está hecha en fique o en nilón que nosotros llamamos en la actualidad, porque todo se moderniza. Entonces, la medida exacta es que el hombre toma desde el pie hasta el ombligo, hay 1 metro.

O puede ser desde la mano hasta el centro del cuello en la parte de adelante es un metro, entonces, si son 4 metros, esa medida que se ha tomado desde los pies hasta el ombligo, entonces, ya serían 4 pedazos de lo que equivalen los 4 metros, y si son 8 metros los 8 pedazos, que nosotros anteriormente le llamábamos brazada. En Wayunaiki es [tená] un metro, una brazada, así es que se miden las viviendas. Por eso es que aquí muy poco se utilizan las circulares, y más las rectangulares.

Sabedora Nosotros tenemos unos elementos culturales en nosotros que son: la pulgada, el jeme, la cuarta, la brazada, el pie, el paso. Son los elementos naturales que también los está nombrando el tío.

Yo veía medir a mi papá sus corrales, un paso, y esas son medidas naturales que el Wayúu utiliza en todo lo que necesite.

La medida antropométrica no es convencional; más bien, puede estar ligada con los conceptos de cosmología, epistemología y axiología propios de los indígenas Wayúu (Parsons, 2015).

En la Figura 5 se puede observar que los indígenas Wayúu realizan trayectorias diagonales continuantes para materializar la forma rectangular del corral que van a construir (Vasco, 1998).

Figura 5: indicaciones del sabedor para la construcción del corral

Sabedor: (Cuenta los pasos en castellano). Bueno, vamos a ponerle 15 metros…por dos…vamos a ponerle 15, …15 por 15.

Meilis Usted lo puede medir con las pisadas, ¿cierto?

Sabedor Sí con las pisadas, pero con el metro también. Es un tipo de medición que también se utilizaba antiguamente, un cálculo que se hacía así. Por ejemplo, una pisada es más o menos un metro. Todavía se sigue utilizando.

Una vez establecidos los procesos y subprocesos de la amplitud angular, se conforma la THA-MAA con prácticas de agrimensura y de construcción de corrales, como se presenta en la Tabla 1:

Tabla 1: hipótesis de la trayectoria de aprendizaje con agrimensura y la práctica ancestral de construcción de corrales

Nivel	Magnitud amplitud angular	Agrimensura	Práctica ancestral de construcción de corrales
1	Percepción de la magnitud amplitud angular	Percepción del microespacio inmediato (geográfico)	Percepción de los diferentes espacios sociales y culturales (Lugares familiares y de rito)
2	Percepción de la magnitud amplitud a través de objetos	Selección del microespacio inmediato	Selección del espacio social y cultural

3	Construcción intuitiva de la amplitud angular	Percepción de instrumentos	Selección de materiales para la construcción
4	Construcción implícita de la amplitud angular	Observación de figuras	Selección de tamaño y forma
5	Igualación de ángulos	Percepción de técnicas de medición	Medición del espacio (territorio)
6	Estimación de la amplitud angular	Trazado de alineaciones	Trazado de las formas de un corral Wayúu
7	Comparación y ordenación de la amplitud angular	Trazado de alineaciones aplicando técnicas	Trazado de las formas de un corral Wayúu
8	Medición de ángulos	Trazado de alineaciones aplicando técnicas	Ubicación de los materiales
9	Clasificación de ángulos	Anotaciones puntos de referencia y distancia	Ubicación de los materiales
10	Resolución de problemas	Anotaciones puntos de referencia y distancia	Ubicación de los materiales

Las THA permiten que los profesores transformen sus prácticas pedagógicas, generando nuevas posibilidades y estrategias que promuevan el desarrollo cognitivo de los niños (Gómez y Lupiáñez, 2007), ya que estas trayectorias tienen en cuenta aspectos socioculturales del Lugar en el que se desarrollan los estudiantes. Así mismo, pueden favorecer el desarrollo del pensamiento matemático a través de actividades que tengan como base el contexto cultural de los niños.

IDENTIFICACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS REALES DE APRENDIZAJE DE LA AMPLITUD ANGULAR

Las trayectorias reales de aprendizaje de la magnitud amplitud angular (TRA-MAA) corresponden al camino seguido por los estudiantes en la trazabilidad de la THA-MAA. A continuación, se presentan, a modo de ejemplo, algunas de las TRA-MAA que realizaron los estudiantes que fueron sujetos de esta investigación.

Ejemplos de la TRA-MAA en articulación con la práctica ancestral de construcción de corrales

La necesidad de delimitar un terreno para construir un corral, según la orientación de la práctica ancestral y con una forma rectangular elegida por el estudiante, plantaba el reto de lograr un ángulo recto en un terreno. En la Figura 7 se ilustra el modo en que un estudiante orienta su ángulo y usa cuerdas y estacas para trazar un triángulo rectángulo sobre el suelo.

Figura 7: Carlos experimenta la medición de ángulos con el método 3, 4 y 5

Es importante señalar que, después de trazar el triángulo rectángulo, el estudiante identificó los ángulos internos del triángulo e identificó el ángulo recto. Además, nombró cada uno de los vértices del triángulo con banderines. Seleccionó uno de los vértices del triángulo y lo ubicó en un sistema de referencia usando los puntos cardinales de los indígenas Wayúu.

Figura 8: la estudiante realiza diversas rutas en el terreno en una experiencia con el ángulo giro y la cartera del agrimensor

Otra de las tareas instructivas relevantes en el desarrollo de la trayectoria fue el trazado de caminos con la cartera del agrimensor. Esta tarea se puede apreciar en la Figura 8: a partir de una serie de instrucciones, los estudiantes debían moverse tantos pasos como indicara la instrucción, dar giros de un cuarto de vuelta o de media vuelta según se le indicará, y ubicar algunas estacas con las que al tensar cuerdas se realizara en el suelo un determinado polígono. En la Figura 8, también se puede apreciar a la estudiante desarrollando una trayectoria diagonal en la que se materializa el ángulo recto, a través del giro de media vuelta que puede hacer con su cuerpo (Vasco, 1998).

Figura 9: Liz y Ros justifican el encuadramiento del terreno de la vivienda con la tríada pitagórica 15, 20 y 25

Voy a comprobar que las esquinas de mi cuadrado tienen un ángulo recto. Y, pues lo voy a hacer con la relación pitagórica de 15, 20 y 25. 	Como podemos ver, aquí hay un ángulo recto. 	Ahora, vamos a medir el otro, ahí. Entonces, tiene un ángulo recto. 	Ahora, seguimos con el de allá. 
Aquí, hay un ángulo recto. 	La línea esta no concuerda con la dirección de esta. 	Entonces, hay que moverlo más hacia acá. 	Ubiquémoslo aquí. 

El reto de construir ángulos rectos en terrenos de la ranchería permitió explorar las ternas pitagóricas En la Figura 9, se presenta a una pareja de estudiantes que encuentran la tríada pitagórica 15, 20 y 25 para hacer el trazado de un ángulo recto, a través de una tríada equivalente al método 3, 4 y 5.

Otra de las tareas instructivas propuesta a los estudiantes de grado décimo consistió en hacer mediciones con el grafómetro sobre el terreno. Al respecto, conviene enfatizar en que los estudiantes fabricaron con ayuda del profesor sus propios grafómetros. En la Figura 10, se presenta a una estudiante de grado décimo midiendo ángulos visuales sobre el terreno.

Figura 10: Dayana usa el grafómetro para obtener medidas y validar ángulos al arrastrar el ángulo

> Vamos a identificar los ángulos suplementarios, teniendo como referencia la alberca, la silla y el árbol que está allá. Usando el grafómetro, el ángulo visual hasta donde está la silla, me dio 110°, y ahora hasta donde está el árbol me dio 180°, de esa manera identificamos dos ángulos suplementarios cuya suma es de 180°.

En la figura anterior, se puede observar la medición angular que se hace de los ángulos visuales, es decir, de ángulos cuyos lados son líneas visuales. Por otra parte, se hace énfasis en que el grafómetro es un instrumento propio de la agrimensura que favorece la comprensión del ángulo de giro y del ángulo como barrido (Vasco, 1998). Pues, este instrumento hace que el estudiante deba fijar sobre el terreno un punto, que se va a constituir en vértice del ángulo, con el que visualmente proyecta los lados de un ángulo, a través de la regleta del grafómetro con la que se materializa la medida angular.

REFLEXIONES FINALES

El aprendizaje de la magnitud amplitud angular es un proceso que inicia desde temprana edad y está vinculado a las experiencias que el ambiente familiar le proporcione al infante. Los niños y las niñas Wayúu tienen un espacio privilegiado para el aprendizaje de la magnitud amplitud, proveniente de sus prácticas ancestrales. La presencia de la agrimensura en el aprendizaje de la amplitud angular es un puente entre las prácticas ancestrales y las prácticas escolares. La investigación sobre THA fundamentadas en la EMBLR tiene aún muchos retos que superar para lograr visibilizar el valor de todas las dimensiones de las prácticas ancestrales de los pueblos Wayúu en el aprendizaje de la matemática escolar.

REFERENCIAS

Álvarez, A. (2018). *Pautas básicas de relacionamiento comunidad indígena Wayúu Diccionario Wayuunaiki*. Grupo Energía de Bogotá https://grupoenergiadebogota.com/transmision/content/download/21180/file/Cartilla%20Relacionamiento%20Wayuu_V4.pdf

Barbosa, F. (2019). Una reflexión histórica del uso de la agrimensura para motivar el estudio de la geometría en escuelas rurales. En C. Martínez-Garrido, F. Murillo (coords.), *Investigación comprometida para la transformación social*: *actas del XIX Congreso Internacional de Investigación Educativa* (vol. 1, pp. 34-40). Madrid, España: AIDIPE.

Castro, D. (2016). *El chivo y el ovejo en la cultura Wayúu. Trashumancia, economía y derecho consuetudinario*. Manabí, Ecuador: Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: el enfoque de las trayectorias de aprendizaje. Gran Bretaña: Learning Tools LLC.

Dewey, J. (1938). *Experience and education*. Nueva York, EUA: Macmillan.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98. http://funes.uniandes.edu.co/390/

Howley, C. B., Howley, A. A. y Huber, D. S. (2005). Prescriptions for rural mathematics instruction: Analysis of the rhetorical literature. *Journal of Research in Rural Education*, *20*(7), 1-16.

Jiménez, A. (2018). Primer congreso pedagógico nacional colombiano de 1917. *Pedagogía y Saberes*, 48, 153-161.

Landaverde, E. (1963). *Curso de Geometría*. Bedout.

Laurillard, D. (2012). *Teaching as a design science: Building pedagogical patterns for learning and technology*. Nueva York y Londres: Routledge.

León, O. (2005). *Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría*. Tesis doctoral no publicada, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Lleras, L. (1834). *Catecismo de agrimensura apropiado al uso de los granadinos*. Bogotá: Imprenta de la Universidad, por G. Morales.

Marín, E. (2014). *Cosmogonía y rito en la vivienda Wayuu*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Parsons, K. (2015). A yup'ik research framework: Center, a place to begin. En *Proceedings from the Alaska Native Studies Conference*. University of Alaska.

Rúa, C. (2019, 14 de febrero). Prácticas tradicionales de las comunidades indígenas Wayúu en ganadería ovinocaprina [Video]. You Tube. https://www.youtube.com/watch?v=CrOBwTaz3M4&t=579s

Semken, S. y Freeman, C. B. (2008). Sense of place in the practice and assessment of place ‐ based science teaching. *Science Education*, *92*(6), 1042-1057.

Vasco, C. E. (1998). El archipiélago angular. En *Memorias-III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 74-79). Asociación Venezolana de Educación Matemática.

Vergés, P. (1967). *La agrimensura y la formación de los agrimensores. Cien años de agrimensura argentina*. La Plata, Argentina: Universidad Nacional de La Plata.

Waters, M., Howley, C. y Schultz, J. (2008). An initial research agenda for rural mathematics education. *Journal of Appalachian Studies*, *14*(1/2), 125-144.

ARGUMENTOS DE NEWTON Y LEIBNIZ RELATIVOS AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO MEDIADOS POR *SOFTWARE*

Weimar Muñoz
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Weimar.munoz@correo.udistrital.edu.co

En este cursillo se exponen algunos argumentos utilizados por Newton y por Leibniz para la invención de lo que se reconoce actualmente como el Teorema Fundamental del Cálculo. Dichos argumentos permiten proponer un trabajo heurísticamente pertinente en la actualidad, por cuanto sirven para resolver problemas tales como el cálculo de tangentes, cálculo de áreas, rectificación de curvas y los llamados problemas inversos de la tangente. Una forma de traer esos argumentos del siglo XVII a las prácticas de enseñanza actuales es mediante el uso de herramientas tecnológicas. La idea es brindar instrumentos que sirvan de insumo para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta piedra angular del cálculo en los currículos universitarios.

ARGUMENTOS HISTÓRICOS DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El objetivo de esta sección es describir argumentos (teoremas, proposiciones, lemas, etc.) que resultaron constitutivos en lo que se reconoce actualmente como Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), a partir de los trabajos de Newton y de Leibniz. Se pretende resaltar la importancia de este teorema para contrarrestar su trivialización cuando se le considera exclusivamente bajo la perspectiva de la definición de integral como antiderivada.

El TFC se presenta de maneras diversas en los textos universitarios de análisis matemático o de cálculo de una variable (Muñoz-Villate, 2021), situación que plantea el primer problema al abordar este campo de estudio: ¿a cuál teorema fundamental se refiere?

En los libros de cálculo, es usual que la primera parte de este teorema se denomine *la parte dinámica*, y la segunda se reconozca como *la parte evaluativa*. Además, se suele presentar de la siguiente manera:

Muñoz, W. (2022). Argumentos de Newton y Leibniz relativos al Teorema Fundamental del Cálculo mediados por *software*. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 81-92. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$

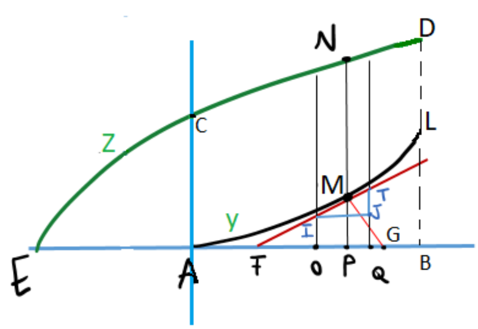
1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f, es decir, $F'(x) = f(x)$. (Stewart, 2015)

Esta versión del TFC es la que se manejará durante todo este escrito y se expondrán algunos objetos matemáticos de los que se sirvieron Newton y Leibniz para su invención. Los argumentos que se mostrarán provienen del trabajo de matemáticos entre los que están: Hendrick van Heuraet, René Descartes, René de Sluse, Johannes Hudde, Isaac Barrow, Euclides. Posteriormente, en la siguiente sección, se utilizarán TIC como puentes mediadores entre estos argumentos y los currículos de enseñanza actuales del cálculo. Además, dichos *softwares* sirven como instrumento de mejora de la visualización de dicho teorema.

Teorema de van Heuraet

Hendrick van Heuraet fue un matemático de Países Bajos; nació en 1634 y falleció, al parecer, en 1660 en la ciudad de Leiden. No se sabe mucho de su vida, y menos aún de todos sus escritos en matemáticas. Sin embargo, la fuente más importante de sus trabajos se hace evidente en la correspondencia (concerniente a las propiedades de las curvas) que entabló con Sluse, van Schooten y Hudde (Van Maanen, 1984).

Figura 1: gráfica del Teorema de van Heuraet

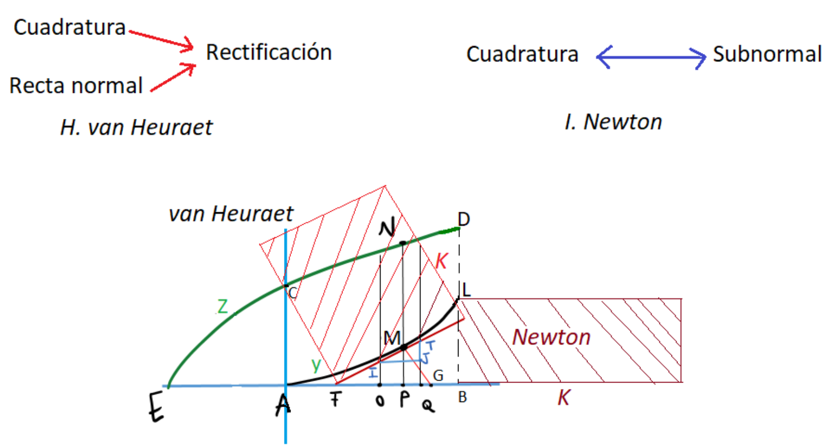


El teorema de van Heuraet sobre la rectificación de curvas, que se muestra en la Figura 1 y se enuncia enseguida, fue determinante para que emergiera el TFC en los trabajos de Newton. En esencia, este teorema de van Heuraet utiliza la cuadratura de otra curva auxiliar para determinar la longitud de arco (o rectificación) de la curva inicial (Crippa, 2019; Panza, 2005; Van Maanen, 1984).

> Sean AML y END dos curvas cualesquiera relacionadas en el mismo eje AH. Sea P un punto ubicado sobre este eje, tal que la perpendicular PW tomada desde P se encuentra con dichas curvas en dos puntos M y N respectivamente. La relación de AML y END está dada por $PM : MG = K : PN$ donde el segmento MG es la normal a la curva AML en el punto P, y K es un segmento constante cualquiera. Entonces la *superficie* $ABDNC$, delimitada por la curva END, es igual a un rectángulo cuyos lados son el segmento K y un segmento de longitud igual al arco AML.[1] (Panza, 2005)

La prueba de este teorema puede verse en la página 120 del libro *Newton et les origines de l'analys:1664-1669* (Panza, 2005). Hendrick van Heuraet demostró entonces que si se cuenta con la cuadratura (el área) de una curva apropiadamente elegida, es posible rectificar (hallar la longitud de) una curva cualquiera. Newton modificó este teorema de tal forma que se pueda encontrar el área bajo una curva, teniendo la normal o la subtangente de otra curva apropiadamente seleccionada (véase la Figura 2).

Figura 2: gráfica de la adaptación de Newton al Teorema de van Heuraet



[1] Es mi traducción del original Panza (2005, p. 120): *[S]i deux courbes quelconques AML et END sont rapportées à la même axe AH, et sont telles que, quel que soit le point P pris sur cette axe, la perpendiculaire à cette axe tirée du point P rencontre ces courbes respectivement en deux points M et N, tels que PM : MG = K : PN. MG étant la normale à la première de ces courbes dans le point P, et K un segment constant quelconque, alors la surface ABDNC délimitée par la deuxième de ces courbes est égale à un rectangle construit sur le segment K et un autre segment de longueur égale à l'arc AML pris sur la première courbe, en correspondance de l'arc CND de la deuxième.*

A continuación, se usará la notación moderna para aclarar mejor lo que se acaba de enunciar. Van Heuraet demostró, en esencia, lo siguiente: si se quiere hallar la longitud de la curva y en $[A, B]$ (la curva AML en la figura anterior), es necesario tener una curva adecuada z (que sea integrable sobre ese intervalo) tal que si $\xi \in [A, B]$, se obtenga que:

$$\int_A^{\xi} \sqrt{1+[y']^2}dx = \text{rectificación de } AML = \frac{\text{cuadratura de } z}{K} = \frac{1}{K}\int_A^{\xi} zdx$$

Newton hizo el siguiente cambio:

$$PM : MG = K : PN \rightarrow \frac{PM}{PG} = \frac{FP}{PM} = \frac{K}{PN}$$

Es decir, él consideró la relación entre PM y PG (la ordenada y la subnormal) y FP (la subtangente), y obtuvo la ecuación anterior, para una cierta constante K, sabiendo que podía relacionar los triángulos ΔFPM y ΔGPM. Posterior a esto, Newton desarrolló un proceso análogo al de van Heuraet, y logró comprobar que

$$\text{trapezoide curvilíneo } ABDC = K \cdot BL$$

esto es

$$\text{área } (ABCD) = \int_A^B zdx = K \cdot y|_A^B = K[y(B) - y(A)].$$

Así las cosas, Newton modificó el teorema de van Heuraet y logró calcular el área bajo la curva $z = f'(x)$ utilizando la curva $y = f(x)$ (véase la Figura 2). Claramente, si $K = 1$, se tiene entonces lo que se denomina parte evaluativa del actual TFC. A continuación, se estudiarán algunos aportes de otros dos matemáticos holandeses: Hudde y Sluse. Sus trabajos resultaron determinantes para el desarrollo de lo que sería el análisis matemático.

Aportes de Hudde y Sluse

Los principales aportes de Jan Hudde (1628-1704) a las matemáticas (y, en particular, al surgimiento del TFC) fueron sus trabajos realizados en factorización y el hecho de haber simplificado el método de Descartes para construir normales (Van Maanen, 1984). Por su parte, René François de Sluse (o Sluze) (1622-1685) nació en Países Bajos, en Visé (actualmente Bélgica), y falleció en Liège. Sluse supo que Newton había ideado un método para encontrar tangentes y que había trabajado también en otros temas, como el de series infinitas, así que avisó en 1671 que iba a publicar un antiguo trabajo propio sobre el tema de las tangentes, un método que había perfeccionado usando ideas de Descartes y Fermat. El siguiente año, 1672, Sluse envió dichos escritos y fueron publicados en *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Fue este trabajo el que lo convirtió en una de las grandes figuras en el desarrollo del cálculo (University of St Andrews, 2009).

El algoritmo desarrollado por Sluse y Hudde para hallar las subnormales Snx y subtangentes $Stgx$ podría escribirse, en notación moderna, para una curva expresada por la ecuación $F(x;\ y) = 0$, como:

$$Snx = -y\frac{F_x}{F_y} \qquad\qquad Stgx = -y\frac{F_y}{F_x}.$$

Pero, este algoritmo no era visto de esa manera por Sluse, Hudde y Newton:

> Ellos pensaban más este algoritmo como una regla de transformación de un polinomio de dos variables en otros dos polinomios que dan, respectivamente, el numerador y el denominador de una fracción que expresa la subtangente o la subnormal buscadas. (Maronne y Panza, 2021)

Es decir, para una función de una variable $y - f(x)$, esta regla de transformación estaría dada por:

$$Snx = -f(x)f'(x) \qquad\qquad Stgx = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Un ejemplo de cómo usaba Newton estos argumentos, puede verse en el Problema 5, planteado y desarrollado en *Tract on Fluxions* de 1666 (Muñoz Villate, 2021; Iliffe et al., 2011). Sin embargo, estas aplicaciones van más allá de usar meramente las fórmulas de subtangente y de subnormal. En efecto, Newton también usó el teorema de Hudde sobre las raíces de un polinomio multiplicado por una sucesión aritmética (Maronne y Panza, 2021; Panza, 2005).

Leibniz también utilizó ciertos argumentos de estos tres matemáticos holandeses, tanto para la rectificación de curvas, como para el cálculo de subtangentes, normales y subnormales (Goethe et al., 2015; Leibniz, 2008; Child, 1922). Se termina esta sección hablando justamente de uno de los argumentos utilizados por Leibniz para su invención del TFC: el teorema de transmutación.

ARGUMENTOS EN EL TFC DE LEIBNIZ

Hacia 1676, Leibniz publicó el libro *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae,* en el que aparece la Proposición 7, conocida como el teorema de transmutación (véase Figura 3). Este teorema es clave para una presentación geométrica del TFC porque permite establecer la relación entre el problema inverso de la tangente y el problema de la cuadratura (Edwards, 1979).

Figura 3: facsímil de la versión original del teorema de transmutación de Leibniz (Knobloch, 2016, p. 32)

PROPOSITIO VII.

> Si a quolibet curvae cujusdam puncto ad unum anguli recti in eodem plano positi latus ducantur ordinatae normales, ad alterum tangentes, et ex punctis occursus tangentium ducantur perpendiculares ad earum ordinatas, si opus est productas; et curva alia per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat; erit spatium inter axem (ad quem ductae sunt ordinatae,) duas ordinatas extremas, et curvam secundam comprehensum, spatii inter curvam primam et rectas duas ejus extrema cum anguli recti propositi centro jungentes, comprehensi duplum.

La idea de Leibniz fue relacionar el área bajo una curva z sobre un intervalo $[a, b]$ con el área de un triángulo (curvilíneo) bajo una curva y formado por el origen, $f(a)$ y $f(b)$, de la siguiente manera:

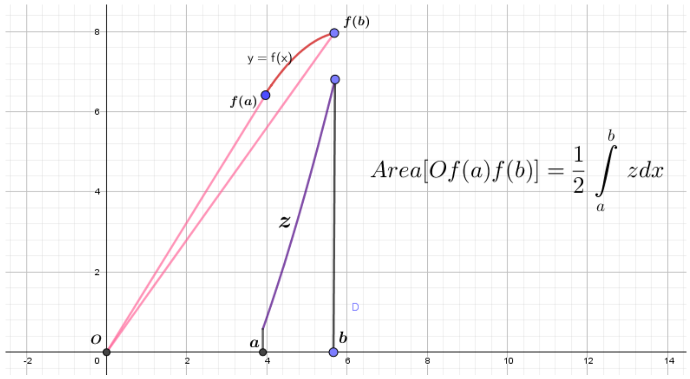
$$\frac{1}{2}\int_{a}^{b} z dx = \Delta 0 f(a) f(b)$$

Esta relación geométrica, entre z y y, la definió Leibniz como *equipolencia* basándose en los estudios de Kepler de 1615 (Knobloch, 2013), y puede verse representada en la Figura 4. La demostración del teorema de transmutación se basa en la Proposición 41, del libro 1 de Euclides: *si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo*. Por tanto, el paralelogramo formado sobre el intervalo $[a, b]$ y la curva z es el doble del triángulo $0f(a)f(b)$.

Leibniz definió esta curva z mediante la resolución de la ecuación diferencial:

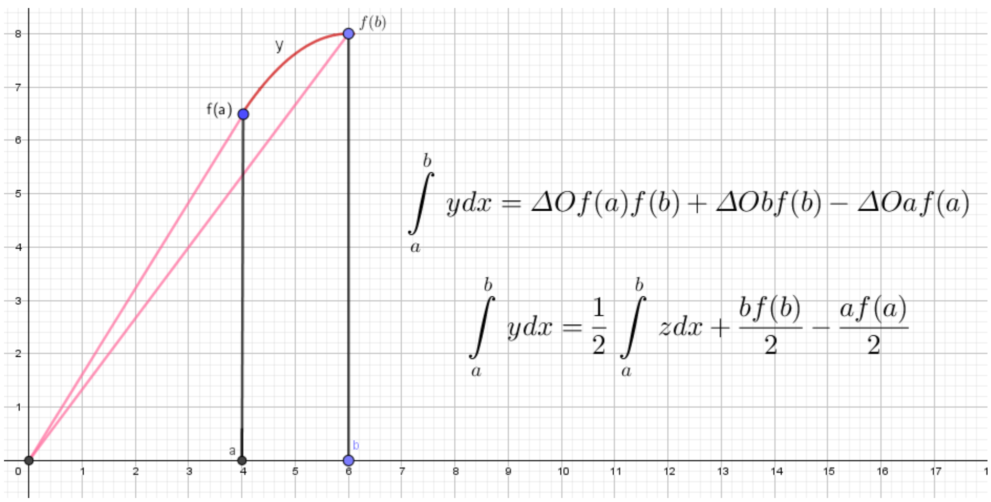
$$z = y - x\frac{dy}{dx}$$

Figura 4: representación del teorema de transmutación de Leibniz



Usando este argumento, Leibniz dedujo lo que reconocemos como la fórmula de integración por partes. En efecto, el área bajo la curva y sobre $[a, b]$, i.e., $\int_a^b ydx$ puede replantearse como lo muestra la Figura 5.

Figura 5: representación del área de la curva y del teorema de transmutación de Leibniz

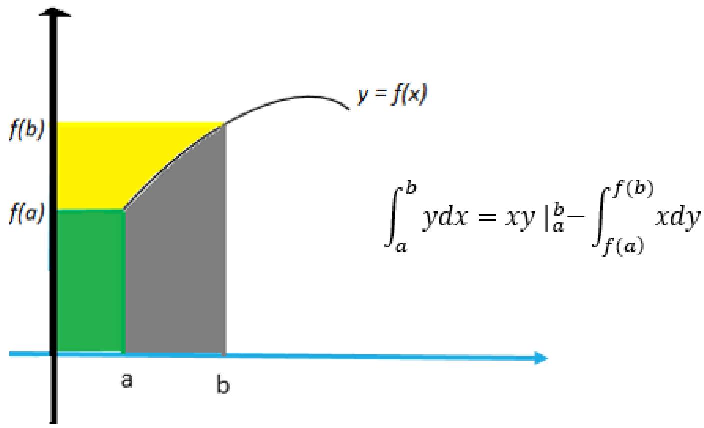


Por lo tanto,

$$\int_a^b ydx = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) dx + \frac{bf(b)}{2} - \frac{af(a)}{2}$$

Multiplicando por dos y reescribiendo la expresión, se tiene la ecuación de la Figura 6, es decir, la conocida fórmula de integración por partes.

Figura 6: integración por partes de Leibniz (imagen adaptada de Mena (2014), p. 82)



MEDIACIÓN TECNOLÓGICA

¿Cuál es la importancia de la mediación tecnológica? Una ventaja de utilizar TIC pasa por el hecho de que los *softwares* son herramientas que permiten visualizar los argumentos geométricos que fueron empleados hace varios siglos, y además se les puede agregar el valor dinámico a esas presentaciones. Es así como el objetivo de esta sección es presentar ejemplos de los argumentos históricos del TFC estudiados en la sección anterior, utilizando GeoGebra, Wolfram Alpha y Symbolab, además de presentar algunos ejercicios propuestos a los profesores de este cursillo del Encuento de Geometría y sus Aplicaciones.

Ejemplos

1. Calcule la antiderivada de $f'(x) = 9x^{1/2}$ que pasa por el punto $(0,1)$. Luego pruebe la conclusión del teorema de van Heuraet, es decir, $K \cdot L[f(x)] = \int zdx$, para $K = 1$, sobre $[0,1]$. Grafique los resultados en el *software* de su preferencia.

Solución: Primero se calcula la antiderivada de la función dada $f'(x)$:

$$\int \frac{df(x)}{dx}dx = \int 9x^{1/2}dx = 6x^{3/2} + C = f(x)$$

Como $f(0) = 1$, entonces $1 = f(0) = 6(0)^{3/2} + C \rightarrow C = 1$. Por lo tanto, la función buscada es $f(x) = 6x^{3/2} + 1$. Se comprueba ahora la conclusión de van Heuraet; es decir, que la longitud de la curva es:

$$L[f(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + (9x^{1/2})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 81x} dx = \frac{(1 + 81x)^{3/2}}{81 \cdot 3/2} \Big|_0^1 \approx 6{,}1032$$

Finalmente,

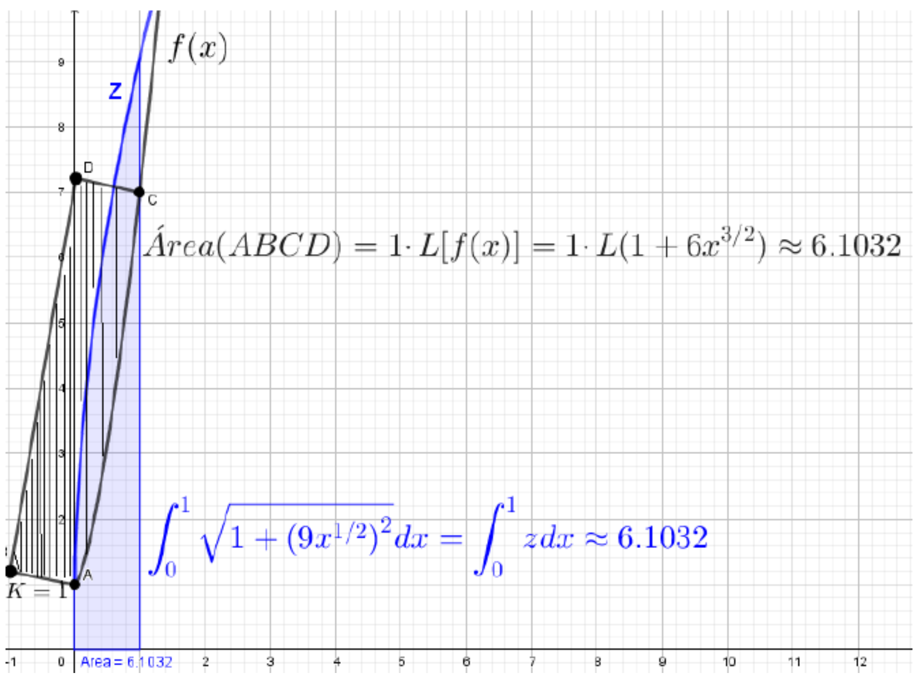
$$\text{la curva } z = \sqrt{1 + (9x^{1/2})^2},$$

luego

$$\int_0^1 z dx \approx 6{,}1032 = 1 \cdot L[f(x)].$$

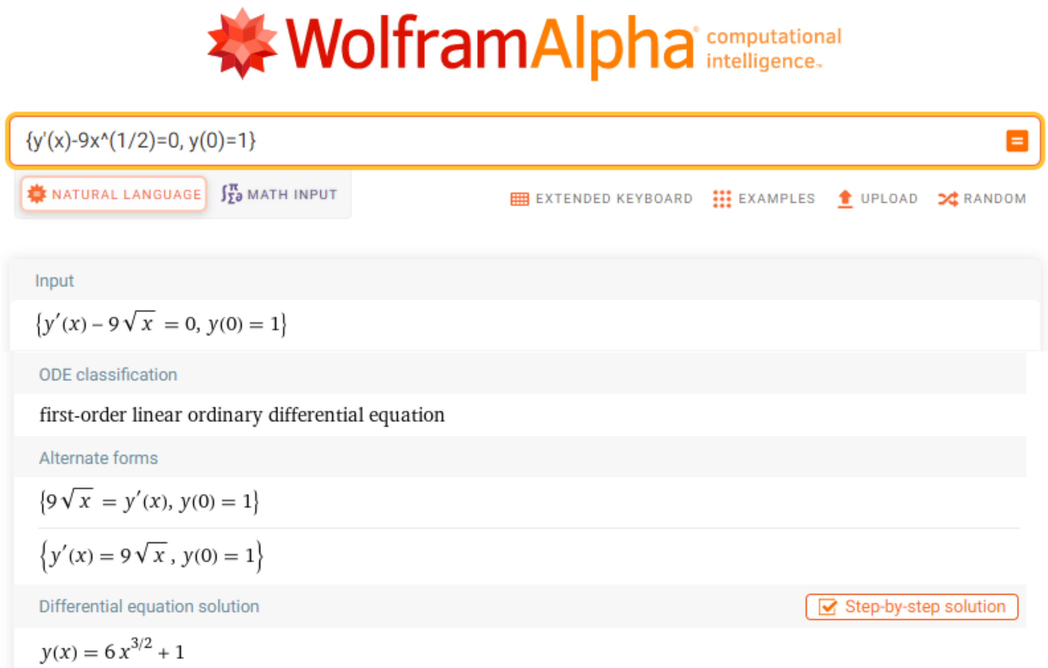
El resultado analíticamente parece trivial. Sin embargo, apreciando la Figura 7, se pude visualizar cómo el área del rectángulo curvilíneo con lados $L[f(x)]$, $K = 1$, es igual al área bajo la curva z. Este es el resultado demostrado por van Heuraet.

Figura 7: ejemplo del resultado obtenido por van Heuraet



La primera parte de este ejercicio podría resolverse directamente desde Wolfram Alpha, para hallar la solución de esa ecuación diferencial con la condición inicial dada (véase Figura 8).

Figura 8: uso de Wolfram Alpha para la resolución de una EDO de primer orden



2. Parábola semicúbica. Calcule la antiderivada de $f'(x) = 3x^{1/2}/2$ dado que $f(1) = 1$. Luego compruebe la conclusión del teorema de van Heuraet para $K = 1$ sobre $[1, 4]$. Grafique los resultados en el *software* de su preferencia.

Los ejercicios que se plantearán a continuación fueron propuestos por Newton en 1666, como ejemplos de su célebre Problema 5, y pueden verse en el manuscrito original en Iliffe et al. (2011). En dicho Problema 5, Newton muestra lo que se reconoce actualmente como la parte dinámica del TFC (Muñoz Villate, 2021; Bressoud, 2011; Guicciardini, 2009; Katz, 2008). Hay que tener en cuenta que Newton usaba un cuadrado □ tanto para hablar de integrales, como para notar los logaritmos.

3. El primer ejemplo del Problema 5, dice lo siguiente: Si $\frac{cx}{a+bxx} = \frac{q}{p}$, haga $bxx = z$. Entonces si $\square \frac{c}{2ab+2bz} = y$, usando notación moderna, la relación $\frac{q}{p} = \frac{dy}{dx}$, y si a, b, c son constantes, y $xx = x^2$, entonces, calcule y, si $\frac{cx}{a+bx^2} = \frac{dy}{dx}$. Haga la sustitución $bx^2 = z$ para escribir la respuesta final. Tome $c = 1,\ b = 2,\ a = 3$ para $\frac{cx}{a+bx^2} = \frac{dy}{dx}$ sobre el intervalo $[1, 5]$, y compruebe la conclusión de este TFC de Newton: $\int_1^5 \frac{dy}{dx} dx = K[y(5) - y(1)]$ para $K = 1$. Finalmente, grafique los resultados obtenidos.

4. Calcule y, si $\frac{2x^2}{3+4x^3} = \frac{dy}{dx}$. Tomando $y(4) = \frac{\ln 259}{4}$ sobre el intervalo $[1, 5]$, compruebe la conclusión de este TFC de Newton: $\int_1^5 \frac{dy}{dx} dx = K[y(5) - y(1)]$ para $K = 1$. Luego, grafique los resultados obtenidos.

5. El siguiente ejercicio lo planteó Leibniz en el año de 1676: $xy = y + Snx$. Resuelva este problema tomando $y = \frac{x^2}{2} - x$ para $y(4) = 4$. Grafique todas las curvas.

Conclusiones

En el cursillo se establecen relaciones entre los trabajos de van Heuraet, Hudde y Sluse, y el TFC en Newton y en Leibniz. Dichos argumentos también resultaron vitales para la invención del cálculo. Además, en este curso se presentó la relación entre estos argumentos y el currículo actual de ingeniería, y el papel que desempeñan, para dicho fin, las TIC como elementos mediadores. Para alcanzar este objetivo se propusieron algunos ejercicios basados en los argumentos históricos presentados que pueden ser resueltos con el uso de algún *software* matemático. Esta experiencia reafirma que la elección de una herramienta tecnológica para implementar una propuesta didáctica no es del todo simple, y que se deben tener en cuenta, por ejemplo, la robustez, velocidad, amigabilidad, instalación gratuita, facilidad de instalación, velocidad, mantenimiento automático, portabilidad y confiabilidad de estos *softwares*.

Referencias

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *American Mathematical Monthly*, *118*(2), 99-115. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

Child, J. M. (1922). The early mathematical manuscripts of Leibniz. En *Isis*, *4*(3). https://doi.org/10.1086/358083

Crippa, D. (2019). *The impossibility of squaring the circle in the 17th century: A debate among Gregory, Huygens and Leibniz* (vol. 1673). Birkhäuser.

Edwards, H. (1979). *The historical development of the Calculus*.

Goethe, N., Beeley, P. y Rabouin, D. (2015). *G.W. Leibniz, Interrelations between mathematics and philosophy*. Springer.

Guicciardini, N. (2009). *Isaac Newton on mathematical certainty and method*. The MIT Press. https://doi.org/10.1007/s10086-013-1369-8

Iliffe, R., Oxford Univesity, & The Royal Society. (2011). *The October of 1666 Tract on Fluxions*. The Newton Project. http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00100

Katz, V. (2008). *A history of mathematics*. Pearson.

Knobloch, E. (2013). Analiticidad, equipolencia y teoría de curvas en Leibniz. *Llull, Revista de La Sociedad Española de Historia de Las Ciencias y de Las Técnicas*, *36*(78), 283-306.

Knobloch, E. (2016). *Gottfried Wilhelm Leibniz De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae*. Springer.

Leibniz, G. W. (2008). *Leibniz: Infinitesimalrechnung 1674-1676 PDF_A*. https://www.gwlb.de/Leibniz/Leibnizarchiv/Veroeffentlichungen/VII5A.pdf

Maronne, S. y Panza, M. (sometido a evaluación). *De la méthode des normales de Descartes à l'algorithme de Newton. Les contributions de Hudde et Sluse*.

Mena, R. (2014). *The Fundamental Theorem of Calculus*. http://web.csulb.edu/~rmena/410/Section8.pdf

Muñoz-Villate, W. (2021). Relations between history of mathematics and training of engineers. *Revista Vision Electrónica*, *15*(1). https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/visele/article/view/17471

Muñoz Villate, W. (2021). Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas. *Ciencia y Educación*, *5*(1), 189–204. https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i1.pp189-204

Panza, M. (2005). *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.

University of St Andrews. (2009). *Biography of René François Walter de Sluze*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sluze/

Van Maanen, J. (1984). Hendrick van Heuraet (1634-1660) His life and mathematical work. *Centaurus*, *27*, 218–279.

Geometría versus realidad: discusión en un plano diferente

Catalina Murcia y Jairo Pulido
Secretaría de Educación de Bogotá
cdmurcia@educacionbogota.edu.co, jnpulido@educacionbogota.edu.co

Múltiples propuestas en el campo de la enseñanza de la geometría parten del desarrollo de la conceptualización de elementos geométricos, que luego se convierten en insumo para realizar actividades de observación, clasificación, establecimiento de relaciones, construcción, entre otras. En estos procesos sobresalen dos tipos de razonamiento que van desde particularizar objetos abstractos en generales (deducción), hasta reconocer características comunes para llegar a aspectos globales (inducción). En ese orden de ideas, el cursillo se plantea bajo una estructura y en planos diferentes a los usuales en el campo de la geometría, más cercanos a contextos reales. Es así como las situaciones, discusiones y reflexiones facilitan la emergencia de pensamiento creativo y razonamiento abductivo.

Noción de geometría y pensamiento geométrico

> Debemos confesar humildemente que, si el número es exclusivamente un producto del espíritu, el espacio posee además una realidad por fuera del espíritu, realidad donde nosotros no podemos dictar a priori las leyes.[1]

La noción y el uso de la geometría ha evolucionado con el tiempo, ha pasado desde la necesidad de medir –hablando específicamente en contextos reales– hasta la creación de contextos abstractos especializados de estudio –que desde luego, se pueden aplicar de nuevo a contextos reales de medición–. En esta travesía también han emergido diferentes ramas que, aunque comparten la palabra “geometría”, su carga cultural, filosófica, ontológica, epistemológica y disciplinar es distinta.

Es importante señalar también que en el imaginario común se considera que la verdadera geometría, o geometría pura, concierne al enfoque empleado por los

[1] Confesión en una carta que envía Bessel el 27 de enero de 1829. Citado por Michel Paty (1993) en un documento de Luis Carlos Arboleda y Maribel Patricia Anacona del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle, que habla sobre la tensión ente la enseñanza clásica de la geometría y las geometrías no euclidianas en el sistema educativo colombiano desde la perspectiva de Julio Garavito.

Murcia, C. y Pulido, J. (2022). Geometría versus realidad: discusión en un plano diferente. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 93-100. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

griegos y es así como denominan a Euclides el padre de la geometría, desconociendo años de desarrollos y experiencias. A continuación, se plantea una de las tantas facetas que ha tomado la geometría y se hará un análisis de los aspectos la originaron, su impacto en la sociedad, pero también en el individuo, tratando de considerar diferentes dimensiones especialmente lo pedagógico, que a propósito recae en la reflexión sobre los tipos de razonamiento (deductivo, inductivo y abductivo), sus características y posibles impactos en su tratamiento escolar.

INTUICIÓN GEOMÉTRICA

Una de las características importantes del taller sobre el que se reporta en este artículo radica en la importancia de la intuición, en este caso asociada a la noción de geometría, de la que reconocemos que es una habilidad inherente al ser humano. Esto es, todos nacemos con habilidades aritméticas, geométricas o estadísticas, una predisposición a aprender y ejecutar acciones de forma natural en la interacción con el entorno. Estas habilidades no requieren de un proceso de formación especializado, se pueden aprender en cualquier contexto, de acuerdo con las necesidades que allí emerjan o con intereses del sujeto. Por ejemplo, si nos remontamos a la época en que en Colombia las personas que conducían un bus de servicio público eran las mismas que cobraban el pasaje, seguramente muchos de ellos no tuvieron posibilidad de terminar sus estudios secundarios, tampoco utilizaban calculadoras para hacer cuentas y aun así eran expertos recibiendo dinero, haciendo multiplicaciones, sumas y restas a grandes velocidades. Estas habilidades no las adquirieron en institutos especializados en matemáticas y tal vez ni siquiera en las instituciones donde cursaron su primaria. Las habilidades, entonces, se las dio el mismo contexto: a muchos, por gusto y quizá a otros, por necesidad.

Esas mismas necesidades se han generado desde épocas remotas en todas las ramas de las matemáticas. En el caso de la geometría, antes de llegar a axiomas y teoremas de la geometría euclidiana, se establecieron juicios respecto a patrones, generalidades y regularidades geométricas que se observaban en la realidad. Estos procesos intuitivos, pero asertivos, iniciaron un camino del método científico en la geometría, partiendo de la propuesta de juicios intuitivos, que posteriormente fueron validados por medio de modelos axiomáticos-deductivos.

La validación que se realiza de la geometría por medio de la geometría analítica permitió darle otra mirada a la geometría sintética (axiomática - euclídea). Esta mirada es mecanicista por cuanto usa ecuaciones para modelar y explicar propiedades. Sin embargo, aunque es muy importante utilizar el análisis de los axiomas por medio de cuantificación, consideramos necesario no dejar a un lado los procesos intuitivos, verlos como parte del camino y no como el comienzo o la meta.

Esta reflexión de la perspectiva de la geometría es algo que a lo largo de la experiencia docente se ha visto en las aulas de matemáticas de educación básica y media. La geometría es vista como un cúmulo de axiomas, teoremas y fórmulas que le dan explicación y sentido a la geometría euclidiana, dejando de lado los procesos de intuición que emergen de la experiencia del sujeto y la relación constante entre él y el contexto. En este sentido, la enseñanza de la geometría debería tener elementos formales (geometría axiomática y analítica) y también la posibilidad de utilizar los elementos, propiedades y aptitudes que la experiencia ha otorgado, así como las percepciones de los sujetos de forma intuitiva y sobre todo natural.

Algunas situaciones que apuntan al uso de la intuición geométrica

A la hora de enfrentarse a una situación, a un problema o una actividad[2], el sujeto inicialmente toma una cierta actitud: ese primer momento es decisivo porque puede llevarlo a considerar caminos posibles, adoptarlo como algo dentro de su conocimiento sencillo, convertirlo en un reto o manifestar rechazo, entre otros. En ese instante su percepción evoca la experiencia vivida generando una perspectiva del problema.

Partiendo de este hecho, se consideran objeto de reflexión los resultados y las discusiones de las tareas que se van a proponer, que son del siguiente estilo:

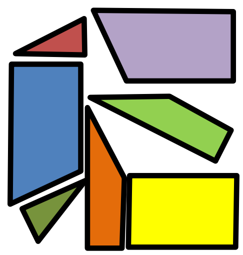
> Elabore un cubo utilizando las fichas –recortes en material concreto del cuadro izquierdo de la Figura 1.

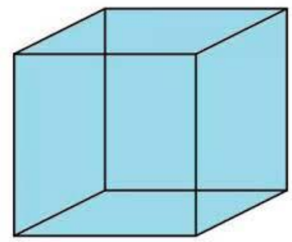
Frente a este hecho, resulta interesante recoger lo que los sujetos digan al respecto, porque esto permite observar las cargas experienciales de cada uno y las

[2] Varios autores han desarrollado teorías que indican la diferencia entre actividad, problema, tarea o situación. Sea cual sea la diferencia, en este taller nos centraremos en el rol y la actitud de los sujetos al enfrentar una tarea, actividad o problema.

características de su intuición geométrica aplicada a esta tarea. Además, se pueden cambiar niveles de dificultad y también realizar grupos, esto último permite analizar las interacciones que ofrecen otro importante escenario de análisis.

Figura 1: fichas para realizar un cubo





GEOMETRÍA PROYECTIVA

Uno de los nichos que se desprendieron en el estudio de la geometría clásica o euclidiana es la geometría proyectiva. Autores como Blanco (2006), Cottini (1980), Fernández (2008), De Porras y Ramos (2019) ubican los orígenes de la geometría proyectiva en el Renacimiento; en este momento histórico, el interés de los artistas –especialmente, de los pintores– era plasmar con mayor detalle la realidad y, por esto, el reto radicó en tomar objetos en tres dimensiones y plasmarlos en superficies planas.

En esta época, muchos de los artistas eran también ingenieros y arquitectos, lo que permitió que lograran expresar en la pintura aspectos de óptica, propiedades de los objetos en distancia, posición, medida, volumen y masa; además Blanco (2006) afirma que estos pintores tuvieron en cuenta tanto la posición del observador, como la de los objetos en los cuadros, simulando una pantalla, de esta forma se logra que cada punto de la escena, de origen a un rayo de luz que se dirige al ojo, ahora bien, la colección de estos rayos la llamaron proyección. En la mencionada época, muchos de los artistas eran también ingenieros y arquitectos, lo que les permitió expresar en la pintura aspectos de óptica y propiedades de los objetos (en distancia, posición, medida, volumen y masa). Blanco (2006) afirma, además, que en sus cuadros estos pintores tuvieron en cuenta tanto la posición del observador como la de los objetos, simulando una pantalla, logrando así que cada punto de la escena diera origen a un rayo de luz que se dirige al ojo; la colección de estos rayos la llamaron proyección.

En la Figura 2 se presenta un ejemplo de una pintura renacentista que evoca un momento en un contexto religioso. Se observa la aplicación de técnicas que permiten la proyección y generar sensación de profundidad.

Figura 2: cuadro de Andrea Mantegna y elementos de la geometría proyectiva (tomada de Saltiva et al., 2009)


De lo anterior, también se destaca que las obras y los apuntes hallados de los artistas renacentistas aportaron en matemáticas y geometría con reflexiones y construcciones que luego fueron aplicadas en otros campos o dieron origen a nuevas geometrías como la proyectiva, que llegó a una formalización en el siglo XVII con Desargues, quien utilizó elementos de la geometría euclidiana para plantear una nueva geometría.

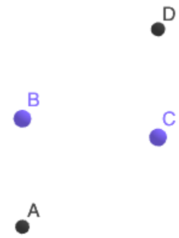
Algunas situaciones que apuntan a la geometría proyectiva

Concebir planos diferentes a la geometría clásica resulta un reto. Generalmente, las personas están inmersas en contextos que son difíciles de romper por la carga experiencial y cultural. ¿Cómo enfrentarse a situaciones que rompen paradigmas, si toda la vida se nos ha enseñado a pensar de una manera dirigida?

La siguiente tarea puede dar indicios que permiten reconocer elementos, discusiones y reflexiones sobre aspectos relacionados con la geometría proyectiva.

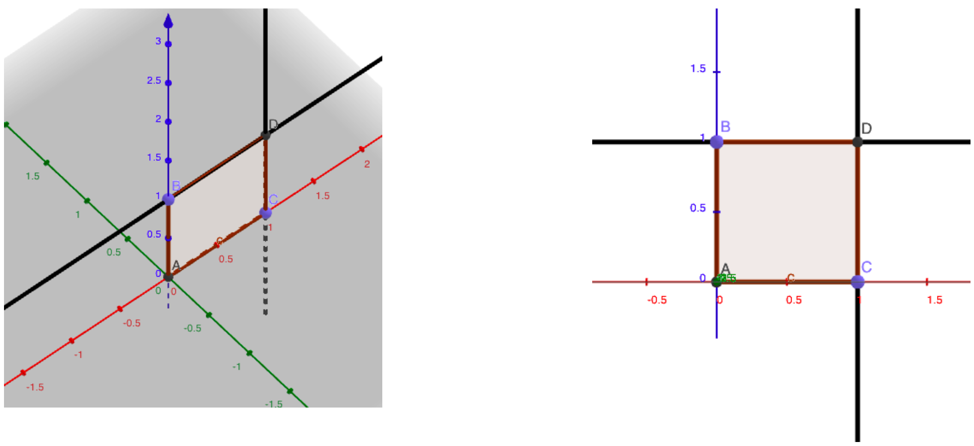
Indique a qué figura pueden pertenecer los puntos de la Figura 3.

Figura 3: puntos de una figura geométrica



Luego de lanzar hipótesis, tratar de demostrarlas y generar una discusión, se les muestra una de tantas posibles maneras en las que esos puntos pueden ser parte de una figura, como por ejemplo un cuadrado, tal como se muestra en la Figura 4.

Figura 4: cuadrado en un plano 3d



Como se puede apreciar, las propiedades de cuadrado se mantienen, solo que se percibe desde un plano distinto.

A MANERA DE CONCLUSIÓN: LOS RAZONAMIENTOS

En el desarrollo del documento se han expuesto algunos elementos históricos y disciplinares con el objetivo de generar discusión y reflexión, para contextualizarse especialmente en el campo pedagógico ¿Qué pasa si se tienen en cuenta aspectos diferentes a los tradicionales en la enseñanza de la geometría? ¿La forma de razonar influye en la capacidad de romper paradigmas?

Analizando momentos históricos se puede concluir que la geometría por tener sus raíces en la intuición y de su relación con la realidad, posee un carácter de pensamiento natural, en un contexto semiótico peirciano se podría decir que tiene elementos abductivos tal como lo mencionan autores como Velasco

(2003) y Henao (2017), entre otros, quienes en sus análisis destacan la importancia de reflexionar la manera como se observa el mundo.

Posteriormente el ser humano, en su esfuerzo por demostrar y construir conocimiento, formaliza lo que se denominan geometrías no euclidianas, estas poseen la misma característica de la geometría clásica, empezó con fines prácticos y muy atados a la realidad para luego someterse al planteamiento de nuevos paradigamas con sus propios, escenarios, fundamentos, definiciones, axiomas y teoremas.

Todo lo anterior para poner en el escenario la discusión alrededor de la geometría en contexto escolar. Dado que los sistemas educativos usuales están fundamentados en formas de razonamiento deductivos (Segura, 2022), la geometría no es ajena a esto, lo más usual es que inicialmente se consideren las áreas fragmentadas y además, según las políticas públicas en educación en lo referente al currículo, la geometría más trabajada es la euclidiana y en algunos casos la analítica, en el espacio de trigonometría designado para grado décimo en el sistema escolar colombiano. Se hace referencia al razonamiento deductivo porque la estrategia pedagógica consiste en conocer temas, objetos y saberes matemáticos y geométricos y luego plantear problemas y ejercicios.

Este fenómeno impacta en la formación de los y las estudiantes, porque mecanizan un modelo que luego replican en conductas de interacción con otros contextos, expresiones como “dígame cómo se hace y yo lo hago”, “pero deme un ejemplo para aprender y luego lo repito”, podrían tener aplicaciones en muchos contextos, pero claramente determina una falta de creatividad, aspecto fundamental en la invención.

Otro tipo de razonamiento es el inductivo, que no tiene mucha popularidad en la geometría escolar, pero es importante a la hora de plantear teoremas. Por último el razonamiento abductivo, que poco ha sido explorado en los contextos geométricos, pero que integra procesos de los otros dos razonamientos, permite el planteamiento de hipótesis, y también, es posible que no solo facilite el desarrollo de la creatividad en el contexto de la invención, sino que rompa paradigmas y cree unos nuevos.

Con esto no se quiere decir que no haya aprendizajes en las formas clásicas de la geometría escolar, sino que plantear las situaciones, actividades o tareas de formas distintas, dirigiéndolas a otro razonamiento como el abductivo, propicia no solo la creación de hipótesis en geometría sino tal vez una conducta en la interacción con el mundo, con la realidad.

REFERENCIAS

Arboleda, L. C. y Anacona, M. (1994). Las geometrías no euclidianas en Colombia. *Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, *11*(67), 7-24.

Blanco, H. (2006). Un cambio en el paradigma de la geometría. *Premisa*, 28, 37-47.

Cottini, A. (1980). El período barroco y Desargues - Arquitecto y genial matemático, los principios de la geometría proyectiva. *Revista de la Universidad de Mendoza*.

De Porras, M. y Ramos, C. (2019). El arte y la historia de la construcción en la geometría proyectiva. *Saber, Ciencia y Libertad*, *14*(2), 295-311.

Fernández, J. M. (2008). Perspectiva y geometría proyectiva. *Revista A-Arquitectura PUCP*, *2*(3), 51-59.

Giovannini, E. (2011). Intuición y método axiomático en la concepción temprana de la geometría de David Hilbert. *Revista Latinoamericana de Filosofía*, *37*(1), 35-65.

Henao, R. D. (2017). *La razonabilidad en una didáctica de la lógica abductiva: una estrategia para la formación de maestros*. Tesis doctoral, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Saltiva, I. (2009). Geometría proyectiva. En J. Pinasco et al., *Las geometrías* (cap. 7, pp. 105-129). Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

Velasco, L. (2003). La cosmovisión peirceana como herramienta epistemológica para leer la física. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 13.

TAREAS DE ARGUMENTACIÓN: ¿POR QUÉ UN "POR QUÉ" NO ES NECESARIO NI SUFICIENTE?

Claudia Vargas, Óscar Molina, Carmen Samper, Patricia Perry y Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional
cmvargasg@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co, pperryc@yahoo.com.mx, lcamargo@pedagogica.edu.co

En el cursillo comunicamos algunos factores claves que pueden contribuir al diseño de tareas cuya intención es brindar oportunidades para la producción y explicitación de argumentos. Mediante las actividades que se propicien, pretendemos que los participantes reconozcan que tener una conceptualización especializada sobre argumento y tarea de aprendizaje es tener un referente para el diseño de tareas; el primero porque revela tipos de argumentos que se pueden contemplar como expectativa de aprendizaje; el segundo porque alude a elementos mínimos que componen el enunciado mismo de una tarea de aprendizaje. El cursillo dará elementos a los participantes para que comiencen a problematizar la necesidad y la suficiencia de la locución adverbial "por qué" en la formulación de tareas de argumentación.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, existe consenso sobre la importancia de promover la argumentación en la clase de matemáticas, dado que es una práctica que favorece una buena comunicación matemática (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016; Lin, 2018). El consenso se ve reflejado en el hecho de que, en diferentes países, los documentos curriculares han expresado la necesidad de que la argumentación y el argumento sean asuntos centrales en la enseñanza y el aprendizaje en la escuela, incluso desde los primeros años de escolaridad (e.g., Ministerio de Educación Nacional –de Colombia–, 2006; *National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers*, 2010). En indagaciones informales encontramos evidencias de la tendencia a considerar que se promueve la argumentación con tan solo incluir indicaciones como "explique su respuesta" o preguntar "por qué". Pero, responder a esas solicitudes ¿es siempre argumentar? ¿Cualquier tarea se puede convertir en tarea de argumentación simplemente añadiendo instrucciones como esas? El asunto planteado y la respuesta que demos revisten gran importancia porque, como lo señala Stylianides

Vargas, C., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2022). Tareas de argumentación: ¿por qué un "por qué" no es necesario ni suficiente? En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 101-113. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

(2016), una tarea puede limitar o ampliar la competencia argumentativa de los estudiantes. Las inquietudes anteriores sugieren que los profesores debemos poder contar con una guía que nos facilite el proceso de diseñar tareas escolares que realmente propicien la producción y explicitación de argumentos.

Como lo exponen Kieran, Doorman y Ohtani (2015), existen varios referentes para el diseño de tareas matemáticas. Algunas propuestas son generales (e.g. Gómez, Mora y Velasco, 2018), en el sentido de que no se dedican a un proceso matemático específico o a un contenido matemático particular; otras no lo son. Por ejemplo, Lin, Yang, Lee, Tabach y Stylianides (2012) proponen principios para el diseño de tareas que propician la conjeturación y la demostración, y Stylianides (2016) expone caracterizaciones para tareas matemáticas que promueven la demostración y la justificación. En ambos casos, los autores se refieren a tareas que no están enfocadas específicamente en la argumentación, pero sí en procesos relacionados con ella. Otros, como Prusak, Hershkowitz y Schwarz (2013, citado en Kieran et al., 2015) presentan una propuesta para el diseño de tareas que propician la argumentación en geometría. Y hay autores que se centran en cuestiones más específicas como identificar la estructura del enunciado de tareas que propician la argumentación en geometría (Molina y Samper, 2019).

El panorama que acabamos de señalar nos permite ver que tienen total relevancia y pertinencia los esfuerzos que se hagan para apoyar a los profesores de matemáticas, en su proceso de apropiación de un conocimiento especializado que les permita diseñar tareas que promuevan la argumentación. Por ello, como formadores de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) en Bogotá, Colombia, y miembros del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la UPN, realizamos el proyecto de investigación *Conocimiento del profesor de matemáticas para el diseño de tareas que favorecen la argumentación* (DMA-518-20) en el año 2020. La meta de este era poder ofrecer a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas un espacio de formación que favoreciera la apropiación, por parte de los estudiantes, de elementos pertinentes para diseñar tareas que promuevan la argumentación en el aula escolar. Esa meta resuena con la idea de que diseñar o rediseñar tareas contribuye a la construcción del conocimiento del profesor de matemáticas (Sousa, Silva, Font y Cassia, 2020). En el proceso de diseñar tareas de formación profesional que favorezcan el aprendizaje sobre asuntos relativos al diseño de tareas de argumentación, nos basamos en la conceptualización que hemos alcanzado de argumentación, argumento y tarea de aprendizaje. Este ejercicio nos permitió identificar elementos específicos útiles en el diseño de tareas que aumentan la probabilidad de propiciar la argumentación en la clase de Geometría.

El objetivo de este cursillo es exponer e ilustrar, mediante la ejemplificación de los enunciados de dos tareas y del análisis de estos, elementos fundamentales que se podrían tener en cuenta para formular el enunciado de una tarea de argumentación. Además, en el análisis, a partir de nuestra conceptualización de argumento, esbozamos situaciones argumentativas esperadas durante el proceso de resolución de la tarea propuesta. Con la ilustración, pretendemos mostrar que es posible formular enunciados de tarea de argumentación que, sin recurrir al uso de la locución “por qué”, procuran disminuir la incertidumbre sobre el potencial de un enunciado para alcanzar expectativas de aprendizaje relacionadas con la explicitación de argumentos y, por ende, para generar oportunidades para que el profesor acopie evidencias sobre el logro de las expectativas.

MARCO DE REFERENCIA

Antes de exponer algunas cuestiones que consideramos útiles para diseñar tareas que promuevan la argumentación, exponemos nuestra conceptualización de argumentación, tarea y tarea de argumentación.

Argumento y argumentación

En el campo de la Educación Matemática coexisten muchas definiciones de argumentación y argumento. Tomando elementos de un resumen hecho por Molina (2019) a partir de un documento de Reid y Knipping, en la Tabla 1 se presentan algunas definiciones.

Tabla 1: definiciones de argumentación y argumento

Autores	Argumentación	Argumento
Duval (1999)	Tipo de razonamiento ligado a la justificación o convencimiento de una tesis o pronunciamiento.	Cualquier cosa (hecho, definición, acción, teorema, etc.) que justifique o refute una proposición.
Boero (1999)	Proceso que produce un discurso realizado de acuerdo con reglas compartidas y cuyo propósito es	Razón o razones que se da(n) a favor o en contra de una proposición u opinión.

	llegar a una conclusión mutuamente aceptable sobre una declaración cuyo contenido o verdad está en debate.	

Reconocemos varias diferencias entre las definiciones de argumentación presentadas en la tabla anterior. Por ejemplo, para Boero (1999) y Krummheuer (1995), la argumentación es un proceso social, pero para Duval (1999) es un proceso individual. Para Boero, la argumentación debe formularse siguiendo unas normas establecidas y compartidas, mientras que los otros dos autores no exigen un formato especial. El propósito de la argumentación para Boero es llegar a una conclusión, aceptada por muchos, respecto a una afirmación que está en debate: para Krummheuer, es tomar una decisión, y para Duval, es justificar una afirmación. En lo que concierne a la definición de argumento, para Boero y Duval un argumento es un conjunto de razones. Para Duval, el argumento tiene como objetivo justificar o refutar una proposición, con lo cual coincide con Boero, excepto que, para ellos, también se justifica o refuta una opinión. Para Krummheuer, un argumento es el resultado de una argumentación y no establece objetivo alguno.

El rápido sondeo que hemos presentado no deja lugar a duda sobre diferencias que hay en la conceptualización de los términos que nos interesan. Por ello, es importante explicitar cuál es nuestra definición de cada uno de estos términos.

> Argumentación: es un proceso discursivo y sociocultural en el que surgen argumentos.
>
> Argumento: es una expresión discursiva escrita u oral regulada por normas compartidas, que expone una postura o una proposición y las razones (justificación) que sustentan, respectivamente, el acuerdo con la postura o el valor de verdad de la proposición.
>
> Argumento simple: es un argumento conformado por tres elementos –dato, aserción, garantía– relacionados funcionalmente; el dato da fundamento a la aserción, es evidencia que justifica la aserción; la garantía da soporte a la relación del dato y la aserción, justifica con un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. En caso de que falte la garantía, hablamos de argumento simple incompleto.

Tal como se expuso en la definición de argumento simple, los tres elementos básicos que lo componen (Toulmin, 2003) tienen una relación funcional que es siempre la misma, independientemente de cuál haya sido el curso de la argumentación en la que aquel haya surgido. Sin embargo, es precisamente la forma como se construye el argumento –principalmente, cuál de los tres elementos se infiere– lo que nos ofrece un criterio para hacer una tipificación de los argumentos y lo que tiene el potencial para sugerir el enunciado de una tarea.

Es posible que se exponga cierta clase de información en calidad de dato –información que podría aceptarse como verdadera– y, sea la aserción el elemento que deba inferirse como resultado de la argumentación (argumento deductivo). Otra situación argumentativa posible es que la aserción haya sido expuesta desde el principio y se acepte como verdadera –razón por la cual el interés de la argumentación es sustentar la veracidad de la aserción– y, sea el dato el elemento que deba aportarse como resultado de la argumentación, es decir, deba inferirse (argumento abductivo). También existe una situación argumentativa en la que el dato presenta una característica que tienen en común todos los objetos de un conjunto, e incluye una segunda propiedad que se ha reconocido como común a algunos de ellos; de tal información se concluye como aserción que por lo menos un objeto del mismo conjunto, que no se había considerado, tiene la segunda propiedad (argumento inductivo).

Tarea

En conversaciones cotidianas usamos el término tarea para referirnos a aquello que debemos hacer, como lavar la ropa u organizar un archivo. Ello coincide con dos de las acepciones de tarea que presenta el DRAE: obra o trabajo que debe hacerse en tiempo limitado; deber (ejercicio que se le encarga al alumno). Estas acepciones están en consonancia con la propuesta de Watson et al. (2014), según la cual *tarea* refiere a una gama amplia de “cosas por hacer”; es decir, una tarea enuncia algo que se debe hacer. Gómez et al. (2018), manteniendo la esencia de la definición de Watson, especifican lo que es una tarea matemática escolar propuesta por un profesor a sus estudiantes: “es una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje” (pp. 198). Sin pretender ser exhaustivos, la demanda puede incluir acciones, como son: abordar ejercicios repetitivos, construir representaciones de objetos, ejemplificar definiciones, resolver problemas, explicar una postura, justificar una postura, exponer una definición, llevar a cabo experimentos o investigaciones. Dicen estos autores que “[u]na tarea incluye, además de su formulación [la de la demanda], elementos como sus requisitos y metas, el uso de materiales y recursos, formas de agrupar a los estudiantes, estrategias de interacción entre los estudiantes y con el profesor, y su temporalidad" (p. 198). Los elementos que quedan sugeridos como integrantes de una tarea, preferimos verlos como elementos del diseño de una tarea. Teniendo en cuenta lo anterior, establecimos la siguiente definición de tarea de aprendizaje:

> *Tarea de aprendizaje* es una acción (o acciones) por realizar, que el profesor propone a sus estudiantes con la intención de brindar oportunidades para que logren las expectativas de aprendizaje que ha establecido.

La tarea se presenta a los estudiantes mediante un enunciado que incluye una *solicitud*, una *situación* que la contextualiza y, eventualmente, unas *indicaciones* que conciernen a la tarea. La *solicitud* expresa lo que es la tarea. La *situación* que contextualiza la tarea está conformada por información (e.g., hechos, relaciones, circunstancias y eventos) que enmarca el tipo de acción por realizar que el profesor pretende promover, según su expectativa de aprendizaje (la solicitud). Las *indicaciones* exponen sugerencias para apoyar o condiciones para limitar la ejecución de la solicitud. La expectativa de aprendizaje subyace tras la tarea, no se explicita, pero un experto puede desentrañarla.

Es posible que el enunciado de una tarea incluya varios ítems y que eventualmente cada uno de ellos tenga los tres componentes que hemos mencionado antes. Las solicitudes no necesariamente tienen el mismo alcance; una puede ser principal y las demás subsidiarias de esta. Pero, si se han incluido los ítems es porque cada uno apunta a algún aspecto que contribuye al logro de las expectativas subyacentes; la relación sinérgica o complementaria entre los varios aspectos apunta al logro de la expectativa de aprendizaje principal establecida por el profesor.

Entendemos por *tarea de argumentación* una que propone el profesor con la intención de brindar oportunidades para la producción y explicitación de argumentos. A diferencia de otros autores, señalamos la necesidad de explicitación, por varias razones. Para el profesor, es una forma de rastrear el aprendizaje que los estudiantes logran respecto a argumento. Para el estudiante, es una forma de ir identificando cómo se elaboran argumentos. Y para profesor y estudiantes, es el lugar donde se expresa qué se afirma y qué razones permiten sostener aquello que se afirma.

Los dos ejemplos que presentamos a continuación pretenden soportar el mensaje central de este artículo: una tarea de argumentación no necesariamente requiere tener una indicación directa y explícita como “por qué”, “explique su respuesta”, etc., para lograr la explicitación de argumentos. Proponemos que es posible formular enunciados de tareas de argumentación, sin incluir solicitudes como las anteriores. Pero si tuvieran ese tipo de indicaciones, podría no ser suficiente que se lograra dicha explicitación.

EJEMPLOS

Consideremos el enunciado de dos tareas.

Cuadro 1: enunciado de Tarea 1

1. Responda la siguiente pregunta: ¿qué propiedad debe tener un trapecio $ABCD$ para que las mediatrices de dos lados coincidan?
   Durante el proceso que realiza con geometría dinámica para responder la pregunta, elabore un reporte que incluya:
   a. las *acciones realizadas* para construir cada una de las condiciones requeridas para que la figura sea un trapecio.
   b. las *acciones realizadas* para explorar la situación (qué midió o qué arrastró o qué construcciones auxiliares hizo o a qué elemento le puso rastro, etc.), las *acciones realizadas* con las que llegó a determinar el resultado y los *descubrimientos* logrados con la exploración.
2. Escriba una conjetura (como proposición condicional) que exprese lo que descubrió y diga de qué se vale para decir que esta es verdadera.

Antes de presentar el análisis que se enfoca en determinar la posible actividad argumentativa que podría suscitar el enunciado propuesto, recordamos que, tomando el enunciado como un todo, el análisis que se haga de este debe incluir el examen de cada uno de los ítems con miras a determinar cómo cada uno influye en la expectativa que se tiene con el enunciado completo. En suma, el análisis apunta a describir el bosque (enunciado de la tarea) valiéndose de las especificidades de sus árboles (situación, solicitudes, indicaciones) y las relaciones entre estas.

Iniciamos el análisis del enunciado de la Tarea 1 indicando cuál es la solitud, la indicación y la situación. En primera instancia, reconocemos que el numeral 1 del enunciado de la tarea plantea una *situación* geométrica que involucra un hecho (por descubrir) que relaciona un trapecio y las mediatrices de dos lados.

Vemos una *solicitud* principal que consiste en responder la pregunta del numeral 1. En la frase “Durante el proceso que realiza con geometría dinámica para responder la pregunta, elabore un reporte que incluya:” identificamos dos componentes más del enunciado: la *indicación* de usar un *software* de geometría dinámica, que se convierte en un apoyo para responder la pregunta y una *solicitud* subsidiaria que consiste en hacer un reporte. Para apoyar esta última *solicitud* se plantean dos *indicaciones* que se concretan en los ítems a y b; decimos que son indicaciones porque sugieren aspectos que se deben contemplar en el reporte. Estas sugerencias, además, apoyan el establecimiento de la respuesta a la pregunta de la solicitud principal; explicamos:

Con el ítem a, se pretende inducir al resolutor a realizar unas acciones en el *software* (que se deben reportar) que garanticen que la construcción resultante sea un trapecio y las mediatrices de sus lados. Tener dicha construcción provee una figura idónea para explorar con ella y también, una mayor posibilidad de encontrar la respuesta correcta a la pregunta.

Con el ítem b, se pretende inducir al resolutor a tener presente las acciones que realiza durante la exploración de la construcción, que podrían haber ayudado a descubrir lo deseado, pues son insumos que requiere para proponer el antecedente de la conjetura que reportará la relación buscada entre el trapecio y la propiedad que deben cumplir las mediatrices. Específicamente, llegar a establecer como dato posible que el trapecio es isósceles.

El numeral 2 del enunciado de la tarea plantea dos *solicitudes* subsidiarias de la principal y una indicación; la primera pide la formulación de una conjetura que contiene la respuesta a la pregunta del numeral 1 (solicitud principal) como una proposición condicional (indicación). Para este caso, la formulación es *si un trapecio es isósceles, entonces las mediatrices de sus lados paralelos coinciden*. La segunda solicitud es reportar de qué se vale el resolutor para decir que la conjetura es verdadera. En suma, con estas dos *solicitudes* se pretende inducir al resolutor a reportar tanto la respuesta a la primera pregunta en una conjetura, como las razones que, desde su punto vista, sustentan la veracidad de esta.

Con el análisis anterior, centrado en la actividad matemática que un resolutor podría llevar a cabo, ¿disponemos de insumos para cualificar el enunciado de la tarea como el de una tarea de argumentación, aunque no incluya la expresión “por qué”?

Para responder debemos considerar una *expectativa de aprendizaje* que subyace tras el enunciado, en relación con la actividad matemática que podría suscitar: favorecer la producción de argumentos abductivos (Pedemonte, 2007; Baccaglini-Frank, 2010), inductivos y deductivos. La abducción tiene como función la explicitación (o descubrimiento) de datos que podrían causar un hecho –o aserción– que ha sido expuesto desde el principio (*las mediatrices de dos lados coinciden*) y que se considera verdadero; la inducción lleva a la construcción de conjeturas que reportan lo descubierto. Finalmente, la deducción puede surgir cuando se requiere sustentar una respuesta o, como en este caso, exponer qué genera la necesariedad de la conjetura formulada.

Como lo importante de una tarea de argumentación no es solo que se produzcan argumentos, sino también que se expliciten, esto implica incluir solicitudes subsidiarias o indicaciones que promuevan esa explicitación. Por ejemplo, para los ítems a y b, un estudiante puede reportar que construyó un trapecio genérico, las mediatrices de sus lados, midió ángulos y lados, y que arrastró hasta encontrar qué atributo del trapecio hace coincidir las mediatrices de los lados paralelos. Para convencerse de que este debe ser isósceles puede realizar arrastres y así estudiar muchos ejemplos. Otra posibilidad es que haya construido desde un comienzo un trapecio especial (con dos ángulos rectos, lados no paralelos congruentes o tres lados congruentes), las mediatrices de sus lados y haya observado que en los dos últimos casos las mediatrices de los lados paralelos coinciden.

El contexto descrito le ofrece al profesor una mejor referencia para encontrar evidencias de si la conjetura propuesta en el numeral 2 es resultado de una argumentación abductiva o inductiva. Con el propósito de ilustrar el asunto, exponemos una posible repuesta al numeral 2: “La conjetura es verdadera porque el *software* nos mostró que la única posibilidad para que las mediatrices de un trapecio coincidieran es que este debe ser isósceles y las mediatrices consideradas deben ser las de los lados paralelos”.

Antes de indicar el argumento principal que subyace tras esa posible respuesta, cabe la siguiente aclaración: en matemáticas, validar una proposición condicional implica demostrar que su consecuente es consecuencia necesaria del antecedente. De manera análoga, podríamos entender que afirmar la veracidad de una conjetura implica sustentar que su consecuente es consecuencia de su antecedente; en este caso, sustentar no significa producir una demostración necesariamente, aunque podría ser; significa producir razones de algún tipo que, por ejemplo, pueden estar basadas en experimentaciones empíricas.

Para el caso de nuestro análisis, que se relaciona con una argumentación abductiva, lo dicho en el párrafo anterior se traduce en reportar por qué el hecho conocido ocurre (es verdad); desde un punto de vista pragmático, eso significa contemplar qué causó que el hecho conocido fuera verdad. Si lo que expone en su reporte se condice con el antecedente de la conjetura que propone el estudiante, entonces se puede decir que el estudiante identifica la relación de dependencia que ha expuesto en la conjetura. Con esta explicación, sustentar la veracidad de una conjetura a partir de un argumento abductivo, implica explicitar que su antecedente fue inferido como dato cuyo consecuente era el hecho conocido (la aserción).

Si tomamos la respuesta que dimos al numeral 2, se puede reconstruir un argumento abductivo en el que su aserción es *mediatrices de un trapecio coinciden* (hecho conocido); y su dato, lo que lo causó, es *el trapecio es isósceles*, junto con la experimentación hecha en el *software*.

Con las ideas que acabamos de exponer, creemos que tenemos elementos suficientes para indicar que el enunciado analizado es el de una tarea de argumentación.

Enseguida presentamos otro ejemplo del enunciado de una tarea que, aunque incluye un "por qué", puede no llevar a producir una argumentación y lograr la explicitación de argumentos, debido a la interpretación que puede dar un estudiante a la solicitud, si profesor y estudiantes no han establecido previamente qué es lo que se está pidiendo con la pregunta.

Cuadro 2: enunciado de Tarea 2

Con geometría dinámica, construya un cuadrilátero en el cual las mediatrices de exactamente dos lados coincidan. ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Por qué?

Para esta tarea, la situación es geométrica e involucra una relación entre el tipo de cuadrilátero y las mediatrices de dos de sus lados. La solicitud principal es identificar el tipo del cuadrilátero resultante, respuesta que podría formularse o no como proposición condicional. Una solicitud subsidiaria es hacer una construcción, y se indica el uso de geometría dinámica para hacerla. La segunda solicitud subsidiaria es responder la pregunta "¿Por qué?", solicitud que puede dar lugar a respuestas tan variadas como las siguientes:

> Respuesta 1: Porque primero construí un cuadrilátero, después hice las mediatrices de dos lados, luego medí los ángulos y lados del cuadrilátero y a continuación arrastré hasta que logré que las mediatrices de dos lados coincidieran.
>
> Respuesta 2: Me imaginé que podría ser un trapecio isósceles. Construí un trapecio isósceles, las mediatrices de los lados paralelos, y arrastré para obtener muchos ejemplos. En todos, las mediatrices coincidieron. Concluyo que si es trapecio isósceles, entonces las mediatrices de dos de sus lados coinciden.

La primera respuesta es una descripción de lo que hace y ve el estudiante. Ha interpretado el "¿por qué?" como la solicitud de reportar el proceso que llevó a descubrir la relación esperada. En este caso, no hay un argumento. En cuanto a la Respuesta 2, aunque también describe el proceso de construcción y exploración, se entrevé un argumento abductivo porque propone una posible causa de la coincidencia de las dos mediatrices: ser trapecio isósceles. También hay un argumento inductivo que se manifiesta al escribir lo que concluye, producto del estudio de varios casos.

CONCLUSIONES

No dudamos de que la locución "por qué" en un enunciado de una tarea puede llevar a generar la producción de argumentos si se ha establecido previamente (quizá como norma de la clase) que se trata de sostener algo y presentar las razones para sostenerlo. Sin embargo, con el análisis realizado al enunciado de dos tareas, deliberadamente quisimos ilustrar dos ideas.

1) Existen maneras alternativas de formular enunciados de tareas que, por un lado, disminuyen la incertidumbre sobre si estos suscitan la expectativa de producir y explicitar algún tipo de argumento y, por otro, proveen evidencias al profesor de qué de esa expectativa ha logrado el estudiante. En nuestro primer ejemplo, no solo plantear la pregunta, sino solicitar un reporte con ciertas características apunta decididamente a ambos aspectos.

2) No es suficiente con preguntar "¿por qué?" pues los estudiantes pueden interpretar esta demanda como una solicitud de describir. El cuestionamiento debe ir acompañado con indicaciones acerca de la necesidad de explicitar qué se

afirma y qué razones sostienen la afirmación o de haber establecido un acuerdo claro sobre el significado de la pregunta.

Quisimos dejar como mensaje que tener una conceptualización especializada sobre argumento y sobre tarea de aprendizaje genera un referente que amplía la visión para el diseño de tareas. Por un lado, en cuanto a lo que significa explicitar un argumento y los tipos de argumentos que se pueden contemplar como expectativa de aprendizaje; por otro, en cuanto a los elementos mínimos que componen, por ejemplo, el enunciado mismo de una tarea de aprendizaje.

En relación con esto último, ilustramos cómo solicitudes principales o subsidiarias –junto con indicaciones muy precisas que no necesariamente incluyen un "por qué"– tienen el propósito de impulsar la producción de argumentos y su explicitación o, por lo menos, de recoger los insumos producidos por los estudiantes para poder reconstruir el proceso de argumentación que se llevó a cabo y el correspondiente argumento. Así mismo, podríamos decir que la forma como se enuncia la solicitud de una tarea (para nuestro caso, la pregunta que da lugar a la solicitud principal) podría inducir el surgimiento de un tipo específico de argumento (para más detalle sobre esto, véase Molina y Samper, 2019).

REFERENCIAS

Baccaglini-Frank, A. (2010). The maintaining dragging scheme and the notion of instrumented abduction. En P. Brosnan, D. Erchick y L. Flevares (eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 607-615). Columbus, OH: The Ohio State University.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.*

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez, P., Mora, F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez (ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Kieran, C., Doorman, M. y Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. En A. Watson y M. Ohtani (eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI Study 22* (pp. 19-81). New York: Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lin, P. (2018). The development of students' mathematical argumentation in a primary classroom. *Educação & Realidade, 43*(3), 1171-1192. doi:10.1590/2175-623676887.

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics* (pp. 305-325). New York: Springer.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá, Colombia: MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Molina, Ó. (2019). *Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación.* Tesis de doctorado, Universidad de los Lagos, Chile.

Molina, Ó. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 109-134.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Washington, DC: Autor.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.

Sousa, J., Silva, T., Font, V. y Cassia, J. (2020). Task (re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 2*(4), 98-120. Recuperado de https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5711

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Stylianides, A., Bieda, K, y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Toulmin, S. (2003). *Los usos de la argumentación* (edición actualizada) (María Morrás y Victoria Pineda, trads.). Barcelona: Ediciones Península (original en inglés, publicado en 1958).

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite, J., Doorman, M., Kieran, C., … Yang, Y. (2014). Task design in mathematics education. En C. Margolinas (ed.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 9-15). Oxford, Reino Unido.

Encuentro de

GEOMETRÍA

y sus APLICACIONES

22 al 24 de junio de 2022

Comunicaciones

Diseño de una tarea de argumentación: acción que movilizó nuestra definición de argumento

Lucía Alarcón, Jenifer Fernández y Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
dlalarconm@upn.edu.co, jeafernandezc@upn.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

Como parte de un plan de acción cuyo objetivo era desarrollar nuestro conocimiento didáctico matemático en la dimensión didáctica sobre argumento y argumentación, diseñamos una tarea para profesores. Nuestro objetivo al hacerlo era identificar elementos de nuestro conocimiento sobre estos asuntos, derivados del diseño y análisis de la tarea. Utilizamos como referente teórico el modelo del CDM propuesto por Pino-Fan y Godino y como referente conceptual nuestras definiciones personales de los asuntos. En este artículo, presentamos dos episodios en los que hay evidencia del conocimiento que teníamos de argumento y argumentación y cómo este se modificó.

Introducción

A continuación, presentamos un episodio definitorio de una investigación que realizamos, cuyo propósito era describir el proceso de transformación de nuestro conocimiento didáctico matemático en la dimensión didáctica (CDM-DD) para diseñar tareas que favorezcan la argumentación, involucren definiciones de objetos geométricos y en las que haya que usar geometría dinámica (GD) para resolverlas. La inquietud inicial surgió porque nos fue evidente que las tareas que proponíamos a nuestros estudiantes no favorecían la argumentación, lo que indicaba, como lo señalan Schwarz y Kaiser (2009), que nuestro CDM-DD requerido para realizar ese tipo de tarea era limitado. Otra problemática que teníamos era la dificultad para incorporar el uso de GD en las tareas que proponíamos. Teníamos, como lo expresan Hanna y de Villiers (2012), que repensar la manera en que se utilizan estas herramientas para favorecer la argumentación. Teniendo en cuenta lo anterior, surgió la pregunta de investigación: ¿De qué manera se van incorporando en el conocimiento didáctico y matemático del profesor fundamentos para diseñar tareas apoyadas con GD, que promuevan la construcción de argumentos en los que se propongan o utilicen definiciones de objetos geométricos?

Alarcón, L., Fernández, J. y Samper, C. (2022). Diseño de una tarea de argumentación: acción que movilizó nuestra definición de argumento. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 117-124. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

El propósito de este artículo se centra en mostrar el efecto que tuvo en nuestro CDM-DD el proceso de diseño de una tarea, dirigida a profesores en ejercicio, cuyo fin era abordar los conceptos argumento y argumentación, a través de ejemplos y no ejemplos de argumento. El objetivo del ejercicio de diseño era identificar en lo que proponíamos, en lo que discutíamos durante su realización y en la interacción sobre el diseño con la asesora del trabajo de grado, elementos de nuestro conocimiento sobre argumento y argumentación. Posiblemente, encontraríamos modificaciones de la definición que habíamos adoptado de argumento, antes de este proceso.

Presentamos el marco de referencia en el cual se basa el estudio, la estrategia metodológica utilizada, dos episodios durante el proceso de diseño y su respectivo análisis, los resultados y las conclusiones que surgieron.

MARCO DE REFERENCIA

Nos enfocamos en la faceta epistémica de la Dimensión Didáctica del modelo CDM del profesor (Pino-Fan y Godino, 2015). Esta dimensión se refiere al conocimiento necesario para la enseñanza, es decir, el conocimiento que requiere el profesor para encontrar las soluciones a una tarea que propone en el aula, establecer las representaciones, los procedimientos, los argumentos y los objetos matemáticos que se usan para poder resolver la tarea.

Los referentes conceptuales en los que nos basamos para analizar nuestro conocimiento son nuestras definiciones, construidas como resultado de lo expuesto en cursos de la Maestría y la lectura de algunos artículos.

> **Argumentación:** es un proceso en el que se produce un discurso, es decir, es un proceso comunicativo, producto de un razonamiento. Consiste en dar razones para convencer o persuadir a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha, con el fin de establecer una conclusión.
>
> **Argumento:** es un enunciado oral o escrito producto de la argumentación.
>
> **Estructura de un argumento:** según el modelo de Toulmin, la estructura del argumento está conformada por dato, aserción y garantía, donde la garantía es una proposición general que relaciona el dato con la aserción, y dato y aserción son proposiciones particulares.
>
> **Argumento abductivo:** es aquel en el que se conocen la aserción y la garantía, y se usan para inferir un posible dato.

ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

La estrategia investigativa que usamos tiene carácter de investigación-acción (IA) (Carr y Kemmis, 1998, citado en Serres, 2007). En ella propusimos tres ciclos de investigación. En cada ciclo planteamos un plan de acción para atender subproblemas que pretendían dar una posible solución al problema de investigación original. Como producto del plan de acción realizado en cada ciclo, escribimos una narración, de donde posteriormente extrajimos, como datos, fragmentos en los que se expresan ideas sobre los asuntos en cuestión.

En el Ciclo 2 de la investigación, tomamos como subproblema determinar diferencias entre argumento y argumentación. Para ello, propusimos un plan compuesto de dos acciones; una de estas fue diseñar una tarea sobre argumentación para implementarla con los profesores de matemáticas de los colegios en donde laboramos. Los datos que vamos a presentar provienen de las transcripciones de dos episodios: diseño de la tarea y experimentación de la tarea.

Para hacer el análisis, construimos un conjunto de categorías que provienen, unas de la definición que nosotras teníamos de argumentación, y otras, que emergieron en el análisis de datos del Ciclo 1.

Tabla 1: categorías de análisis

Faceta	Proviene	Categoría	Código	Descriptor
Epistémica	Definición argumentación	Expresión discursiva	ExpDis	Manifestación del discurso
		Producto de un razonamiento	ProRaz	Proceso mental
		Declaración hecha	DecHe	Afirmación que se va a justificar
		Razones para convencer	RaCon	Justificaciones
	Análisis ciclo previo	Tipos de argumentos	TipAr	Clasificación del argumento
		Estructura del argumento	EstAr	Elementos del argumento: dato aserción y garantía
		Diferencia argumento y argumentación	DiArArg	Alusión a Argumentación: proceso Argumento: producto

Episodio 1

El Episodio 1 está compuesto de dos momentos: el primero corresponde al proceso de diseño de la tarea; el segundo, a la revisión de la propuesta con la asesora del trabajo de grado. En ambos momentos, la discusión ocurrió a raíz del enunciado de uno de los problemas propuesto en la tarea (Cuadro 1).

Cuadro 1: enunciado del problema

> Se le propone a Juan que estudie la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: la bisectriz de un ángulo y la mediana con extremo en el vértice del mismo ángulo coinciden.
>
> Se observa a Juan realizando la siguiente construcción en GeoGebra:
>
> (i) Polígono regular ABC. (ii) Punto medio M de $\overline{BC}$. (iii) $\overline{AM}$ mediana del $\overline{BC}$. (iv) $\overrightarrow{AM}$ bisectriz del $\overline{BC}$.
>
> Luego Juan dice: "Construyo la mediana $\overline{AM}$, ya que es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto del vértice".
>
> ¿Cree que lo que dijo Juan es un argumento?

Momento 1 (M1)

Discutimos entre nosotras si Juan estaba repitiendo una definición o proveyendo un argumento, y decidimos que sí era un argumento. Nos centramos, entonces, en tipificarlo. Esto nos llevó a analizar la estructura del supuesto argumento. En las transcripciones que presentamos, nos identificamos con la primera letra de nuestro nombre. Incluimos, entre paréntesis, el código de la categoría que le asignamos a cada idea expresada durante el diálogo.

28. L: A mí se me hace que eso que está ahí es argumento abductivo (TipAr), porque estoy diciendo "construyo la mediana $\overline{AM}$ (ProRaz). Sé cómo construirla. Luego digo por qué esa es la mediana: "ya que es el segmento (RaCon)..."

29. J: Si estás buscando el dato (EstAr) … Bueno; sí tienes razón, pensándolo de esa forma.

…

31. J: Porque yo digo "voy a construir la mediana $\overline{AM}$" (DecHe). Yo ya sé que eso es una mediana. Entonces, por la definición de mediana (ProRaz), yo sé que

tengo que tener el segmento, tengo que encontrar el punto medio del segmento y trazar la mediana. Entonces, ahí la regla general sería la definición de mediana (EstAr-garantía), [sí] es un argumento abductivo.

…

36 J: Para que haya un argumento debe haber una declaración (DecHe).

…

43. L: Entonces, sí es un argumento, porque está justificando por qué esa es la mediana $\overline{AM}$ (Racon).

Momento 2 (M2)

Cuando presentamos la afirmación de Juan a la profesora (C), se dio la siguiente discusión:

6. C: ¿La afirmación de Juan es un argumento?

7. J: Como decimos de la argumentación, cuando damos una declaración y justificamos esa declaración (DecHe) utilizando ya sea una proposición o una conjetura, ahí sí hay un argumento. ¿Entonces este de acá podría ser un argumento, Lucía? Yo ayer dije que no, pero ya dudé. Sí, porque… mira que dice "construí la mediana".

..

9. L y J: Este no es un argumento.

10. C: ¿Por qué no?

11. J: Porque [Juan] está describiendo cómo construyó la mediana. Entonces, construyó la mediana ya que es el segmento que pasa, esto, esto y esto. Pero, no está diciendo "está es una mediana.

12. L: Él está diciendo qué hizo y por qué, y justificando por qué lo hizo. (RaCon)

13. J: Entonces, sí es un argumento.

Episodio 2

En este episodio, analizamos el enunciado de Juan a la luz de la definición que teníamos para argumentación.

1. C: Argumento y argumentación, ¿son cosas distintas?, ¿o no?

…

3. J: Lo que vemos es que lo que entendemos por argumentación, yo creo que nos puede servir más bien para definir argumento.

…

9. C: ¿Cuál es la gran diferencia entre argumentación y argumento?

10. L: Pues profe, la argumentación es un proceso. (DiArArg)

11. C: ¿Y el argumento?

12. L: Es el enunciado, el discurso oral o escrito. (DiArArg)

…

23. L: El argumento tiene estructura. (EstAr)

…

28. C: ¿Dónde en la definición de argumento dicen que es argumento solo si están los elementos de la estructura?

…

32. J: Pues es que en la definición [de argumentación, que ahora es la de argumento] decimos es que se dan razones (RaCon), y esas razones son los hechos o el dato. (EstAr)

…

42. C: ¿Cómo se compagina el ejemplo de argumento con la [nueva] definición para decir que [sí] es un argumento?

43. L: Porque se están dando las razones: “construí la mediana ya que es el segmento …” (RaCon)

…

45. L: Está diciendo por qué esa es la mediana. (RaCon)

46. C: Está justificando por qué el segmento es mediana. Entonces, ¿es una expresión discursiva? ¿Por qué podemos decir que es producto de un razonamiento?

…

53. L: Sí, porque está expresando la idea que, o sea, mediana lo relacionó con que es el segmento. Sí. Y luego lo expresó. (ExpDis)

Análisis de los episodios

Refiriéndonos a las categorías y a sus descripciones, expuestas en la Tabla 1, identificamos que en el Episodio 1, para justificar que lo dicho por Juan era un argumento, usamos nuestra definición de argumentación. Esto lo hacen evidente las categorías ProRaz, DecHe y RaCon, ya que estas refieren a atributos destacables de la definición de argumentación. En el diálogo, hay evidencia de que nos convencimos de que lo dicho por Juan era un argumento mediante el reconocimiento de los elementos que conforman la estructura de un argumento. Esto lo hicimos porque queríamos comprobar que era un argumento abductivo. Sin embargo, vimos que nuestra definición de argumento no hacía referencia a los tres elementos, pero la que teníamos de argumento abductivo sí. Esto puso en evidencia una no correspondencia entre el conocimiento que pusimos en uso para decidir si era o no argumento y la definición que teníamos de este.

En el Episodio 2, salió a la luz algo implícito en nuestras respuestas a la profesora en el Momento 2: no estábamos de acuerdo con las definiciones que teníamos para argumento y argumentación, porque nos referíamos siempre a los atributos de la definición de argumentación para justificar que lo dicho por Juan es un argumento. Esto se refleja en el reconocimiento de los atributos consignados en la definición que teníamos de argumentación, cosa que expresamos en las intervenciones 32, 43, 45, 46 con las categorías: EstAr, RaCon y DecHe. En 53, reconocemos que hay una expresión discursiva que es producto de evocar la definición mentalmente. Expresar algunos aspectos para diferenciar entre argumento y argumentación (intervenciones 9 a 14) también nos ayudó a confirmar que no estábamos usando la definición de argumento que teníamos. La estructura de un argumento primaba en nuestro conocimiento, ya que fue lo que pusimos en juego cuando quisimos clasificar un argumento y justificar que lo era.

Conclusiones

Inicialmente, el reconocer e identificar que lo que dijo Juan era un argumento abductivo fue lo que activó el proceso de transformación del conocimiento puesto en uso en los episodios. Esto nos permitió expresar de forma espontánea nuestra definición personal de argumento y ver que no coincidía con la que teníamos establecida. El diálogo entre nosotras y la asesora llevó a la modificación de las definiciones de argumento y argumentación. La nueva definición de argumento la pusimos a prueba identificando cada parte de esta en lo que expresó Juan.

El subproblema propuesto, diferenciar entre argumento y argumentación, quedó aparentemente resuelto al establecer las nuevas definiciones, que se presentan a continuación:

> **Argumento:** es una expresión discursiva, producto de un razonamiento, que se realiza de acuerdo con normas compartidas, y que consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha.
>
> **Argumentación:** es el proceso en el cual se producen argumentos.

Hemos encontrado evidencia, como principal resultado de lo que aquí se ha presentado, del potencial que puede tener el proceso de diseñar y analizar una tarea para profesores en ejercicio para movilizar el conocimiento que se tiene sobre algún asunto matemático particular, involucrado en la tarea, reconocer inconsistencias en el conocimiento respectivo y lograr la modificación de este.

REFERENCIAS

Hanna, G. y de Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-22). Dordrecht: Springer.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático. *Paradigma*, *36*(1), 87-109.

Schwarz, B. y Kaiser, G. (2009). Professional competence of future mathematics teachers on argumentation and proof and how to evaluate it. En F. Lin, G. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (vol. 2, pp. 190-195). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Serres, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemáticas a través de investigación-acción. *Revista de Pedagogía*, *28*(82), 287-310.

Ajedrown: orientación y visualización espacial, el caso de Mariana y Mayerly

Santiago Barbosa y Tania Plazas
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
jsbarbosar.2@gmail.com; tplazas@pedagogica.edu.co

Se presenta una experiencia de aula que consta de cuatro juegos apoyados en el ajedrez, y cuyo propósito es desarrollar procesos de visualización y orientación espacial en dos estudiantes, una con síndrome de Down y otra sin este.

Introducción

Las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en una población en condición de discapacidad cognitiva son escasas; las que existen se enfocan, generalmente, en el ámbito aritmético. Investigadores como Bruno y Noda (2010) consideran que poblaciones como la de síndrome de Down pueden aprender conceptos de diferentes áreas, que les permiten formarse para lograr una mayor integración social. Una de estas áreas es la geometría, por medio de la cual se desarrollan procesos de orientación y visualización espacial, que han sido de gran importancia desde el origen de la humanidad, y se encuentran en relación con la necesidad del ser humano de poder ubicarse, moverse en el espacio y relacionar direcciones y distancias. Con el ánimo de aportar en este campo de la Educación Matemática, en el trabajo de grado de Barbosa (2020), se plantea una propuesta que busca identificar habilidades de orientación y visualización espacial involucrando a una estudiante con síndrome de Down, y a una estudiante sin discapacidad alguna, mediante la utilización del ajedrez.

Referentes teóricos

Orientación espacial

La orientación espacial es una competencia que involucra el establecer diferentes posiciones en el espacio y operar con ellas; esto incluye no solamente la propia posición y los propios movimientos, sino las posiciones de otras personas o de objetos que pueden ser representados en mapas y coordenadas.

Barbosa, S. y Plazas, T. (2022). Ajedrown: orientación y visualización espacial, el caso de Mariana y Mayerly. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 125-132. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Sarama y Clements (2009, citado en Zapateiro, Poloche y Camargo, 2016) identifican cuatro niveles de competencia que conforman el desarrollo de la orientación espacial:

1. Ubicación espacial y trayectoria intuitiva.
2. Organización espacial.
3. Modelos y mapas.
4. Coordenadas y la estructuración espacial.

La ubicación espacial y la trayectoria intuitiva hacen referencia al desarrollo de evocaciones mentales que le permiten al individuo entender el espacio que lo rodea, teniendo en cuenta dos tipos de sistemas de referencia: uno basado en claves internas y otro en claves externas (Newcombe y Huttenlocher, 2000, citado en Sarama y Clements, 2009), cada uno de los cuales se desarrolla a partir de la posición personal. Autores como Newcombe y Huttenlocher (2000, citado en Sarama y Clements, 2009) exponen que el sistema basado en claves internas se produce al determinar en la mente una ruta o una ubicación de acuerdo con un patrón de movimiento que se asocia a un objetivo que se quiere alcanzar.

La organización espacial hace referencia al desarrollo de la perspectiva espacial y las trayectorias espaciales en entornos no cercanos. Zapateiro, Poloche y Camargo (2016) exponen que el desarrollo de la perspectiva espacial alude a la construcción de sistemas de referencia icónicos, de tal manera que usa puntos de referencia externos a la persona con los que puede ubicarse, ubicar objetos y lugares. Dichos sistemas de referencia permiten ubicarse teniendo en cuenta no solamente el punto de vista personal sino el de otros observadores.

El nivel de modelos y mapas consiste en crear y utilizar modelos y mapas sencillos que son útiles para localizar objetos circundantes o hacer recorridos en el espacio. Así pues, para que esto tenga sentido, según Newcombe y Huttenlocher (2000, citado en Sarama y Clements, 2009), es necesario que las personas tengan que crear relaciones entre los atributos geométricos y sus correspondencias con respecto a atributos físicos, ya que estos varían en escala y perspectiva. Zapateiro, Poloche y Camargo (2016) sugieren que esta relación da lugar a un proceso de matematización, mediante la utilización de escalas, distancias, perspectivas y correspondencias geométricas, son fundamentales para el desarrollo de la orientación espacial.

Y, por último, el nivel de coordenadas y estructuración espacial hace referencia a la comprensión de las relaciones espaciales que se representan mediante la utilización de coordenadas euclidianas en planos bidimensionales o tridimensionales, donde se pueden representar ubicaciones, trayectorias de objetos en determinados puntos del plano o el espacio.

Visualización espacial

La visualización espacial hace parte del sentido espacial, el cual, como se mencionó anteriormente, también lo conforma la orientación espacial. Del Grande (1990) recopila un conjunto de habilidades que responden a la visualización espacial. Una descripción breve de estas se da enseguida.

- Coordinación ojo motor: hace referencia a la habilidad de coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. En el ajedrez se consigue mediante el movimiento de una pieza.

- Percepción figura-contexto: hace referencia a la identificación visual, la cual consiste en reconocer una figura aislándola del contexto en el que aparece camuflada o distorsionada. En el ajedrez se puede dar el caso en el que haya una conglomeración de piezas en las que se pueda identificar el papel que desempeña una pieza en el cúmulo de piezas.

- Conservación de la percepción: consiste en reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura…) aunque cambie de posición y deje de verse por completo. En el ajedrez se evidencia determinando las propiedades que tiene una pieza en el tablero, pues esta seguirá teniendo las mismas propiedades así cambie de posición en el mismo.

- Percepción de la posición en el espacio: hace referencia a la posición de un objeto con respecto a sí mismo o a otro punto de referencia. En el ajedrez se consigue mediante la determinación de un punto de referencia o posición inicial y se relaciona con un objetivo de llegada para así realizar una trayectoria.

- Percepción de las relaciones espaciales: habilidad que identifica correctamente las relaciones entre varios objetos situados en el espacio. En el ajedrez sucede cuando se sitúan en el tablero unas piezas junto con obstáculos y se pretende identificar movimientos permitidos relacionando obstáculos y piezas en el tablero.

- Discriminación visual: consiste en identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición. n el ajedrez, sucede, por ejemplo, cuando hay una configuración de peones, se reconoce que estos representan la misma pieza y son diferentes a otras.
- Memoria visual: habilidad para recordar las características visuales de un objeto dentro de un conjunto de objetos que no están a la vista. En el ajedrez se da cuando se visualiza una trayectoria y luego se reproduce de manera correcta en este.

METODOLOGÍA

La experiencia realizada se llevó a cabo en cuatro etapas: (1) selección de la población, (2) diseño de las tareas, (3) aplicación de las tareas y (4) análisis del desarrollo. Cada uno de los juegos fue implementado con dos estudiantes, una de ellas con síndrome de Down.

El caso de Mayerly. Mayerly tiene diecinueve años. Se trata de una mujer con síndrome de Down leve, muestra rasgos físicos y cognitivos propios de este síndrome, sin embargo, un diagnóstico no oficial sugiere que Mayerly presenta síndrome de Down con características de autismo. Mayerly tenía nociones de lectura y escritura, sin embargo, por falta de práctica y acompañamiento, fue perdiendo estas capacidades constantemente. En el momento en que se hizo la experiencia, Mayerly no estaba cursando ningún grado escolar.

El caso de Mariana. Mariana tiene once años. En el momento de la experiencia estaba cursando grado sexto de bachillerato en el Colegio Magdalena Ortega de Nariño (IED).

Se diseñó una secuencia didáctica (Barbosa, 2020) compuesta por 4 tareas; para cada una de ellas se estableció un propósito, se revisaron los posibles errores y dificultades que las estudiantes podrían presentar.

PRIMER JUEGO: “EXPLORANDO EL TABLERO”

El juego se organiza en un espacio amplio donde se pueda ubicar el tablero gigante de ajedrez en el piso, este es de 8×8. Sobre el tablero se ubican seis obstáculos o peones que representan barreras que impiden el paso del jugador, como lo muestra la Figura 1.

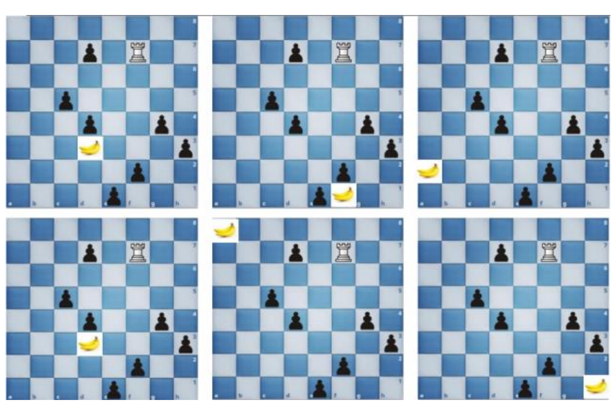
Figura 1: diseño del tablero para el juego "Explorando el tablero"

El juego consiste en la observación de un trayecto planeado y ejecutado por el director, que posteriormente los jugadores deben reproducir. Las trayectorias que deben reproducir los jugadores parten desde la posición inicial, caminando por las filas y las columnas hasta encontrar algún obstáculo o el borde del tablero. El propósito de este primer juego es promover la habilidad de *ubicación espacial y trayectoria intuitiva.*

SEGUNDO JUEGO: "CÓMETE LA FRUTA"

El juego se organiza en el tablero de ajedrez de mesa y en diagramas impresos que se reparten a los participantes. En el tablero se ubican 8 obstáculos o peones que representan barreras que impiden el paso de la torre; también, una fruta, un banano, que simboliza el objetivo o meta del juego (véase Figura 2). El juego lo gestiona un director y se puede desarrollar de manera individual o grupal.

Figura 2: diagramas para el juego "Cómete la fruta"



Los jugadores deben determinar una trayectoria desde la posición inicial (la torre) hacia el objetivo, que es comerse la fruta. El propósito de este segundo juego es promover la habilidad de *organización espacial*.

Tercer juego “In situ”

Sobre una superficie plana se ubica el tablero de juego de 16×16 (Figura 3).

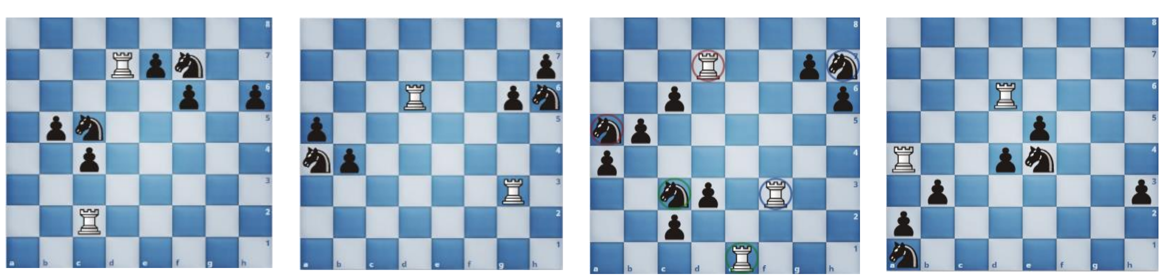
Figura 3: tablero y fichas objetivo para juego “In situ” para Mayerly

En cada turno, el jugador lanza un dado que indicará el número de pasos que puede moverse por el tablero. Así mismo, cada jugador tendrá una hoja mapa que ilustra el mapa del lugar y el tablero a menor escala. Cada vez que el jugador mueva su ficha, deberá registrar en la hoja mapa el movimiento que hizo hasta llegar al objetivo. El objetivo de este juego es promover la habilidad *modelos y mapas*.

Cuarto juego: “Rescata al caballo”

El juego consiste en la identificación de ubicaciones para localizar los objetos teniendo en cuenta coordenadas cartesianas, para posteriormente planificar y ejecutar las trayectorias eficientes (Figura 4). Los participantes asumen dos roles dentro del juego: los rescatadores y los caballos.

Figura 4: diagramas para cuarto juego “Rescata al caballo”



Cada vez que una torre rescata a un caballo, es decir, cada vez que llega a la posición donde se encuentra ubicado un caballo, la torre toma la posición del caballo y tiene un punto por cada caballo rescatado. El juego finaliza cuando se han rescatado todos los caballos y el director procede a exponer otro diagrama. El propósito de este cuarto juego es promover la habilidad de *coordenadas y estructuración espacial*.

ANÁLISIS

Los juegos presentados anteriormente permitieron identificar habilidades de visualización y orientación espacial, así como las dificultades que se presentaron al jugarlos. Se hizo evidente que Mariana desarrolla la mayoría de las habilidades, mostrando una mayor frecuencia en la categoría de visualización espacial con el indicador, *realizar movimientos con su cuerpo y su mente para planear y ejecutar una trayectoria*. De igual forma, en la categoría de orientación espacial se encontró una mayor frecuencia con el indicador *a partir de la posición personal, determinar ubicaciones de objetos o lugares*. Mayerly, por su parte, presentó una mayor frecuencia con el indicador *determinar puntos de referencia en el espacio* correspondiente a la visualización espacial.

En el juego "Explorando el tablero", las estudiantes relacionan la ubicación de objetos a partir de la posición personal y la posición de objetos presentes en el tablero. En el segundo juego, "Cómete la fruta", las estudiantes construyeron una trayectoria de un punto a otro y reconocen un objeto particular en el tablero. En el juego "In situ", las estudiantes realizan una correspondencia geométrica entre el tablero de juego y la imagen a menor escala, para dibujar un trayecto.

La principal dificultad detectada en la ejecución de los juegos estaba asociada a la memoria visual puesto que las estudiantes visualizan una trayectoria y la reproducen de una manera diferente a la inicial. Así mismo, dificultades asociadas a la habilidad de *conservación de la percepción y discriminación visual* debido a que no se reconocía las características de los obstáculos en el tablero y se construía una trayectoria no permitida. Con orientaciones del director la dificultad se fue disminuyendo poco a poco.

Conclusiones

En cada uno de los juegos las estudiantes lograron determinar puntos de referencia en el espacio; localización de objetos o lugares de acuerdo con su posición personal y puntos de referencia presentes en el tablero; determinación de movimientos con su cuerpo y su mente que ayudan a planear y ejecutar una trayectoria. Así mismo, las estudiantes lograron determinar las propiedades constituyentes de las piezas de ajedrez, generando relaciones entre atributos geométricos y atributos físicos que ayudan a planificar trayectorias; recordar trayectorias vistas con anterioridad para reproducirlas posteriormente.

La investigación expone una ruta de enseñanza y aprendizaje de la geometría, de acuerdo con los juegos diseñados. Se identifican y desarrollan habilidades de orientación y visualización espacial en las estudiantes, puesto que logran establecer sistemas de referencia determinantes para movilizarse espacialmente, a partir de claves internas y externas que relacionan la posición entre objetos o figuras para determinar una trayectoria eficiente.

Se establece una relación entre las matemáticas y el ajedrez, desde la enseñanza y el aprendizaje de la orientación y visualización espacial. Así mismo permite pensar en la necesidad de inclusión en el aula, de brindar oportunidades educativas a población con necesidades educativas especiales para que puedan desarrollar sus habilidades en todas las áreas. La ruta expuesta puede llegar a servir como una herramienta que los profesores pueden adoptar en sus clases.

Referencias

Barbosa, S. (2020). *Ajedrown: orientación y visualización espacial, el caso de Mariana y Mayerly*. Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). *Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down.* En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida: SEIEM, 141-162

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Sarama, J. y Clements, D. (2009*). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Nueva York: Routledge.

Zapateiro, J., Poloche, S. y Camargo, L. (2016). Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias. *Tecné, Episteme y Didaxis,* 43, 119-136.

Y SOBRE LA ARGUMENTACIÓN ABDUCTIVA ¿EL PROFESOR QUÉ DEBERÍA CONOCER?

Andrés Bello y Cristian Raigoso
Universidad Pedagógica Nacional
ancbellor@upn.edu.co, cfraigosos@upn.edu.co

Pretendemos exponer algunos resultados de la investigación realizada en un programa de maestría. Ante la necesidad de superar debilidades para diseñar tareas en Entornos de Geometría Dinámica con las cuales propiciar argumentación abductiva, nos preguntamos qué fundamentación especializada sobre argumento y argumentación abductiva deberíamos tener y por qué vías podríamos alcanzarla. Para responder este interrogante desarrollamos tres ciclos de investigación-acción, fundamentados en el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático propuesto por el Enfoque Ontosemiótico. El ejercicio nos permitió identificar elementos de la faceta epistémica de la dimensión didáctica, en los que reconocimos cambios en nuestro conocimiento, principalmente gracias a la preparación de un cursillo dirigido a nuestros colegas y a observarnos mutuamente mientras resolvíamos problemas que favorecían la argumentación abductiva.

INTRODUCCIÓN

La investigación asociada a este artículo se desarrolló como requisito para optar por el título de Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). La originó nuestro interés, pero también nuestra debilidad, en el diseño de tareas ricas en experiencias matemáticas para nuestros estudiantes, que se apoyen en un Entorno de Geometría Dinámica (EGD).

En el seminario *Profundización en matemáticas elementales* nos propusieron una tarea que promovía la argumentación abductiva, gracias a los recursos de exploración que brinda el EGD. Después de vivir la experiencia, como la tarea nos resultó reveladora sobre lo que queríamos hacer en nuestras clases, intentamos emularla con una tarea similar dirigida a nuestros estudiantes. Pero los resultados no fueron exitosos y nos revelaron falencias en nuestro conocimiento para diseñar tareas que permitieran desarrollar lo que buscábamos.

Ante esta dificultad, nuestro trabajo se enfocó en la especialización de nuestro conocimiento con el que pudiéramos mejorar nuestros diseños de tareas mediadas por EGD. Nos planteamos la siguiente pregunta: ¿sobre qué aspectos del

Bello, A. y Raigoso, C. (2022). Y sobre la argumentación abductiva ¿el profesor qué debería conocer? En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 133-140. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

conocimiento didáctico matemático acerca de la argumentación abductiva debería profundizar un profesor para poder diseñar tareas que promuevan dicha argumentación con apoyo de EGD?

En este artículo, además de describir aspectos del ejercicio académico realizado, señalamos en qué asuntos de nuestro conocimiento logramos impulsar cambios, gracias a la estrategia investigativa implementada, y qué acciones específicas promovieron dichos cambios.

MARCO DE REFERENCIA

Para fundamentar el análisis de nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumento y argumentación abductiva, como base para el diseño de tareas mediadas por EGD, recurrimos a las facetas epistémica y mediacional de la dimensión didáctica del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (CDM) propuesto por Godino y Pino-Fan (2015). La faceta epistémica se refiere al conocimiento especializado en la dimensión matemática que el profesor moviliza para la enseñanza. Por ejemplo, es indispensable que el profesor sea capaz de realizar varias representaciones de un objeto matemático, encontrar diferentes procedimientos para llevar a cabo una tarea, relacionar temas con diferentes temáticas de otros niveles educativos, y comprender y poner en práctica los diferentes significados de un objeto matemático.

La faceta mediacional se refiere al conocimiento de los recursos y medios que pueden favorecer el proceso de aprendizaje. En esta faceta se evalúa la pertinencia del uso de los materiales y recursos tecnológicos en la solución de una tarea y en el aprendizaje de un nuevo objeto matemático, además de asignar un tiempo prudente a las diferentes acciones y procesos de aprendizaje.

Interpretación del modelo para identificar aspectos del CDM sobre argumentación abductiva para el diseño de tareas con apoyo de EGD

El modelo no tiene descriptores para procesos como argumento y argumentación abductiva. Entonces, propusimos descriptores específicos que surgieron en un trabajo adelantado en el seminario *Educación del profesor de matemáticas*, con base en la propuesta de Molina (2019). Adicionalmente, a medida que fuimos haciendo el análisis de los datos de nuestra investigación, agregamos nuevos descriptores que emergieron durante el ejercicio y no estaban contenidos en el listado. En la Tabla 1 presentamos los descriptores.

Tabla 1: descriptores del CDM sobre argumentación abductiva para el diseño de tareas con apoyo de EGD

		Descriptores
Faceta epistémica	Argumento y argumentación	- Conectores usados en la escritura de un argumento - Caracterización de los elementos de un argumento - Diferenciación entre argumentación y demostración - Ejemplo de argumento o reformulación de ejemplo de argumento - Establecimiento de relación entre un argumento y una exploración - Establecimiento de relación entre argumento, argumentación, justificación, razonamiento, demostración y prueba - Esquematización de un argumento - Identificación o reformulación de los elementos de un argumento - Interpretación de la estructura de un argumento - Propósito de un argumento - Propuesta de definición de argumento - Propuesta de definición de argumentación - Valoración de propuestas de definiciones de argumento
	Argumentación abductiva	- Comparación entre argumento abductivo y otros argumentos - Ejemplificación de argumento abductivo o reformulación de ejemplo - Esquema de un argumento abductivo - Esquematización de tipos de argumento abductivo - Propuesta de definición de argumento abductivo - Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo - Tipos de argumentos abductivo
Faceta mediacional	EGD	- Caracterización del proceso exploración en EGD - Diferenciación entre tipos de construcciones geométricas en un EGD
	Diseño*	- Caracterización de tareas que favorecen la argumentación - Criterios para diseñar tareas de argumentación - Ejemplificación de enunciado de tarea que promueve argumentación abductiva - Principios de tareas que buscan promover la argumentación

	Diseño**	- Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva - Relación entre los invariantes del arrastre mantenido y los elementos de un argumento abductivo
* De tareas para favorecer argumentación ** De tareas en EGD para favorecer argumentación		

ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

La estrategia investigativa es una adaptación de la estrategia de investigación-acción, que implica una reflexión sobre la práctica, así como un cambio en ella. En nuestro caso no nos enfocamos en analizar la práctica, sino nuestro conocimiento que interviene en la práctica. La adaptación hecha nos implicó realizar una reflexión crítica que procedió en tres ciclos en espiral: el resultado de un ciclo generó la problemática para abordar en el ciclo siguiente. En cada ciclo de investigación desarrollamos un plan de acción para modificar nuestro conocimiento, recopilamos información que nos permitiera hacer un análisis y usamos dos mecanismos para ello: (i), usamos los descriptores del modelo del CDM para ubicar los datos en una faceta y describir qué conocimiento movilizamos; (ii) usamos la técnica de rotulación propuesta por Strauss y Corbin (2002), para identificar cambios en nuestro CDM. A continuación, presentamos brevemente los dos primeros ciclos.

ANÁLISIS DEL CICLO 1

El problema que dio lugar al Ciclo 1 fue la identificación que los profesores del programa de Maestría hicieron de nuestro conocimiento no especializado sobre argumento y argumentación abductiva. En consecuencia, propusieron, como plan de acción, involucrarnos en la fundamentación sobre varios temas relacionados, que se estudiaron en los espacios de formación del programa.

La información sobre nuestro conocimiento la recopilamos a partir de apuntes de clase, síntesis de lecturas, tareas extraclase, propuesta inicial con la que ingresamos a la maestría y anteproyecto de trabajo de grado. Con la información recogida, realizamos un proceso de organización, reducción, depuración y fragmentación, para lograr obtener los datos. En este ciclo organizamos la información en dos textos narrativos: Texto narrativo Base y Texto Narrativo Uno.

Para el análisis de los datos, usando los textos narrativos, realizamos dos tipos de análisis. El primero fue la caracterización de nuestro conocimiento didáctico matemático basándonos en los descriptores de las facetas del CDM. El segundo fue buscar evidencia de los cambios, comparando fragmentos correspondientes al mismo descriptor en el Texto narrativo Base y el Texto narrativo Uno, haciendo uso de la herramienta de rotulación.

En la Tabla 2 presentamos un ejemplo de asignación de descriptores de conocimiento. Estos fragmentos son interpretaciones que teníamos sobre la definición de argumentación y sobre la caracterización del proceso de exploración en EGD. El primero lo asignamos a la faceta epistémica porque intentábamos proponer una definición de argumentación, y el segundo lo asignamos a la faceta mediacional porque decíamos qué papel juegan los EGD.

Tabla 2: ejemplo de asignación de descriptores

	Fragmento	Faceta	Descriptor
Texto narrativo Base	[…] la argumentación es el razonamiento lógico que permite pasar de una proposición a otra.	Epistémica	Propuesta de definición de argumentación
Texto narrativo Uno	[…] un EGD permite que los estudiantes usen herramientas para la exploración, la construcción y el descubrimiento de propiedades de los objetos geométricos, así mismo el de favorecer procesos de argumentación.	Mediacional	Caracterización del proceso exploración en EGD

ANÁLISIS DEL CICLO 2

Con el análisis del Ciclo 1, encontramos que en la faceta epistémica nos hacía falta una mayor profundización en asuntos como argumento, elementos de argumento y argumento abductivo. Por esto nos interesamos en responder la pregunta ¿sobre qué aspectos de la argumentación abductiva deberíamos ganar una profundización de nuestro conocimiento didáctico matemático? Para atender la pregunta, construimos un plan de acción que se centró, por una parte, en construir una interpretación compartida de lo que entendíamos por argumento, estructura de un argumento, elementos de un argumento y argumento abductivo y, por otra, en poner a prueba nuestro conocimiento sobre los aspectos mencionados, dirigiendo un curso corto para los colegas de una de nuestras instituciones. Con la información obtenida íbamos registrando el conocimiento logrado.

Esta información la escribimos en un texto narrativo que lo llamamos Texto narrativo Dos.

El proceso de análisis fue similar al del Ciclo 1: asignamos descriptores del CDM a fragmentos del Texto narrativo Dos y comparamos fragmentos de ese texto que tenían el mismo descriptor. Además, buscamos evidencia de cambios en nuestro conocimiento didáctico matemático entre el Ciclo 1 y el Ciclo 2, usando la herramienta de rotulación.

Tabla 3: fragmentos rotulados con el descriptor "Caracterización de los elementos de un argumento"

Fragmento 2	[…] Andrés entendía el dato como la información *[Naturaleza – Información]* del enunciado de un ejercicio o de lo que quiere decir el ejercicio; ¨[…]
Fragmento 3	[…] Cristian entendía el dato como la información *[Naturaleza – Información]* que se da y justifica la aserción; [...]
Fragmento 4	[…] Dato: conjunto de razones *[Naturaleza – Razón]* que justifican la aserción*;* […]
Fragmento 7	[…] hicimos una reformulación [definición de dato, aserción y garantía] Dato: son hechos *[Naturaleza – Hechos]* empíricos que apoyan la aserción. […]

A modo de ejemplo: los cuatro fragmentos (Tabla 3) del Texto narrativo Dos, a los que asignamos el descriptor "Caracterización de los elementos de un argumento", nos permiten ver cambios en nuestro conocimiento sobre el componente "dato" de un argumento –mencionado en el modelo de Toulmin–. En estos fragmentos usamos el rótulo ***Naturaleza*** acompañado de una palabra distintiva**.** En los Fragmentos 2 y 3 caracterizamos el dato como una *Información*, aunque no hay ninguna especificidad en términos del tipo de información. En los Fragmentos 4 y 7 empezamos a darle un carácter más específico, cuando mencionamos el dato como las *Razones* o *Hechos*, porque estamos enfocándonos en lo esencial del dato y dándole especificidad a la enunciación.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Respecto a las facetas del CDM de la dimensión didáctica, en la Tabla 4 se muestra la cantidad de descriptores usados en cada uno de los ciclos. Se puede ver que nuestros esfuerzos se centraron en promover transformaciones en nuestro conocimiento didáctico matemático, principalmente en la faceta epistémica.

Tabla 4: cantidad de descriptores usados en cada ciclo

Faceta	Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
Epistémica	12	16	3
Mediacional	5	0	3

Respecto a la faceta epistémica y el componente argumento abductivo, en la Tabla 5 se muestran los principales descriptores asignados. En el Ciclo 2 también se amplió nuestro conocimiento didáctico matemático sobre argumento abductivo. En el Ciclo 3 asignamos descriptores que no habíamos previsto y que son evidencia de que nuestro conocimiento se amplió es los aspectos aludidos.

Tabla 5: descriptores asignados relativos a argumento abductivo

Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
Propuesta de definición de argumento abductivo	Propuesta de definición de argumento abductivo Proceso de argumentación que da origen a un argumento abductivo Diferenciación de tipos de argumento abductivo Esquematización de tipos de argumento abductivo Ejemplo de argumento abductivo Comparación entre argumento abductivo con otros argumentos Reformulación de ejemplo de argumento abductivo	Esquema de un argumento abductivo Diferenciación de tipos de argumento abductivo Ejemplo de argumento abductivo

La Tabla 6 muestra algunos ejemplos de cambios ocurridos dentro de cada ciclo, y las tareas o acciones que incidieron en el cambio de nuestro conocimiento didáctico matemático. Por ejemplo, en el Ciclo 2, elaborar una definición propia sobre los elementos de argumento nos permitió tener cambio en nuestro conocimiento relativo a la caracterización de los elementos de un argumento.

Tabla 6: cambios dentro de cada ciclo y relación con el plan de acción

Cambios	Faceta	Descriptor	Previsiones en planes de acción
Ciclo 1	Epistémica	Respecto de la temática sobre argumentación y argumento	Participación en seminario
Ciclo 2	Epistémica	Caracterización de los elementos de un argumento	Propuesta propia de definición de los elementos de argumento.
Ciclo 3	Mediacional	Componentes del enunciado de una tarea para promover argumentación abductiva	Mapa conceptual

Con esta investigación ha habido cambios significativos en la faceta epistémica de nuestro conocimiento: aclaramos conceptos (argumento y sus elementos, argumento abductivo, tipos y esquemas). También adquirimos ideas claves para formular argumentos y argumentos abductivos, identificar los elementos en un argumento, representar en esquema un tipo de argumento abductivo, entre otros.

La herramienta de rotulación usada nos sirvió para marcar y rotular partes de la enunciación en los fragmentos tomados de los textos narrativos, con lo cual pudimos identificar particularidades en los fragmentos y, con ellas, comparar aspectos de nuestro conocimiento ligados a descriptores del CDM, encontrando evidencias de cambios dentro de un ciclo o entre ciclos.

Concluimos que este tipo de investigación apoya a profesores e investigadores que quieran liderar un cambio en su conocimiento didáctico matemático.

Referencias

Bello, A. y Raigoso, C. (2022). *Y sobre la argumentación abductiva, ¿el profesor qué debería conocer?* Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Molina, Ó. (2019). *Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación*. Tesis doctoral, Universidad de los Lagos, Chile.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Las geodésicas del espacio de de Sitter

Jeison Benavides y Heber Mesa
Universidad del Valle
benavides.jeison@correounivalle.edu.co, heber.mesa@correounivalle.edu.co

El objetivo de este artículo es introducir un modelo para el espacio de de Sitter, que es topológicamente un anillo y se obtiene a partir del modelo de Klein vía proyección estereográfica. En este modelo, que llamaremos modelo estereográfico, se caracterizarán las geodésicas a través de elementos euclidianos como rectas y circunferencias. Nos apoyaremos en GeoGebra para la observación de las geodésicas.

Planteamiento del problema

Las geodésicas son una generalización de la línea recta en el espacio euclidiano al contexto de variedades riemannianas. Son curvas que recorridas de manera uniforme no registran, desde la variedad, cambios de velocidad (aceleración), también son las curvas que localmente minimizan distancia en la variedad. Este concepto de geodésica puede extenderse incluso a variedades con una forma bilineal no necesariamente definida positiva, como es el caso del espacio de de Sitter.

Las geodésicas son un objeto inicial para empezar el estudio de una variedad, dado que tienen información sobre cómo se curva la variedad en la que están; por ello, se propondrá un nuevo modelo para el espacio de de Sitter, donde se caracterizarán las geodésicas a través de elementos de la geometría euclidiana. El nuevo modelo es ambientado en el interior del anillo comprendido entre las n −esferas de radio $\sqrt{2}-1$ y $\sqrt{2}+1$ del espacio euclídeo R^{n+1}, conjunto que denotamos por $\mathcal{E}$. Tenemos así, en este modelo, dos componentes conexas para la frontera ideal (o frontera en infinito) del espacio de de Sitter, $\partial\mathcal{E} = \partial\mathcal{E}^{+} \cup \partial\mathcal{E}^{-}$. Presentaremos las geodésicas en este modelo con ayuda de las herramientas de GeoGebra.

Benavides, J. y Mesa, H. (2022). Las geodésicas del espacio de de Sitter. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 141-145. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

PRELIMINARES

Se define el *espacio de Lorentz* como la variedad semirriemanniana $L^{n+2} = \left(R^{n+2}, \langle\langle,\rangle\rangle\right)$, donde la forma bilineal $\langle\langle,\rangle\rangle$ se define para $x = (x_0, \bar{x}), y = (y_0, \bar{y}) \in L^{n+2}$ como

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = -x_0 y_0 + \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno euclídeo de R^{n+1}. El *Espacio de de Sitter* de dimensión $n+1$ es definido como la subvariedad semirriemanniana de L^{n+2}, dada por S_1^{n+1}, donde

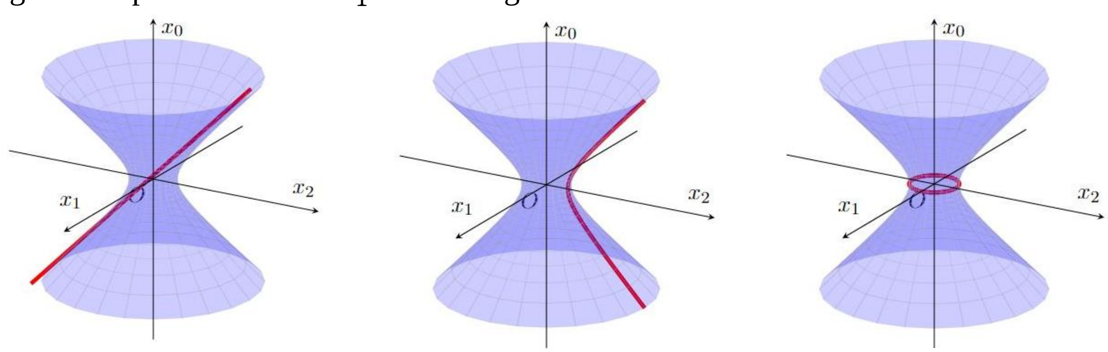
$$S_1^{n+1} = \{x \in L^{n+2} : \langle\langle x, y\rangle\rangle = 1\}.$$

Nótese que S_1^{n+1} es topológicamente un hiperboloide de una hoja. Una observación interesante es que en esta variedad tenemos tres tipos de geodésicas. Denotemos por $|\cdot|_e$ la norma euclidiana de R^{n+2}, y sean $p \in S_1^{n+1}$ y $v \in T_p S_1^{n+1}$, entonces la única geodésica de S_1^{n+1} que pasa por p con velocidad v (en $t=0$), denotada por $\gamma(t,p,v)$, se caracteriza según el signo de $\langle\langle v, v\rangle\rangle$. Se tiene que

$$\gamma(t,p,v) = \begin{cases} \cos(|v|_e t)\, p + \dfrac{1}{|v|_e} \operatorname{sen}(|v|_e t)\, v, & \text{sí } \langle\langle v, v\rangle\rangle > 0 \\ p + tv, & \text{sí } \langle\langle v, v\rangle\rangle = 0 \\ \cosh(|v|_e t)\, p + \dfrac{1}{|v|_e} \operatorname{senh}(|v|_e t)\, v, & \text{sí } \langle\langle v, v\rangle\rangle < 0, \end{cases}$$

se denominan *geodésica espacial*, *geodésica de luz y geodésica temporal*, respectivamente (véase Figura 1).

Figura 1: representación en S_1^{n+1} de tres geodésicas



geodésica de luz　　geodésica de tiempo　　geodésica espacial

Los elementos geométricos del espacio de de Sitter como conexión, curvatura, hipersuperficies espaciales totalmente umbílicas son conocidos y pueden consultarse en Montiel (1988) y Roldán (2021).

MODELOS DEL ESPACIO DE DE SITTER

Se presentarán dos modelos del espacio de de Sitter: el *modelo de Klein* y el que se ha llamado en este trabajo modelo *estereográfico*. El modelo de Klein será construido sobre la esfera S^{n+1}, para ello se usará una transformación en S_1^{n+1} y para la construcción del modelo estereográfico se partirá del modelo de Klein para luego usar la proyección estereográfica de la esfera.

Modelo de Klein

Considérese la banda $\mathcal{K}$ de S^{n+1} de los puntos cuya altura está en el intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, esto es,

$$\mathcal{K} = \left\{p = (p_0, \bar{p}) \in R^{n+2}: |p|_e = 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} < p_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

La frontera de $\mathcal{K}$ está dada por $\partial\mathcal{K} = \partial\mathcal{K}^+ \cup \partial\mathcal{K}^-$, donde

$$\partial\mathcal{K}^+ = \left\{p = (p_0, \bar{p}) \in S^{n+1}: p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \text{ y } \partial\mathcal{K}^- = \left\{p = (p_0, \bar{p}) \in S^{n+1}: p_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

La transformación $T: S_1^{n+1} \to \mathcal{K}$ definida por

$$T(p) = \frac{p}{|p|_e}$$

es un difeomorfismo. Si se dota a $\mathcal{K}$ con la métrica pull-back $T^*(\langle\langle,\rangle\rangle)$ se tiene que $\left(\mathcal{K}, T^*(\langle\langle,\rangle\rangle)\right)$ es una variedad semirriemanniana isométrica al espacio de de Sitter, variedad que determina lo que conocemos como modelo de Klein para el espacio de de Sitter.

Modelo estereográfico

Este modelo se construye partiendo del modelo de Klein. Para ello, si S^{n+1} es la esfera unitaria de R^{n+2}, $N = e_{n+1}$ el polo norte de S^{n+1} y

$$\pi_N: S^{n+1} \setminus \{N\} \to R^{n+1}$$

es la proyección estereográfica de S^{n+1} respecto del polo norte, entonces se define $\mathcal{E} = \pi_N(\mathcal{K})$, en otros términos, así:

$$\mathcal{E} = \{(p_0, \dots, p_n) \in R^{n+1}: \sqrt{2} - 1 < |p|_e < \sqrt{2} + 1\}.$$

La trasformación $L: S_1^{n+1} \to \mathcal{E}$ definida por

$$L = \pi_N \circ T$$

es un difeomorfismo. Inducimos la métrica de S_1^{n+1} en $\mathcal{E}$, vía la aplicación L, por tanto, $\left(\mathcal{E}, L^*(\langle\langle,\rangle\rangle)\right)$ es isométrico a S_1^{n+1}: lo llamamos modelo esterográfico para el espacio de de Sitter. La *frontera ideal* de $\mathcal{E}$ es definida por $\partial\mathcal{E} = \partial\mathcal{E}^+ \cup \partial\mathcal{E}^-$, donde $\partial\mathcal{E}^+ = S^n(\sqrt{2} + 1)$ y $\partial\mathcal{E}^- = S^n(\sqrt{2} - 1)$.

AVANCES E INQUIETUDES

En el modelo estereográfico tenemos los siguientes dos resultados que caracterizan las geodésicas:

Teorema 1. Un arco de circunferencia (euclídeo) en $\mathcal{E}$ es geodésica si y solo si es la intersección de una circunferencia de radio R y centro $C \in R^{n+1}$ con $\mathcal{E}$ que verifica $R^2 = 1 + \langle C, C\rangle$. Más aun, la geodésica es espacial si $R < \sqrt{2}$; es de luz si $R = \sqrt{2}$; y de tiempo, si $R > \sqrt{2}$.

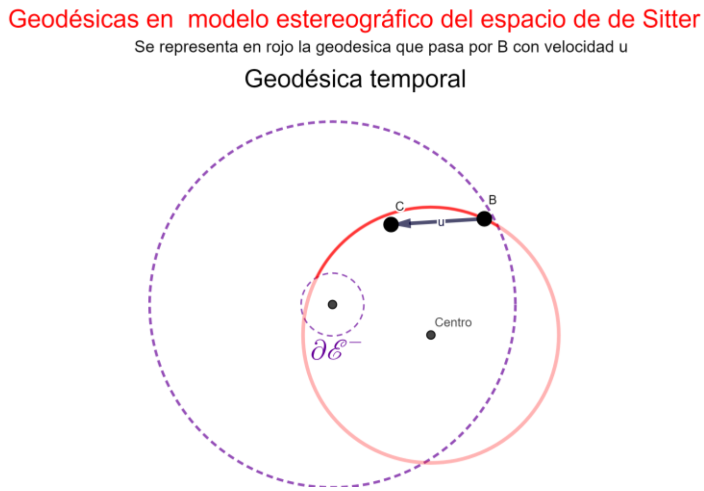
Teorema 2. Sea una geodésica en $\mathcal{E}$ que no es un arco de circunferencia (Teorema 1), entonces su traza está contenida en una recta que pasa por el origen. Más aun, es una geodésica de tiempo.

Corolario 3. Los dos tipos de geodésicas descritas en los Teoremas 1 y 2 caracterizan todas las geodésicas del espacio de de Sitter en el modelo estereográfico.

Los resultados anteriores son una consecuencia del conocido hecho de que la proyección estereográfica mapea circunferencias en circunferencias o rectas.

Actualmente estamos implementando una simulación dinámica en GeoGebra para ilustrar la construcción de geodésicas en el modelo estereográfico del espacio de de Sitter. Es interesante la posibilidad de observar geodésicas en ambientes no riemannianos. Dado que la métrica en el modelo estereográfico no es conforme a la euclidiana, existen geodésicas con velocidades que no son tangentes en el sentido euclidiano. Lo anterior lo podemos observar en la Figura 2.

Figura 2: geodésica en un ambiente no riemanniano



Otro problema que estamos analizando es el estudio y comportamiento de hipersuperficies conexas, completas, no compactas y totalmente umbílicas del espacio de de Sitter, para lo cual nos hemos basado en las ideas presentadas por Abanto y Espinar (2019). Dichos autores se apoyan en una fórmula de representación dada por Espinar et al. (2009), que es fundamental para obtener resultados de hipersuperficies totalmente umbilicas. El enfoque para nuestro trabajo consiste en emular dichas ideas, pero en el modelo estereográfico del espacio de de Sitter.

Referencias

Abanto, D. P. y Espinar, J. M. (2019). Escobar type theorems for elliptic fully nonlinear degenerate equations. *American Journal of Mathematics*, *141*(5), 1179-1216.

Espinar, J. M., Gálvez, J. A. y López, G. S. (2009). Hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}$ and conformally invariant equations: The generalized Christoffel and Nirenberg problems. *Journal of the European Mathematical Society*, *11*(4), 903-939.

Montiel, S. (1988). An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature. *Indiana University Mathematics Journal*, *37*(4), 909-917.

Roldán, Á. (2021). Hypersurfaces with prescribed curvatures in the de Sitter space. *Revista Matemática Iberoamericana*, *38*(1), 269-294.

CAMBIOS EN EL DISCURSO SOBRE REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA

María Fernanda Castro, William Cárdenas y Claudia Vargas
Universidad Pedagógica Nacional
mfcastros@upn.edu.co, wacardenas@pedagogica.edu.co, cmvargasg@pedagogica.edu.co

Este artículo tiene como propósito describir y ejemplificar acciones de un profesor de geometría, que generan cambios en el discurso matemático sobre las representaciones gráficas en geometría, cuando utilizan sistemas de geometría dinámica. Para ello, se adopta la estrategia investigativa basada en prácticas usuales. El marco de referencia de la investigación incluye una caracterización de discurso matemático y resultados de investigaciones que han identificado acciones del profesor para promoverlo y la relación entre los sistemas de geometría dinámica y el desarrollo del discurso.

INTRODUCCIÓN

En el año 2019, dos de los autores de este artículo desarrollamos una investigación en la que identificamos acciones de un profesor, apoyadas en el uso del programa GeoGebra, que generaron cambios en el discurso del aula, relacionados con la representación de figuras geométricas (Cárdenas y Castro, 2019). El propósito de este artículo es describir y ejemplificar algunas de estas acciones.

La investigación citada se enmarca en una perspectiva sociocultural de la educación matemática y está en correspondencia con autores que asumen el aprender matemáticas como participar en prácticas matemáticas discursivas propias de esta disciplina (Goos, 2004; Radford y Barwell, 2016). Además, nos interesa hacer énfasis en las representaciones de figuras geométricas y en el uso de programas de geometría dinámica, porque en el campo de la educación matemática no abundan investigaciones relacionadas con la forma en que los estudiantes interpretan y piensan las representaciones dinámicas que surgen en el marco de discusiones grupales. Esto lleva a preguntarse por las acciones que debería realizar el profesor para ayudar a que el estudiante interprete estas representaciones y las use para dar explicaciones y argumentos en discusiones grupales.

Castro, M. F., Cárdenas, W. y Vargas, C. (2022). Cambios en el discurso sobre representaciones gráficas en una clase de geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 147-154. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO DE REFERENCIA

El marco teórico que sustenta nuestra investigación está dividido en tres partes: una conceptualización sobre discurso matemático; algunas acciones del profesor que favorecen el desarrollo del discurso; y la relación entre los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) y el desarrollo del discurso matemático.

Discurso matemático

Relacionamos el aprendizaje de las matemáticas con la participación en prácticas discursivas, lo cual implica asumir el aprendizaje como el desarrollo de un discurso. Sfard (2008) caracteriza el discurso matemático a partir de cuatro rasgos: vocabulario, mediadores visuales, narrativas y rutinas. El vocabulario es el uso específico que la comunidad da a las palabras; en matemáticas, estas pueden estar relacionadas con cantidades, formas y objetos abstractos. Los mediadores visuales son recursos con los cuales los participantes de una comunidad matemática pueden identificar el objeto de la conversación y coordinan su comunicación. Las narrativas son verbalizaciones habladas o escritas, que pueden presentar tanto descripciones de objetos como relaciones entre estos. Estas verbalizaciones son sometidas a aprobación o rechazo en la comunidad. Las rutinas son maneras de actuar repetitivas guiadas por regularidades, que caracterizan un discurso.

Acciones del profesor para favorecer el discurso matemático

Los participantes de una comunidad matemática deben asumir roles participativos, solucionar de manera colaborativa problemas y usar estrategias y explicaciones que permitan la institucionalización del saber (Goos, 1996). Dado que, en una clase, el profesor es el miembro experto de la comunidad, una de sus prioridades debe ser contribuir a que las actuaciones de los estudiantes se asemejen a las de la comunidad de referencia.

Haciendo eco a Quaranta y Tarasow (2004), a Goos (2004) y a Mariotti (2009), a continuación, nombramos algunas acciones que puede desarrollar un profesor de matemáticas para impulsar el discurso matemático de sus estudiantes: a) diseñar tareas que encaminan a los estudiantes a asumir responsabilidad de encontrar una solución; b) orientar y guiar a los estudiantes cuando trabajan en grupos; c) invitar a los estudiantes a explicar sus ideas y a solicitar la ayuda de los compañeros antes de consultarle a él; d) mediar en las interacciones para promover el trabajo colaborativo y favorecer la comunicación entre los estudiantes; e) ceder la responsabilidad de validación al grupo; f) inquietar a los estudiantes sobre cómo hallar soluciones; g) usar la voz de los estudiantes, al discutir la resolución de problemas; h) problematizar el punto de vista de algún estudiante; i) impulsar el buen uso de terminología y lenguaje matemático; j) reconstruir el contexto de una tarea que se realiza con el apoyo de un artefacto (por ejemplo, programa de geometría dinámica) e identificar el papel que juega este en su solución del problema; k) dirigir la atención de los estudiantes hacia aspectos particulares de su experiencia con un artefacto; y k) solicitar a los estudiantes hacer explicito lo aprendido.

Relaciones entre un SGD y el discurso matemático

El papel de los SGD es crucial en la constitución del discurso. Esto debido a que se convierten en una herramienta que apoya los procesos de comunicación de los estudiantes, contribuye a generar representaciones que se transforman en mediadores visuales, apoya la producción de narrativas y contribuye al uso adecuado de términos matemáticos. Por ejemplo, Schacht (2017) afirma que cuando los estudiantes trabajan empleando herramientas digitales en la clase de matemáticas, el lenguaje cambia. Esto debido a que su uso permite un primer acercamiento al lenguaje matemático, pues, aunque usan términos asociados al artefacto, estos pueden evolucionar hacia términos aceptados por una comunidad matemática. Mariotti (2009) resalta que la gestión que hace el profesor en relación con el uso del artefacto (por ejemplo, un SGD) permite el desarrollo del discurso, pues ayuda a los estudiantes a explicitar sus significados personales y transformarlos en significados matemáticos.

METODOLOGÍA

La estrategia investigativa empleada es una que se basa en prácticas usuales (Lesh y Kelly, 2000). Consiste en realizar un acercamiento a escenarios educativos, con la intención de caracterizar, describir o interpretar un fenómeno particular que se presenta en un contexto específico.

La primera fase de la estrategia es la observación. En nuestro caso realizamos el registro de cuatro clases consecutivas de geometría de grado sexto, en un colegio de Bogotá, durante el primer semestre del año 2018. Dicho escenario estaba conformado por 30 estudiantes, un profesor investigador y dos observadores participantes. En las cuatro clases se trabajó en torno a tres problemas de construcción de figuras geométricas que garantizaran propiedades relacionadas con colinealidad y equidistancia. Así, en el primer problema se solicitó a los estudiantes construir diez puntos colineales de manera que los puntos consecutivos estuvieran igualmente separados (Problema 1); en el segundo, se les pidió construir 10 puntos que equidistaran de un punto A (Problema 2); y el tercero, pidió construir un triángulo isósceles (Problema 3). La segunda fase de la estrategia es la construcción de datos. La comenzamos haciendo las transcripciones de las interacciones registradas. Luego, se identificaron los episodios de interacciones en las que las acciones del profesor favorecían el discurso matemático de los estudiantes cuando utilizaban un SGD. Organizamos los episodios teniendo en cuenta tres asuntos centrales en las conversaciones: colinealidad, equidistancia y la construcción del triángulo isósceles. La tercera fase de la estrategia es la construcción de una herramienta analítica. En nuestro caso, la generamos a partir de las acciones que reportamos en el marco de referencia.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

En el ejemplo que exponemos a continuación, pretendemos mostrar las acciones del profesor que permitieron un cambio en el discurso de una estudiante (Adriana), relativo a la relación entre la representación gráfica y los atributos geométricos que la determinan. Para ello, describimos tres episodios.

Episodio 1

El episodio surgió en la segunda sesión de clase observada. Específicamente, en un momento en el que Sebastián construyó 10 puntos que visualmente parecían colineales. Es allí cuando surge la siguiente interacción:

232.	Profesor:	¿Una línea? Ahí dice que no tocaba hacer una línea. ¿O sí?
238.	Samuel A:	(Interrumpe a Paola). Una cuadrícula.
239.	Profesor:	¿O sea necesito otra cosa? ¿Qué necesitaría?
260.	Adriana:	Pero no se sabe sí tienen la misma distancia.
263.	Profesor:	Y entonces qué hago para que me dé la misma medida.
267.	Adriana:	Con la, con la cuadrícula.
270:	Profesor:	Venga le activamos la cuadrícula.
275.	Sebastián:	(Ubica los puntos alineados utilizando la cuadrícula).

276. Profesor:		¿De esta manera se podría ubicar? (Señala al televisor).
277. Adriana:		(Asiente con la cabeza)
278. Profesor:		Aaah, y si yo no quiero tener la cuadrícula, porque qué tal que yo solo tenga una hoja blanca.

La primera acción del profesor fue indagar sobre la verbalización proferida por Sebastián que incluía el término "una línea" [232]. Es una acción que cuestiona el uso de un vocabulario no especializado y, a su vez, pretende empezar a involucrar en el discurso de la comunidad de clase, rutinas y narrativas que permiten hacer evidente la necesidad de usar objetos geométricos para garantizar los atributos que cumple una representación gráfica. Esta acción genera que los estudiantes propongan el uso de otra herramienta del SGD: la cuadrícula. Observamos en la intervención [270] que el profesor acepta el uso de esta herramienta, aun cuando no es usual su empleo en la comunidad matemática de referencia. Esto lo hace con el propósito de generar discusiones entre los estudiantes, para evaluar la pertinencia de dicha herramienta. Finalmente, la última acción es generar incertidumbre al proponerle a los estudiantes suponer que no cuentan con la cuadrícula [278].

Respecto a Adriana, hemos evidenciado que apoya el uso de la cuadricula, pues considera que con la propuesta de Sebastián no se garantiza la condición de que los puntos deben estar equiseparados.

Episodio 2

El Episodio 2 se dio en el marco de la puesta en común del Problema 2. En esta se discutieron dos propuestas para construir un conjunto de 10 puntos que equidistaran de un punto A. La propuesta de Camilo consistió en construir una circunferencia con centro en A y luego colocar nueve puntos en esta. Es importante aclarar que, aunque Adriana no expuso su solución al problema, ella también usó la herramienta circunferencia para solucionar el problema, pero obtuvo una construcción blanda. Adriana construyó un conjunto de 10 puntos que visualmente parecían equidistar de un punto A. Luego construyó una circunferencia con centro en A, y que contenía a uno de esos puntos, y posteriormente arrastró los puntos sobre la circunferencia. Traemos a cuento la solución de Adriana, porque consideramos que influyó en las intervenciones hechas por ella durante la exposición de la propuesta de Camilo.

Luego de que Camilo expuso su construcción, surgió la siguiente interacción:

808.	Profesor:	Yo vi que había otros que estaban haciendo la que estaba haciendo Camilo. Entonces, vamos a terminar la clase definiendo ese objeto geométrico, que nos va a servir para… ¿oiga para qué nos va a servir la circunferencia?
811.	Adriana:	Para saber que tiene la misma medida.
815.	Profesor:	La misma distancia. La circunferencia nos va a servir ahorita muchísimo para eso.

Nos es evidente que la acción del profesor en las intervenciones [808, 815] está dirigida a focalizar la discusión en torno a un atributo de la circunferencia, el cual permite garantizar la equidistancia. La acción consiste en solicitar a los estudiantes hacer una síntesis respecto a la utilidad de la herramienta circunferencia, e institucionalizar un saber relativo a este asunto. Es la institucionalización de una narrativa que, parafraseando al profesor, podríamos expresar como "los puntos de una circunferencia equidistan de su centro". A su vez, el germen de una rutina para la construcción de figuras geométricas en las cuales se requiera garantizar equidistancia. Adicionalmente, Adriana es quien efectúa la síntesis, al reconocer el atributo de la circunferencia que se garantiza cuando se usa esta herramienta en una construcción. Cabe resaltar que, aunque la construcción de Adriana no es robusta, es posible indicar que ella empieza a reconocer que con la circunferencia es posible construir puntos equidistantes.

Episodio 3

El tercer episodio se desarrolla durante la puesta en común de la solución al Problema 3. En ella, Adriana intervino comunicando la manera en que realizó su construcción:

525.	Adriana:	Bueno entonces, hacemos una circunferencia y pues dos puntos encima, en el borde de la circunferencia y después los juntamos (construye dos radios de la circunferencia y el triángulo determinado por ellos). Podemos moverlos y siempre estos dos [los radios] van a quedar con la misma medida.
526.	Pablo:	(Dirigiéndose a Adriana) ¿Y por qué?
528.	Adriana:	Porque del centro al borde de la circunferencia siempre va a tener la misma medida.

En ese fragmento, en [528], encontramos evidencia de que Adriana se ha apropiado de la definición de circunferencia pues, aunque utiliza lenguaje coloquial, su verbalización está en consonancia con la comunidad matemática de referencia. Además, teniendo en cuenta la descripción proferida por Adriana en [525], consideramos que cambió su forma de proponer la solución a un problema: pasó de una construcción blanda a una robusta, hecho que se manifiesta en que inicialmente aprobaba el uso de la cuadrícula para construir puntos colineales y luego, construyó un triángulo isósceles con una circunferencia, explicando por qué funciona para lo cual usó mediadores visuales que proporciona el SGD,

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En el análisis realizado identificamos acciones repetitivas del profesor para promover cambios en el discurso de los estudiantes, apoyándose en el SGD, que buscan que el estudiante empiece a reconocer qué es lo que se debe comunicar cuando el profesor le pide que solucione un problema, y cambios específicos en el discurso de algunos estudiantes desencadenados por esas acciones. Expresamos a continuación algunos cambios en el discurso respecto a las representaciones geométricas, junto con la descripción de las acciones más determinantes para generarlos:

Cambio	Acciones
De proponer construcciones que permiten solucionar un problema a reconocer las restricciones de las mismas	- Genera incertidumbre acerca del cumplimiento de una propiedad geométrica que se supone debe cumplir la construcción realizada - Solicita el término matemático que corresponde a un mediador visual - Propone realizar construcciones que corresponden a una propuesta de un estudiante - Resalta las condiciones que no cumple una construcción - Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción.
De proponer una construcción blanda a una robusta, modificando la rutina asociada al uso del papel cuadriculado	- Realiza preguntas para que los estudiantes expliquen una figura realizada en el SGD - Cuestiona una construcción blanda exaltando los inconvenientes que presenta - Solicita prever lo que ocurrirá al efectuar con el SGD, la propuesta de un miembro de la clase

De verbalizar o mostrar la solución a un problema en el SGD a explicar por qué la construcción realizada permite solucionar el problema.	- Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción - Solicita a un estudiante defender la validez de una construcción realizada en el SGD cuando surge un argumento que la invalida - Solicita apoyarse en una definición, hecho geométrico, propiedad o procedimiento para desarrollar una idea - Destaca como punto crítico de la conversación las condiciones que se deben cumplir en una definición, hecho geométrico procedimiento o construcción

REFERENCIAS

Cárdenas, W. A. y Castro, M. F. (2019). *Una comunidad de discurso en la clase de geometría, apoyada por la tecnología digital y la gestión del profesor*. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/11524.

Goos, M. (1996). Making sense of mathematics: The teacher's role in establishing a classroom community of practice. Ponencia presentada en *Annual Postgraduate Research Conference of the Graduate School of Education*. Queensland, Australia.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*, 258-291.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (cap. 9, 197-230) N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.,

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

Quaranta, M. y Tarasow, P. (2004). Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. *RELIME, 7*(3), 219-233.

Radford, L. y Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 275-313). Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Schacht, F. (2017). Between the conceptual and the signified: How language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. *Digital Experiences in Mathematics Education, online first*. doi: 10.1007/s40751-017-0037-9.

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE ALTURA DE TRIÁNGULO CON ESTUDIANTES DE PRIMARIA

Óscar Cetina, Nathalia Moreno y Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
ojcetinas@upn.edu.co, inmorenob@upn.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

Siguiendo recomendaciones de investigadores en Educación Matemática, en vez de dictar una definición de un objeto geométrico a unos estudiantes de primaria, les propusimos la tarea de analizar ejemplos y no ejemplos, con la intención de incidir favorablemente en su proceso de construcción de significado de altura de triángulo. En este artículo presentamos un ejemplo ilustrativo del análisis de un fragmento de diálogo en el que se evidencia cómo unos estudiantes explican por qué una representación es no ejemplo de altura, usando su definición personal de altura de triángulo, recién construida por ellos. Exponemos los resultados y conclusiones que dejó esta experiencia.

INTRODUCCIÓN

Presentamos el análisis de la interacción entre estudiantes de grados cuarto y quinto cuando resuelven una tarea. Tal análisis hizo parte del estudio realizado para dar respuesta al problema de investigación propuesto en el trabajo de grado para optar por el título Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). El objetivo de dicho estudio era determinar cómo contribuir al proceso de formación en geometría de estudiantes de grados cuarto y quinto. Específicamente, pretendíamos analizar cómo las definiciones, desde su elaboración hasta su uso, inciden en el proceso de construcción de significado del objeto definido. El objetivo de aprendizaje de las tareas que diseñamos era favorecer la construcción de significado de un objeto geométrico –a través de la construcción de definiciones, del análisis de ejemplos y no ejemplos y del uso de definiciones para la toma de decisiones–; en dichas tareas usamos representaciones en papel y lápiz y/o en geometría dinámica.

En este artículo, presentamos inicialmente algunas ideas del marco de referencia que sustenta nuestra propuesta y de las principales relaciones entre ellas. Luego, exponemos la estrategia investigativa que implementamos para llevar a cabo este estudio. En seguida, damos un ejemplo ilustrativo del análisis de un

Cetina, Ó., Moreno, N. y Samper, C. (2022). Construcción de significado de altura de triángulo con estudiantes de primaria. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 155-162. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

fragmento, considerado uno de los datos importantes de nuestra investigación. Y finalizamos con los resultados y conclusiones que dejó nuestro estudio.

MARCO DE REFERENCIA

Exhibimos, por una parte, la perspectiva teórica desde la cual concebimos la construcción de significado y, por otra, aspectos relacionados con dicho proceso. Nos referimos al uso de no ejemplos para promover aprendizaje.

Como indican Leikin y Winicki-Landman (2001, citados en Silva, 2013), definir es más que asignar un nombre a un objeto geométrico; es un proceso en el que se captura el significado y el carácter de un concepto. Definir incide en la construcción de significado. Samper, Leguizamón y Camargo (2002) afirman que algunos profesores restringen el proceso de construcción de significado porque se limitan al establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres y una representación visual del concepto o la relación, y a la memorización de las definiciones. Esto lleva a que el estudiante replique la definición sin ningún tipo de comprensión e interpretación.

Samper, Perry y Camargo (2017), en concordancia con lo anterior, exponen que construir significado de un objeto o una relación matemática consiste en lograr compatibilidad de las ideas que una persona tiene sobre estos (significado personal) con las que la comunidad de referencia ha establecido (significado institucional), a través de un proceso social y de interacción entre estudiantes y objetos en estudio. A medida que surge el objeto o la relación en diversas situaciones o procesos se descubren nuevas propiedades y, por tanto, se construye significado. Teniendo en cuenta lo que proponen Molina, Perry, Camargo y Samper (2015), el significado personal está constituido por el conjunto de interpretaciones de aspectos de un objeto matemático, que el estudiante ha ido construyendo a través de experiencias, individuales o colectivas; lo integran significados parciales y provisionales, que son "todas las ideas que va formando, reformando, precisando, modificando el estudiante, con respecto al objeto matemático" (Molina et al., 2015, p. 42). Los autores reconocen que el significado personal se manifiesta a través de las ideas que expresa el estudiante sobre el objeto y el uso que le da a este, en diversos procesos matemáticos, como justificar, resolver problemas, clasificar, definir, entre otros.

De Villiers (1995) recomienda dar a los estudiantes oportunidades para participar en la formulación y elección de las definiciones con el fin de promover la construcción de significado. Consideramos que dar la definición y analizar cada parte de esta, construirla a partir de un análisis de ejemplos y no ejemplos, o extraerla de la solución de problemas son tres tipos de tareas que tienen el mismo objetivo.

Tsamir, Tirosh y Levenson (2008) comentan que, entre los principios generales de la construcción de significado de un concepto, según la psicología cognitiva, juegan un papel fundamental los ejemplos. Hay dos teorías que sobresalen para explicar el proceso de construcción de significado de un concepto: la clásica y la de prototipos. En la primera de estas, un concepto está representado por las características definitorias que comparten sus ejemplos. Para decidir si una figura es ejemplo se requiere evaluar si cumple las características. En la segunda, el concepto está representado por ejemplos ideales, prototipos, que sirven, a través de la comparación, para determinar si algo es ejemplo del concepto. Para favorecer el proceso de formación de conceptos geométricos se deben atender las dos teorías. Por ello, para construir significado de conceptos geométricos es necesario reconocer tanto ejemplos como no ejemplos de ellos.

ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

En nuestro estudio usamos una aproximación de tipo interpretativa, con un enfoque fenomenológico dado que se pretendía desentrañar lo que decían y hacían los estudiantes de primaria respecto a las tareas que les propusimos, y cómo estas contribuyeron al proceso de construcción de significado. La estrategia investigativa adoptada en el trabajo de grado es la "entrevista basada en tareas" que expone Goldin (2000). Su propuesta se caracteriza por realizar una indagación sistemática de la actividad de los estudiantes, durante la resolución, con ayuda de recursos, de una tarea previamente diseñada, a través de un diálogo intencionado con los investigadores. El objetivo es, por una parte, rastrear los mecanismos de exploración, las causas de sus decisiones, las estrategias que usan y, por otra, evidenciar la construcción conceptual al resolver la tarea propuesta. Con las preguntas que hicimos buscábamos que los estudiantes expresaran con claridad sus ideas y sus decisiones. También pretendíamos poder interpretar su lenguaje y los términos que usaban en el momento de comunicarse.

En este artículo nos referimos solo a una de las tareas que diseñamos, la cual incluye dos de las acciones que contribuyen a la construcción de significado: construcción de definiciones y uso de estas. La tarea se propuso a cuatro parejas de estudiantes de quinto grado de primaria en un momento distinto a la clase de matemáticas. Se escogieron estos estudiantes porque en las clases participaban y comunicaban sus ideas con bastante claridad.

La información se registró en videograbaciones y en hojas de respuestas, que guardamos como imágenes digitales. Adicionalmente, se elaboraron preguntas intencionadas para entender lo que pensaban los estudiantes y las razones de sus acciones al resolver la tarea.

Para analizar el proceso de los estudiantes al construir definiciones se establecieron varias categorías (véase Tabla 1). La primera es *Encontrar atributos* (EA). Se asigna a acciones o situaciones en las que los estudiantes al resolver la tarea y al realizar exploraciones consiguen encontrar, reconocer y manifestar características de las figuras presentadas, que podrían ser consideradas como atributos relevantes del objeto en estudio. Otra categoría, *Verificar atributos* (VA), se refiere a las acciones para determinar la existencia y el cumplimiento de atributos de un objeto geométrico. *Descartar atributos* (DA) es la categoría que se asigna a las acciones para decidir si uno o más atributos, de los ya identificados, están incluidos en la definición del objeto geométrico. Cuando los estudiantes deciden que una figura es un no ejemplo, quisimos determinar qué atributos evocan para tomar su decisión. Esto da lugar a la cuarta categoría que denominamos *Ausencia de atributos* (AA). Por último, la quinta categoría, *Modificar atributos* (MA), se refiere al proceso realizado después de identificar ciertos atributos, para deducir si deben ser incluidos en la definición del objeto.

Cada una de las categorías anteriores tiene tres subcategorías (véase Tabla 1) según lo que usen para tomar sus decisiones: representaciones con GeoGebra (GD) o en papel (P), ejemplos (E), o no ejemplos (NE).

A continuación, se presentan las categorías y subcategorías usadas en el análisis con su respectivo código. Por ejemplo, EA-GD-E significa encontrar atributos usando geometría dinámica con ejemplos. EA-P-NE significa encontrar atributos usando papel y no ejemplos.

Tabla 1: herramienta analítica

Categoría	Geometría dinámica (GD)	Papel (P)	Ejemplos (E)	No ejemplos (NE)	Codificación
Encontrar atributos (EA)	x		x		EA-GD-E
	x			x	EA-GD-NE

		x	x		EA-P-E
		x		x	EA-P-NE
Verificar atributos (VA)	x		x		VA-GD-E
	x			x	VA-GD-NE
		x	x		VA-P-E
		x		x	VA-P-NE
Descartar atributos (DA)	x		x		DA-GD-E
	x			x	DA-GD-NE
		x	x		DA-P-E
		x		x	DA-P-NE
Notar ausencia de atributos (AA)	x		x		AA-GD-E
	x			x	AA-GD-NE
		x	x		AA-P-E
		x		x	AA-P-NE
Modificar atributos (MA)	x		x		MA-GD-E
	x			x	MA-GD-NE
		x	x		MA-P-E
		x		x	MA-P-NE

EJEMPLO ILUSTRATIVO DEL ANÁLISIS: CASO J Y G

El propósito de la tarea a la que nos referimos es que los estudiantes propusieran una definición de altura de triángulo. Para ello, les mostramos representaciones de ejemplos y no ejemplos en papel.

Los estudiantes J y G, después de observar los ejemplos de altura de triángulo, registraron tres atributos comunes que, según ellos, caracterizaban las alturas representadas de los triángulos:

- el segmento no interseca totalmente el triángulo,
- la intersección entre el segmento y la recta mide 90°,

- todas deben ser segmentos y deben estar conectadas a un vértice.

Los atributos definitorios que establecemos para altura de triángulo son los siguientes:

- ser un segmento,
- ser perpendicular a la recta que contiene un lado del triángulo,
- tener como extremos un punto de la recta y el vértice del triángulo que no pertenece a la recta anteriormente mencionada.

En la Figura 1 están las imágenes mostradas a los estudiantes. Luego se presenta la transcripción de la interacción entre los estudiantes J y G y la profesora (Pa).

Figura 1: no ejemplos de altura representados en papel

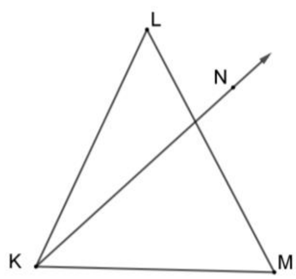


Imagen 1: el $\overrightarrow{KN}$ (rayo KN) no es altura del ΔKLM (triángulo KLM)

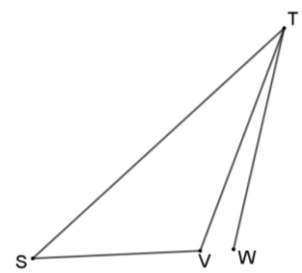


Imagen 2: el $\overline{TW}$ (segmento TW) no es altura del ΔSVT (triángulo SVT)

65	Pa:	Listo y ¿este? (Señala la Imagen 1)
66	J:	¿Este punto [punto N del rayo KN] qué hace por acá?
67	G:	¡Ah! Es un rayo.
68	Pa:	¿Entonces? (…)
69	G:	El rayo también es infinito, ¿no?
70	J:	Entonces tampoco es altura con un rayo.
71	Pa:	¿Esta? (Señala la Imagen 2)
72	J:	Esa (Señala la abertura determinada por la intersección del segmento y la recta que contiene el lado del triángulo) sí no mide 90°.
73	Pa:	¿Será?
74	G:	(Mide con el transportador el $\angle TWS$) Si da 90° (…) mmm

75 J: (Después de ubicar correctamente el trasportador) No, no mide 90° (vuelve a medir el ángulo $\angle TWS$).

76 Pa: Pero (…) es un segmento, pero no mide 90° (…)

77 G: (En voz baja) no cumple con todas (…).

78 Pa: ¿Qué pasa si solamente cumple con una [propiedad]? Por ejemplo, acá (señala la Imagen 2) es segmento y está “conectado” como ustedes dicen (…)

79 J: Tiene que cumplir con todas [las propiedades] (…) O si no, no es una altura.

Usando la transcripción anterior y teniendo en cuenta la herramienta analítica propuesta, presentamos el análisis de la interacción de los participantes en el respectivo diálogo.

Respecto a la Imagen 1, para justificar que no se ha representado una altura, los estudiantes indican la ausencia de uno de los atributos que han establecido como característica relevante de altura de un triángulo. Lo anterior corresponde a AA-P-NE, pues J identifica que el punto N no pertenece al lado del triángulo [66], incumpliendo el atributo (i) de su lista. Para G, el atributo cuya ausencia nota es el (iii), ser segmento, ya que especifica que el rayo y la recta se extienden sin fin; en palabras de G, son infinitos [69]; así que, con ayuda de G, J descarta que una altura sea un rayo (DA-P-NE) [70]. En cuanto a la Imagen 2, J menciona la ausencia del atributo ser perpendicular a la recta que contiene el lado del triángulo (ii) (AA-P-NE) [72], y ante la duda de G, al usar el transportador [75], verifican el incumplimiento del atributo (ii) (VA-P-NE).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Entrevemos aquí que el uso de no ejemplos contribuyó a destacar la necesidad de los tres atributos definitorios incluidos en la definición de altura, ya que los estudiantes los usaron para explicar por qué cada imagen no era un ejemplo. Específicamente, reconocieron cuál de dichas propiedades se incumplía. J y G identificaron que basta con que una representación incumpla una propiedad para ser no ejemplo del concepto.

Este ejercicio parece indicar que las tareas con ejemplos y no ejemplos sí pueden incidir en el proceso de construcción de significado. En parte se puede deber a que, con la presentación de ejemplos y no ejemplos y la solicitud de explicar por qué son no ejemplos, logramos animar a los estudiantes a examinar y explorar situaciones geométricas, y a comunicar sus ideas en la clase de geometría.

Observamos que los participantes pudieron reconocer atributos definitorios de los objetos de estudio en la tarea. Además, en el desarrollo de la Tarea 3, J indica que una representación es ejemplo de un objeto cuando: "*tiene que cumplir con todas* [los aspectos definitorios incluidos en una definición]" [79]. Él reconoce que solo al cumplirse todos los atributos de su listado puede el objeto ser altura de triángulo. Esto deja entrever que los estudiantes comprenden en qué consiste el proceso de definir en sí, es decir, además construyen significado de lo que es una definición.

REFERENCIAS

De Villiers, M. (1995). The handling of geometry definitions in school textbooks. *Pythagoras*, 38, 3-4.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly y R. Lesh (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Molina, Ó., Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos. *Educación Matemática*, *27*(2), 37-66.

Samper, C., Leguizamón, C. y Camargo, L. (2002). La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría. *Revista EMA*, *7* (3), 293-309.

Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2017). Construir significado, más que conocer la definición. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 51-58.

Silva, L. (2013). Argumentar para definir y definir para argumentar. (Trabajo de grado de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69* (2), 81-95. doi: 10.1007/s10649-008-9133-

El arrastre mantenido como herramienta para propiciar la visualización y la conjeturación en geometría

Camilo Cuartas y Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional
wccuartasg@upn.edu.co, lcamargo@pedagogica.edu.co

En este artículo damos a conocer un estudio que hicimos como trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Este tenía como objetivo analizar el potencial del arrastre mantenido para favorecer el tránsito entre los procesos cognitivos de visualización y conjeturación, en el marco de la resolución de problemas con apoyo de GeoGebra. Un estudio exploratorio de casos nos permitió concluir que este tipo de arrastre permite a los estudiantes establecer relaciones de dependencia entre invariantes inducidos por el resolutor del problema e invariantes que se visualizan al hacer el arrastre, lo que favorece la producción de conjeturas.

Introducción

En diversos estudios investigativos (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010; Samper y Molina, 2013; Baccaglini-Frank y Antonini, 2016; Baccaglini-Frank, 2019) se menciona el arrastre mantenido y se afirma que tiene un gran potencial en la solución de problemas abiertos. En todos los cursos de geometría euclidiana de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se trabaja con GeoGebra y se fomenta el uso de otros tipos de arrastre: el libre, el guiado, el vinculado o el de lugar ficticio (Arzarello et al., 2002). Sin embargo, el arrastre mantenido no se emplea ni es conocido por la mayoría de los estudiantes.

La situación descrita en el párrafo anterior nos motivó a profundizar en el arrastre mantenido y explorar qué efecto podía tener en la resolución de problemas. Pusimos un especial interés en analizar su influencia en los procesos de visualización y conjeturación. Con este propósito, adelantamos una investigación exploratoria con cuatro estudiantes de la Licenciatura, a quienes propusimos problemas que suponíamos promovían el uso del arrastre mantenido, y seguimos de cerca el proceso exploratorio que realizaron. Así pudimos confirmar cómo era el funcionamiento de este arrastre e identificar su utilidad para favorecer la articulación entre los procesos de visualización y conjeturación.

Cuartas, C. y Camargo, L. (2022). El arrastre mantenido como herramienta para propiciar la visualización y la conjeturación en geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 163-170. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En este artículo, después de conceptualizar el arrastre mantenido, describimos sucintamente el estudio realizado y presentamos un ejemplo del trabajo hecho por uno de los estudiantes. Esperamos con ello motivar a estudiantes y profesores a emplear este tipo de arrastre, como un valioso recurso para la resolución de problemas.

ARRASTRE MANTENIDO

Baccaglini y Mariotti (2010) definen el arrastre mantenido así:

> consiste en tratar de arrastrar un punto base [de una representación] y mantener alguna propiedad interesante que se ha observado. (pp. 230)

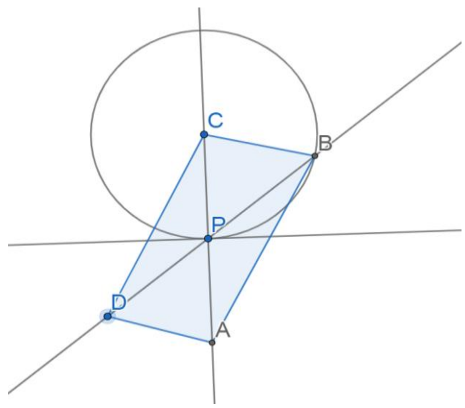
En ese sentido, con el arrastre mantenido se busca mantener invariante un atributo de una representación cuando se arrastra un punto que controla la construcción. Mientras se intenta mantener el atributo, se visualiza que el punto que se arrastra describe una trayectoria que el resolutor no percibe inicialmente, pero que poco a poco va descubriendo e identificando como un nuevo invariante: el invariante observado. La visualización de la relación de dependencia entre ambos invariantes se traduce en una conjetura del tipo: si "invariante observado", entonces "invariante inducido", hecho que es muy potente desde el punto de vista de la actividad matemática, pues lleva al descubrimiento de relaciones geométricas.

Para entender cómo opera el arrastre mantenido, presentamos a continuación un ejemplo propuesto por Baccaglini y Mariotti (2010), al que denominan "El cuadrilátero especial". Se parte de un cuadrilátero construido de la siguiente manera (Figura 1):

- P un punto.
- Recta r que pasa por P.
- Recta l perpendicular a r, que pasa por P.
- C un punto en l con $C \notin r$.
- A un punto simétrico de C con respecto a P.
- D un punto en el semiplano determinado por r que contiene A.
- $\overleftrightarrow{DP}$.

- Circunferencia con centro en C y radio CP.
- B segunda intersección de la recta $\overleftrightarrow{DP}$ y la circunferencia.
- Cuadrilátero $ABCD$ o $ADBC$.

Figura 1: cuadrilátero $ABCD$



Se pide a los estudiantes que elaboren conjeturas sobre los tipos de cuadrilátero que podría producir el movimiento del punto D (punto control). Los estudiantes deben arrastrar el punto D de forma que el cuadrilátero $ABCD$ o $ADBC$ sea un cuadrilátero especial. A medida que arrastran, deben descubrir una propiedad inducida como invariante y formular una conjetura.

Supongamos que unos estudiantes deciden arrastrar el punto D en el semiplano determinado por r que contiene A, tratando de mantener el cuadrilátero como paralelogramo, para lo cual establecen las medidas de los lados. Al activar la herramienta *Rastro* en el punto D, observan que el movimiento de D genera un paralelogramo si el punto describe una trayectoria circular (Figura 2).

Figura 2: ubicación de puntos

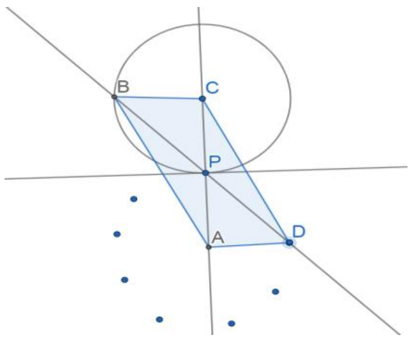
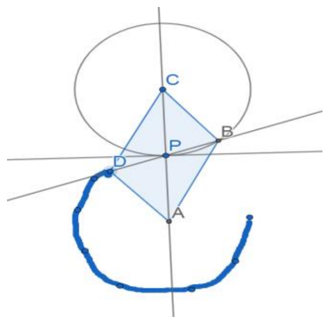


Figura 3: arrastre con la herramienta Rastro



Usando la herramienta *Rastro*, los estudiantes se dan cuenta de que para mantener el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo (invariante inducido intencionalmente), el punto D genera una trayectoria circular con centro en A y radio PA. En busca de una explicación, los estudiantes pueden identificar que cuando $D \in \odot_{A,PA}$ ocurre que $PD = PB$ y que por eso las diagonales del cuadrilátero se bisecan, razón por la cual el cuadrilátero es un paralelogramo (Figura 3).

Así, se han identificado dos invariantes. El primero es el invariante inducido intencionalmente por el arrastre mantenido, que se refiere a que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo. El segundo es la trayectoria que sigue el punto D, generada por un arrastre de lugar ficticio; es decir, la $\odot_{A,PA}$, de tal manera que $PD = PB$. Este es el invariante observado.

Los estudiantes podrían proponer la siguiente conjetura: Si D pertenece a la circunferencia con centro en A y radio PA, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. Con una construcción robusta pueden convencerse de la relación condicional entre el invariante observado durante el arrastre y el invariante inducido intencionalmente. El invariante observado durante el arrastre corresponde a la proposición usada como antecedente de la conjetura y el invariante inducido es un hecho geométrico que actúa como consecuente.

ESTUDIO EXPLORATORIO

Para analizar cómo funcionaba el arrastre mantenido en la resolución de problemas, realizamos un estudio exploratorio con cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, de diferentes semestres. Ellos fueron seleccionados a conveniencia, por el vínculo de amistad que tenían con el primer autor del artículo. A cada uno le propusimos tres problemas, entre ellos el "Cuadrilátero especial". En Cuartas (2021) se encuentra una descripción de los otros problemas.

La interacción con los estudiantes se hizo a través de la plataforma Teams, lo que permitió grabar el proceso de resolución. Previo al trabajo, preparamos un libreto con preguntas que haríamos a los estudiantes, para incentivar que expresaran en voz alta qué estaban viendo y qué descubrían. Algunas de las preguntas previstas fueron: ¿Qué está observando en este momento? ¿Por qué no intenta arrastrar tratando de mantener un cuadrilátero que esté visualizando, a ver qué descubre? ¿Qué camino sigue el punto D?

A partir de las grabaciones de las sesiones, describimos el proceso de resolución de cada estudiante. Incluimos información sobre las acciones que realizó en

GeoGebra y sobre las ideas que explicitó oralmente, incluyendo citas textuales que reportan lo que observó, lo que descubrió, lo que conjeturó y las respuestas a las preguntas que le formuló el entrevistador.

Para adelantar el proceso analítico, tomamos la descripción y diligenciamos una rejilla analítica. En ella identificamos los siguientes elementos: los arrastres empleados, las configuraciones que visualizó el estudiante, los invariantes detectados, la verificación hecha, las relaciones descubiertas y la conjetura formulada.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

Para ilustrar el análisis adelantado, presentamos el proceso desarrollado por el estudiante Jhon, quien cursa noveno semestre de Licenciatura. Él ya cursó todos los espacios académicos de geometría que ofrece el programa. Ha tenido la oportunidad de trabajar con GeoGebra y ha utilizado la herramienta arrastre para resolver los problemas de geometría que se proponen en los cursos, pero no ha oído hablar del arrastre mantenido.

El estudiante es expresivo y se le facilita comunicar sus pensamientos. Inicialmente, hace la construcción según las instrucciones del problema. Luego, empieza a arrastrar el punto D de manera libre y visualiza que el cuadrilátero es convexo. Mientras el estudiante arrastra libremente el punto D, le preguntamos: "¿Qué tipo de cuadrilátero está observando en este momento?". Jhon responde: "Parece ser un paralelogramo". En seguida le sugerimos: "Intente arrastrar el punto D tratando de mantener el cuadrilátero que está observando". El estudiante manifiesta que no es fácil arrastrar el punto D manteniendo el cuadrilátero como paralelogramo; es decir, provocando el invariante inducido. Después de varios intentos, alude a que el punto D describe una recta "especial". Pero al seguir arrastrando D se percata de la posibilidad de que D esté en una circunferencia y no en una recta.

Al observar que el participante no está seguro de la trayectoria que sigue el punto D, le preguntamos "¿Qué haría usted para que el punto D le muestre la trayectoria que sigue?". Como el estudiante se queda pensativo, le pedimos que active el *Rastro* al punto D. Jhon activa el rastro del punto D, arrastra dicho punto tratando de mantener el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo y visualiza el rastro que deja D. Dice "Observo el paralelogramo y parece que el punto D sigue la trayectoria de una circunferencia o de una elipse". Acto seguido, propone la construcción de la $\odot_{A,AP}$ y arrastra el punto D sobre dicha circunferencia, con el fin de corroborar que D describe una circunferencia. Le preguntamos "¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación que visualiza?". Jhon dice "que para mantener el paralelogramo la trayectoria que sigue D es una $\odot_{A,AP}$". Le pedimos que formule una conjetura de la forma *si… entonces…*. Jhon piensa en voz alta mientas explora la representación con el ratón: "si es paralelogramo, todos sus lados son congruentes [sic], es decir que el segmento AP es congruente al segmento PC, porque P es punto medio; entonces tienen la misma medida… Pero, también observo que la recta DB y la recta CA se intersecan; esto nos debe servir para construir la conjetura". Regresa a la representación, detalla el rastro de la circunferencia y se detiene en el paralelogramo. "La conjetura sería referida a la circunferencia y referida al paralelogramo… ¡Ah sí! ya sé cuál sería la conjetura". Jhon empieza a construir la conjetura tomando como premisa el invariante inducido, pero se detiene a pensar que la circunferencia que sigue el punto D es la causante de que el cuadrilátero $ADBC$ se mantenga como un paralelogramo. Finalmente construye la conjetura, la cual quedó así: "Si $D \in \odot_{P,AP}$, entonces el cuadrilátero $ADCB$ es paralelogramo".

En la Tabla 1 presentamos la rejilla analítica construida a partir de la descripción.

Tabla 1: rejilla analítica que sintetiza el análisis del proceso de Jhon al resolver el problema "El cuadrilátero especial"

Estudiante: Jhon	Acciones en GeoGebra y verbalizaciones de Jhon	
Arrastres empleados	Libre	Arrastra el punto D de manera libre.
	De lugar ficticio	Arrastra el punto D. Este describe una trayectoria circular.
	Guiado	Arrastra el punto D al cual le ha activado el *Rastro.*
	Vinculado	Arrastra el punto D que ha vinculado previamente a la $\odot_{A,AP}$.
	Mantenido	Arrastra el punto D que está vinculado a la $\odot_{A,AP}$ (invariante observado) y mantiene el cuadrilátero con apariencia de paralelogramo (invariante inducido).

Configuraciones que visualiza	Objetos	Un paralelogramo (invariante inducida). La $\odot_{A,AP}$ (invariante observada).
	Relaciones	La relación de dependencia entre el movimiento del punto D y la configuración del cuadrilátero. El paralelismo entre $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{PH}$.
Invariantes detectadas	Invariante inducido intencionalmente	El cuadrilátero $ABCD$ mantiene la apariencia de paralelogramo.
	Invariante observada durante el arrastre	$D \in \odot_{A,AP}$.
Verificación hecha	Construyó la circunferencia con centro en A y radio AP.	
Relaciones descubiertas	Cuando arrastra el punto D descubre este que describe la trayectoria circular cuando el cuadrilátero se mantiene como paralelogramo.	
Conjetura formulada	Si $D \in \odot_{A,AP}$ entonces el cuadrilátero $ADBC$ es paralelogramo.	

Como señalan Baccaglini-Frank y Mariotti (2010), el problema "El cuadrilátero especial" favorece el uso del arrastre mantenido. Sin embargo, es un problema que requiere experiencia en el trabajo con GeoGebra, pues la construcción es relativamente compleja. Jhon se fijó inicialmente en que el cuadrilátero era convexo. Fue necesario encaminar la atención hacia la regularidad que queríamos que observara, para que efectivamente pudiera establecer la relación entre el invariante observado y el invariante inducido.

CONCLUSIONES

Como resultado del estudio, proponemos el siguiente esquema (Cuadro 1) que ilustra las relaciones entre los invariantes que operan cuando se emplea el arrastre mantenido en la resolución de problemas. En este pretendemos destacar que el arrastre mantenido establece un puente entre los procesos de visualización y la producción de conjeturas. La visualización permite observar un invariante que no estaba inicialmente en el foco de la exploración (el invariante observado) y contribuye con ello a establecer la relación de dependencia entre los invariantes presentes. Esta relación se ratifica con una construcción robusta. De esta forma se promueve el descubrimiento de relaciones geométricas.

Cuadro 1: ilustración del papel que juega el arrastre mantenido en la articulación entre los procesos de visualización y conjeturación

	Invariante inducido		Invariante observado
Proceso de visualización	El cuadrilátero es paralelogramo		El punto D sigue una trayectoria circular
Verificación mediante construcción robusta	El paralelogramo		Circunferencia con centro en P y radio PA
Proceso de conjeturación	entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo	$\Leftarrow$	Si D pertenece a la circunferencia con centro en A y radio PA,

REFERENCIAS

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM*, *51*(5), 779-791.

Baccaglini-Frank, A. y Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 43-50). Szeged, Hungary: PME.

Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Cuartas, W. (2021). De la visualización a la conjeturación a través del arrastre mantenido. (Tesis de Licenciatura). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Mariotti, M. A. y Baccaglini-Frank, A. (2011). Making conjectures in dynamic geometry: The potential of a particular way of dragging. *New England Mathematics Journal*, *43*, 22-33.

La liebre y el halcón: uso de representaciones dinámicas y estáticas para la solución de problemas avanzados[1]

Fredy Peña y Armando Solares
Centro de investigaciones y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
fredypmat@gmail.com, asolares@cinvestav.mx

En el marco de la validación de un modelo de enseñanza para los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, estudiantes de primer año de preparatoria se enfrentaron a un problema de persecución, y lo resolvieron mediante una traducción al álgebra de información proveniente de una representación gráfica dinámica y de sus propias representaciones en papel y lápiz. Resaltamos el proceso de construcción de un mecanismo algebraico para la solución del problema y el rol que las representaciones gráficas tienen en ese proceso.

Introducción

El proceso de solución de *sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas* requiere de los estudiantes una re-conceptualización de las nociones de *incógnita* e *igualdad* (Filloy, Rojano y Solares, 2010). Por ello es pertinente la búsqueda de contextos que permitan dotar de sentido a estos objetos algebraicos, particularmente, como parte de un proceso de modelización matemática, que incluye la traducción de información proveniente del fenómeno o de sus representaciones no matemáticas, a un Sistema Matemático de Signos (SMS) en el cual las relaciones y los datos se pueden manipular a fin de encontrar nueva información para el problema que se aborda.

El interés de esta propuesta es analizar el proceso mediante el cual los estudiantes usan representaciones gráficas para producir “significados y sentidos” (aspectos semánticos), que luego usan en un proceso de modelización matemática.

---

[1] Esta investigación se desarrolló en el marco de los proyectos “Construcción de significados en procesos de modelación matemática. Una aproximación basada en el uso de herramientas de simulación computacional desde una perspectiva semiótica” (Conacyt, Mexico. A1-S-33505) y *Exploring Mathematical Modeling Knowledge for Teaching Through Simulation and Coding* (SSHRC, Canada. Ref.: 430-2019-00382).

Peña, F. y Solares, A. (2022). La liebre y el halcón: uso de representaciones dinámicas y estáticas para la solución de problemas avanzados. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 171-178. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Modelos teóricos locales

Para estudiar los procesos de adquisición y uso de ideas matemáticas en contexto, los modelos teóricos locales (Filloy, 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008) proponen enfocar el objeto de estudio desde cuatro modelos que se interrelacionan: el de enseñanza, el de procesos cognitivos, el de competencia formal y el de comunicación. Para efectos de este artículo, presentamos enseguida las descripciones correspondientes a solo tres de los modelos (enseñanza, procesos cognitivos y competencia formal) que son los que enmarcan los asuntos que retomaremos en el análisis de las producciones del estudiante.

Modelo de enseñanza

Consideramos que el diseño de un modelo de enseñanza está constituido por una serie de tareas de modelización matemática para ser resueltas por medio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunas de estas tareas (en particular, aquella sobre la que versa este documento) proponían enfoques gráficos para la representación de los datos. Como parte del modelo de enseñanza que se propuso a los estudiantes, se diseñó el siguiente problema:

> *La liebre y el halcón:* La velocidad es fundamental para la supervivencia de las liebres. Una liebre común puede correr a unos 18 metros por segundo. Por su parte, el halcón peregrino ostenta el título del ave voladora más rápida del reino animal. Con una técnica de caza de caída en picada, esta ave rapaz es capaz de ver a sus presas hasta a 3 kilómetros de distancia y atacarlas a una velocidad de hasta 88 metros por segundo. Una liebre se percata de que un halcón peregrino viene a su ataque y emprende la huida hacia su madriguera justo cuando el halcón ya se encuentra a una distancia de 1000 metros. Si la liebre logra salvarse en el último momento, ¿podrías estimar la distancia a la que se encontraba la liebre de su madriguera?

Para este problema, se les dio a los estudiantes una representación dinámica (véase https://www.geogebra.org/m/GzSWGrq8), después de que ellos realizaron sus propios bosquejos.

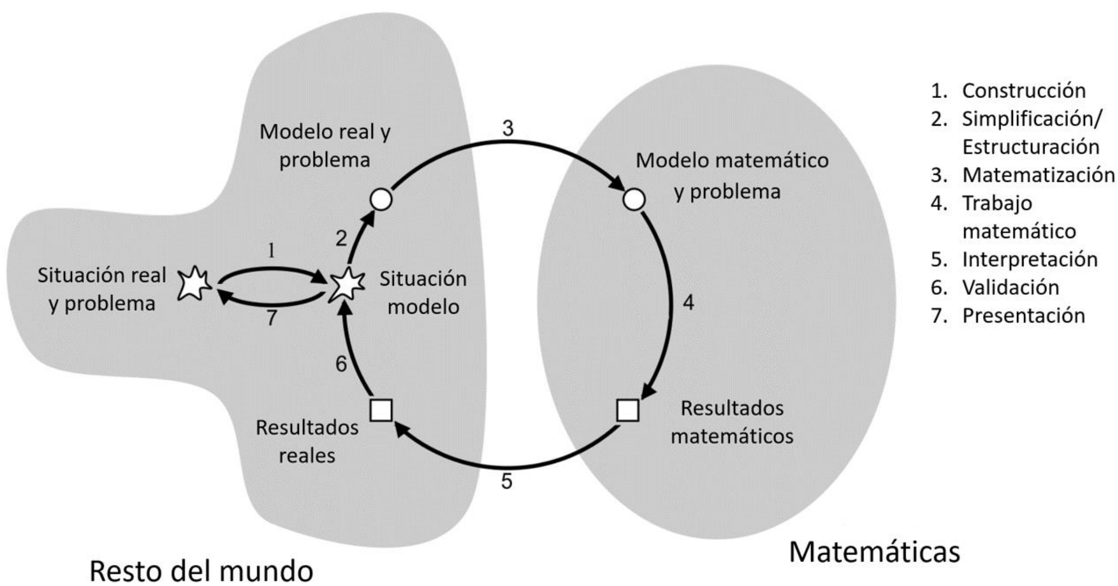
Modelo de procesos cognitivos

En este estudio nos interesa indagar sobre los procesos de construcción de significado de los objetos matemáticos que los estudiantes van usando o consolidando a medida que trabajan en la solución de tareas propuestas en el modelo de enseñanza. Recurrimos a los cuatro tipos de fuentes de significado propuestos por Filloy (1999): i) transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS; ii) traducciones a través de SMS distintos; iii) traducciones entre un SMS y sistemas de signos no matemáticos; y iv) la consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermedios creados durante el desarrollo de modelos de enseñanza.

El análisis que se presenta al cierre de este documento se centra en los ítems (ii) y (iii) que constituyen los procesos de lectura-transformación de información, en este caso proveniente de la redacción del problema (un sistema de signos no matemáticos) y SMS geométricos intermedios (e idiosincráticos) que los estudiantes usan al momento de representar la información gráficamente.

Modelización matemática

Figura 1: ciclo de modelización propuesto en Blum y Leiß (2007) (nuestra traducción)

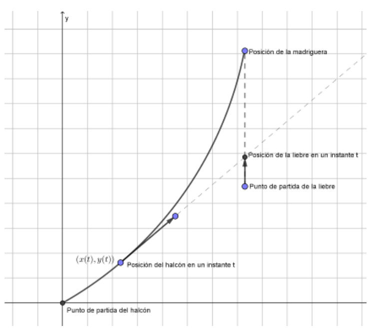
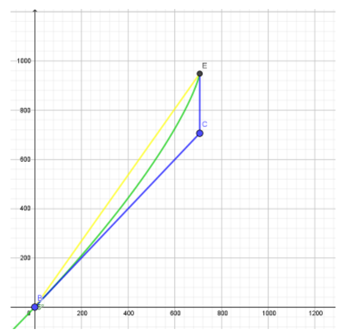


Respecto al modelo de procesos cognitivos, consideramos pertinente clarificar algunas ideas del proceso que se espera que los estudiantes sigan al enfrentarse a un problema de modelización matemática. Para Blum y Leiß (2007), la modelización matemática implica la totalidad del proceso de resolver problemas del mundo real por medio de las matemáticas. El esquema que proponen estos autores presenta siete pasos que constituyen el ciclo ideal de modelización (véase Figura 1). Para efectos de este documento, nos interesa hacer énfasis principalmente en las primeras cuatro etapas, a saber, entender el problema, representarlo, matematizarlo y obtener resultados matemáticos.

Modelo de competencia formal

El modelo de competencia formal es el conocimiento matemático formal y socialmente establecido que es motivo de estudio en la investigación. Para el problema planteado en la secuencia, este modelo exige hacer uso del SMS propio de la solución de ecuaciones diferenciales, puesto que la solución del problema se reduce al análisis de una curva de persecución. Sin embargo, existe una aproximación a la solución del problema que admite el uso de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas que se constituye en un SMS de un nivel de formalidad menor con el cual los estudiantes sí pueden trabajar. La siguiente tabla muestra el planteamiento y solución del problema desde los dos SMS.

Tabla 1: aproximación al problema por distintos SMS

	SMS del cálculo	SMS del álgebra y la geometría
Representación gráfica		
Estrategia	Análisis de la curva por medio de ecuaciones diferenciales	Análisis del problema por medio de las trayectorias lineales
Supuestos	Velocidades constantes, trayectoria lineal de la liebre, disposición inicial a 45° sobre el eje x	Velocidades constantes, trayectoria lineal de la liebre y el halcón
Planteamiento matemático	$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{9}{44}\right)\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{707-x}$	$\left\{\begin{array}{lr}(1) & y = 18t \\ (2) & 1000 + y = 88t\end{array}\right\}$
Solución	249.48 metros	257.14 metros o (242.1 metros)[2]

[2] Esta solución se obtiene al analizar, por medio del teorema del coseno, la trayectoria del halcón en línea recta a la madriguera y ángulo inicial de 45° respecto del eje x.

El lector puede notar cómo las aproximaciones que otorga un análisis de las trayectorias lineales acotan la solución del problema, a su vez que cada una de ellas corresponde a una aproximación relativamente cercana a la respuesta que se obtiene al solucionar la ecuación diferencial.

Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se usó una metodología de tipo cualitativo que tiene un enfoque en el diseño, aplicación y reestructuración del modelo de enseñanza. Las fases del estudio obedecen a las propuestas por Filloy, Rojano y Puig (2008) para un experimento de diseño, lo cual incluye: i) selección de un modelo formal de competencia y de la población de estudio; ii) diseño de la secuencia; iii) pilotaje y reestructuración; iv) aplicación de un diagnóstico; v) selección de un subgrupo para entrevistas clínicas; vi) estudio de casos; y vii) análisis e interpretación de las entrevistas realizadas. Para este estudio se trabajó con un total de 8 estudiantes, de entre 15 y 18 años, del grupo 456 de primero de preparatoria de la UNAM, México.

Resultados

Presentamos los resultados basándonos principalmente en las producciones de un estudiante al que denominamos E8, quien en la prueba diagnóstica (en la que se evaluaron competencias algebraicas, geométricas y de resolución de problemas) se acercó más a la media de los resultados del grupo en general.

Durante la sesión de trabajo en el problema de la liebre y el halcón, se pidió a los estudiantes que leyeran el problema y realizaran un bosquejo gráfico del mismo. En la información recogida durante este proceso puede interpretarse un trabajo en las primeras fases del ciclo de modelización, así como el establecimiento de un SMS útil para la solución de este:

E6: (Lee el problema) la liebre puede correr a 18 metros por segundo

E8: O sea, tenemos tiempo, distancia

E6: Por su parte el halcón peregrino […] una técnica de caza de caída en picada. Ay no digas que vamos a tener que calcular fricción y todo eso.

E8: ¿Te imaginas? No, no creo

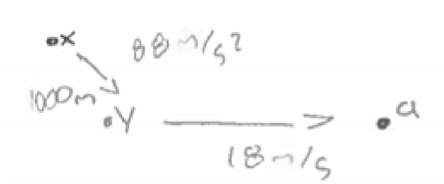
E6: (Continúa la lectura) Esta ave es capaz de ver sus presas hasta a ¡tres kilómetros! de distancia y atacar a una velocidad de hasta 88 metros por segundo cuadrado (comete error en la lectura de una nota al pie) O sea, es una aceleración (pausa) Aceleración, velocidad, distancia, fricción, ¿qué más a ver?

E8: Fricción, no

E6: Hay fricción, porque cae en picada (termina la lectura). A ver, con un dibujito lo entiendo mejor.

En este fragmento de diálogo entre E6 y E8 se hace evidente cómo, a medida que los estudiantes avanzan en la lectura del problema, van realizando procesos de lectura transformación para movilizar saberes previos como los conceptos de distancia, velocidad, fricción y aceleración, además de que resaltan datos que consideran necesarios (fase 1 del ciclo) para construir esquema que se observa en la Figura 2.

Figura 2: gráfico de E8 para el problema



La Figura 2 presenta la interpretación del estudiante sobre el instante inicial del problema, de allí que *x* e *y*, que representan el halcón y la liebre respectivamente, se encuentren separados y se indique una distancia de 1000 metros entre ellos. Las flechas que se usan indican los vectores de desplazamiento de ambos elementos. El punto correspondiente a la posición en la que se encontraría la madriguera y los datos para la solución del problema están marcados también sobre el dibujo.

La sesión de trabajo finalizó después de que los estudiantes realizaron sus representaciones gráficas en la hoja de trabajo, razón por la cual en la siguiente sesión el profesor pudo iniciar haciendo una exposición de las producciones de los estudiantes y enseñando la animación realizada en GeoGebra, la cual se asemejaba a la mayoría de los gráficos realizados por los estudiantes.

La construcción de un sistema de ecuaciones lineales como estrategia matemática para solucionar el problema fue dirigida por el profesor a medida que filtraba las intervenciones públicas de los estudiantes. El siguiente fragmento ilustra lo sucedido:

Profesor: y la distancia ¿qué sería?

E6: velocidad por tiempo

Profesor: O sea, ¿qué?

E6: 18t

Profesor: Y ¿qué tendríamos? La distancia que recorrería el halcón ¿qué sería?

E6: Sería y

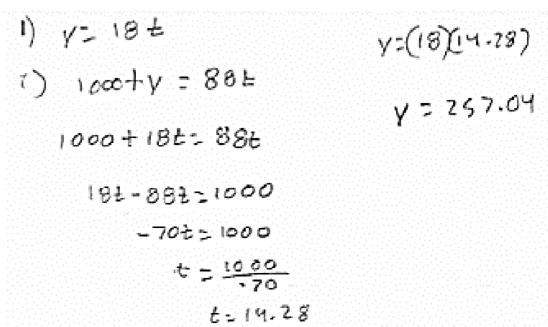
E8: $1000 + y$

Profesor: Eso, entonces, esos $1000 + y$ ¿son?

E4: 88t

Una vez que se estableció el sistema de ecuaciones correspondiente al problema, E8 lo solucionó usando el método de sustitución (véase Figura 3).

Figura 3: solución del sistema de ecuaciones, hecha por E8



El trabajo matemático del estudiante consistió en el uso de una técnica de resolución de ecuaciones lineales que él ya conocía. Vale la pena analizar cómo este mecanismo de solución no solo es plausible por la forma en la que están escritas ambas ecuaciones, sino que, además, puede tener una interpretación directa en función del contexto del problema y su representación gráfica (la distancia en función del tiempo para el halcón es equivalente a la de la liebre con una “ventaja” de 1000 metros).

CONCLUSIONES

Los resultados del trabajo de los estudiantes en la solución del problema de la liebre y el halcón permiten rastrear, en paralelo, el proceso de modelización matemática, así como el de construcción y uso de un SMS hibrido entre la geometría y el álgebra para representar y solucionar la situación. De esta manera, es posible suponer que ambos procesos son complementarios ya que sin un SMS que fuere lo suficientemente concreto como para que surja del contexto del problema y suficientemente abstracto como para que permita un trabajo netamente matemático (el método de sustitución en el caso de E8), la solución del problema no sería posible y el sistema de ecuaciones lineales carecería de sentido si no existieran referentes concretos dados por el contexto del problema y su representación gráfica.

Los procesos de lectura-transformación que realizan los estudiantes cuando comienzan a solucionar el problema se corresponden de manera directa con las fases iniciales del ciclo de modelización; así que se puede suponer que todo texto (escrito y gráfico) al que se haga alusión a medida que se lee el problema posibilita la interpretación del problema, la selección de datos relevantes, faltantes y el reconocimiento de las relaciones entre ellos.

La presencia de recursos gráficos como primera estrategia para estructurar el problema tiene una potencialidad enorme para procesos de modelización matemática. Consideramos que, aun cuando las propuestas de enseñanza se concentren en temas que se alejan del conocimiento geométrico, siempre vale la pena considerar las representaciones gráficas o geométricas como herramientas con las que los SMS se nutren en significados.

REFERENCIAS

Blum, W. y Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA 12* (pp. 222-231). Chichester, UK: Elsevier.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach.* Nueva York, EUA: Springer Science & Business Media.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing unknowns. *Journal of Research in Mathematics Education, 41*(1), 52-80.

El uso de los ángulos diedros en el trabajo con poliedros regulares

Rodil Quintero-Ochoa y Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav)
rodil.quintero@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Se presenta el planteamiento de una investigación con base en la revisión de literatura sobre el fenómeno didáctico relativo al concepto de ángulo. Para comenzar, se reporta un panorama general de la investigación en todos los niveles educativos, misma que ha profundizado en el trabajo en 2D, y se presentan los elementos que permiten reconocer la ruta del estudio hacia el trabajo en 3D, en particular con poliedros. Se plantea la fundamentación del estudio con la teoría Socioepistemológica, mientras que centra su atención en las prácticas que acompañan y dotan de significado a los objetos matemáticos, con el propósito de estudiar con una investigación de diseño los usos del ángulo diedro que le dan los estudiantes en formación inicial docente al trabajar con poliedros regulares.

Antecedentes

La enseñanza y el aprendizaje del ángulo es un área ampliamente investigada, principalmente en la educación básica. Investigaciones como la de Rotaeche y Montiel (2017), incluso, identifican como un fenómeno didáctico las dificultades, los conflictos y los malentendidos asociados a las particularidades del concepto, pues se presentan independientemente del país, contexto o paradigmas de enseñanza y aprendizaje de las experiencias educativas e investigaciones que los reportan. Con base en una amplia revisión bibliográfica, las autoras sintetizan las dificultades más comunes de los estudiantes mencionando las siguientes (p. 173):

- la coordinación de las distintas facetas del concepto, por ejemplo, giro (Mitchelmore y White, 1998), o como inclinación (Douek, 1999);
- la asunción de que la longitud de las rectas que definen el ángulo afecta su medida;
- la identificación del ángulo dentro de otras figuras;
- el reconocimiento de ángulos de medidas 0°, 180° y 360°.

Quintero-Ochoa, R. y Montiel-Espinosa, G. (2022). El uso de los ángulos diedros en el trabajo con poliedros regulares. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 179-185. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Resulta relevante mencionar que algunas de estas dificultades guardan estrecha relación con algún tipo de definición asociada al concepto, a propósito de lo que se ha denominado naturaleza multifacética del ángulo escolar (Mitchelmore y White, 2000), y que refiere a la diversidad de definiciones que hay en los libros de texto para que el concepto se 'ajuste' a ciertas estructuras matemáticas escolares. Esto se conserva durante toda la trayectoria escolar de los[1] estudiantes y se acentúa en el trabajo de distintas áreas matemáticas: la definición angular en geometría es distinta a la definición en trigonometría (Yeshurun, 1982).

En una investigación reciente, Pachuca Herrera y Zubieta Badillo (2020) reportan sobre imágenes del concepto, relativas al ángulo, que persisten en estudiantes del nivel superior y que los llevan a concepciones erróneas y dificultades en su medición; lo cual hace evidente, de nuevo, la especificidad del fenómeno didáctico previamente reportado.

Estos antecedentes tienen en común el trabajo del ángulo en el plano (2D). Incluso aquellas investigaciones donde se exploraba el ángulo en situaciones físicas en tres dimensiones –por ejemplo, en (Munier y Merle, 2009)–, su modelación o representación se llevaba al plano. El trabajo del ángulo en tres dimensiones ampliaría la problemática planteada en 2D y permitiría identificar también la demanda de otro tipo de razonamientos, tal como plantearon ya Pittalis y Christou (2010). Es en este contexto en el que proponemos nuestro proyecto de investigación.

Aquí, encontramos solo la investigación de Tanguay y Grenier (2010) que, si bien no tenía como objeto de estudio la comprensión del ángulo sino la comprensión del proceso de demostración, entre sus resultados se incluyen dificultades con el ángulo diedro en el trabajo con poliedros regulares. En su estudio llevaron a cabo un experimento de enseñanza en un espacio de formación docente, con dos grupos de profesores; uno de los objetivos del diseño era que los participantes pudieran definir y describir los poliedros regulares a partir de tareas que hacían uso de materiales manipulables. Se reportaron algunas dificultades al momento de trabajar con el ángulo diedro e intentar conceptualizarlo, dado que tendían a centrarse solo en los ángulos de las caras; la mayoría de los participantes buscaban relacionar los lados, las aristas y los vértices, lo que

[1] La expresión "los estudiantes" no tiene intención alguna de excluir a personas de cualquier género. No usamos "las y los estudiantes" en aras de no hacer pesada la lectura. [N. E.]

eclipsaba cualquier otra forma de razonamiento y juicio que pudiesen tener al momento de pensar en dicha conceptualización.

Considerando los antecedentes hasta aquí mencionados, proponemos un proyecto que centre su objeto de estudio en el uso del ángulo diedro, como ampliación del fenómeno didáctico reportado por Rotaeche y Montiel (2017) –del plano al espacio–, en el trabajo con poliedros regulares. Se propone trabajar con estudiantes para profesores, a propósito de la persistencia de las dificultades con el concepto en el nivel superior y la complejidad que implica el trabajo en tres dimensiones.

Aunado a ello, adoptaremos el enfoque de usos del ángulo que proponen estas autoras, enmarcado en el enfoque de prácticas de la Teoría Socioepistemológica.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Cómo se manifiestan los usos del ángulo diedro en los estudiantes en formación inicial docente en matemáticas, al trabajar con poliedros regulares?
- ¿Qué elementos de significación del poliedro regular se construyen al explorar y poner en uso el ángulo diedro?

OBJETIVO

Conocer los usos que le dan los estudiantes en formación inicial docente en matemáticas a los ángulos diedros en el trabajo con poliedros regulares.

MARCO TEÓRICO

La Teoría Socioepistemológica se plantea como objeto de estudio los procesos de construcción social de conocimiento matemático y su difusión institucional (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). La dimensión social de la teoría se atiende con el estudio de las prácticas que anteceden y acompañan la producción de conceptos matemáticos (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015; Buendía, 2012).

En particular, usaremos la progresión pragmática: acción – actividad – práctica socialmente compartida, del modelo de anidación de prácticas (véase Figura 1) con el que se formula una explicación sobre la construcción social del conocimiento matemático.

Figura 1: modelo de anidación de prácticas (elaborado con base en Cantoral, 2013, p. 334)

Esta progresión articula los niveles que involucran los aspectos observables y explícitos de la práctica (acción y actividad), donde se identifican los usos del conocimiento, con un nivel donde se dan los aspectos emergentes (práctica socialmente compartida), tales como el significado –en torno al cual se organiza la práctica– (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

Así, al hablar del uso del conocimiento, este refiere al uso social inmerso en las prácticas, es decir, aquel que comparten quienes participan en ella y es afectado por el contexto donde se llevan a cabo; se trata de un uso funcional centrado en lo que importa al colectivo en cuestión (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2020; Tuyub y Buendía, 2018; Buendía, 2012). Desde la teoría se plantea que el significado deviene del uso que se da al objeto matemático y a sus procesos asociados en la práctica, por lo cual se considera relativo, situado y contextualizado (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

Nos proponemos llevar a cabo un estudio didáctico-experimental que nos permita explorar los usos del ángulo diedro en el trabajo con poliedros regulares a través de una investigación de diseño, considerando que este se desempeñe como el instrumento mediador de un escenario de construcción social de conocimiento matemático.

METODOLOGÍA

Llevaremos a cabo un ciclo de investigación basada en el diseño planeación–implementación–análisis, que no descarta dar continuidad posteriormente con otros ciclos, pues nos orientamos por las características que propone el documento *Design-Based Research Collective* (2003) para este tipo de metodología de investigación.

Para el presente estudio se ha planeado invitar a participar a estudiantes de segundo año académico y del espacio pedagógico de Geometría II del Profesorado en Matemáticas en el grado de Licenciatura de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, en Honduras; institución con la que se ha colaborado en proyectos académicos de formación e investigación previamente. Este escenario, el diseño y las condiciones que rodeen la puesta en escena se considerarán en el análisis utilizando el planteamiento del contexto de Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021), quienes consideran entenderlo por niveles: el contexto de significación (construcciones geométricas) donde se sitúa la construcción de significado matemático; el contexto situacional que refiere al espacio físico donde se lleva a cabo, así como los medios que se usan en la experiencia; y el contexto cultural relativo a la influencia del entorno, sea institucional –preestablecida– o social –construida en la interacción–.

Identificados los contextos, se procede al análisis de los usos del conocimiento matemático usando los constructos de la teoría.

Reflexiones finales

Con base en el planteamiento y los fundamentos teórico-metodológicos propuestos se espera encontrar los usos que dan al ángulo diedro los estudiantes en formación inicial docente en matemáticas en el trabajo con los poliedros, considerando los niveles de contexto que intervendrían en la experiencia didáctica. Se espera que en el transcurso de la puesta en escena, sea el contexto de significación el que más influya, es decir, que conforme los participantes participen y se involucren más en la práctica, sea lo matemático lo que oriente su actividad.

Con la ampliación de la problemática, de la geometría plana (2D) a la geometría en el espacio (3D), se espera también ampliar el planteamiento de usos del ángulo y proporcionar evidencia sobre comprensión y significación de poliedros regulares desde la problematización del ángulo diedro, hasta ahora no atendida.

Referencias

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Revista Educación Matemática, 24*(2), 9-35.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa Socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. https://doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Design-Based Research Collective (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8. https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

Douek, N. (1999). Argumentation and conceptualization in context: A case study on sunshadows in Primary School. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 89-110.

Mitchelmore, M. y White, P. (1998). Development of angle concepts: A framework for research. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(3), 4-27.

Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 209-238.

Munier, V. y Merle, H. (2009). Interdisciplinary mathematics-physics approaches to teaching the concept of angle in elementary school. *International Journal of Science Education 31*(14), 1857-1895. https://doi.org/10.1080/09500690802272082

Pachuca Herrera, Y. y Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación Matemática*, *32(*1), 38-66. https://doi.org/10.24844/em3201.03

Pittalis, M. y Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191-212. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8

Rotaeche, R. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática*, *29*(1), 171-199. https://doi.org/10.24844/EM2901.07

Tanguay, D. y Grenier, D. (2010). Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation. *For the Learning of Mathematics*, *30*(3), 36-42.

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. Nóesis. *Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, 29 (58-1), 24-55. https://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación Matemática*, *33*(3), 202-232. https://doi.org/10.24844/EM3303.08

Tuyub, I. y Buendía, G. (2017). Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en Ingeniería. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *8*(15), 11-28. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.44

Yeshurun, S. (1982). The angle: A logical gap in teaching geometry and trigonometry and its remedy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *13*(2), 133-138. https://doi.org/10.1080/0020739820130202

¿INFIDELIDADES GEOMÉTRICAS?: AVENTURAS DEL ÁNGULO CORNEADO

Harol Rodríguez y Édgar Guacaneme
Universidad Pedagógica Nacional
herodriguezd@upn.edu.co, guacaneme@pedagogica.edu.co

En el marco de la Licenciatura en Matemáticas estamos realizando el trabajo de grado *El infinitesimal, una noción de múltiples rostros*. En este identificamos una idea primigenia de la noción de infinitesimal en el contexto de la geometría euclidiana; en efecto, la proposición 16 del Libro III de *Elementos* revela la existencia del ángulo corneado, que tiene la peculiaridad de ser menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo dado. En el estudio de este ángulo nos encontramos con preguntas tales como: ¿en efecto es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo?, ¿este ángulo constituye una magnitud?, ¿cuál es su medida?, ¿es posible sumarlos? o ¿es posible bisecarlo? Las aproximaciones a las respuestas a estas preguntas serán discutidas someramente en este artículo.

INTRODUCCIÓN

Iniciemos con un breve cuento de nuestra autoría, que podría corresponder al título de este artículo.

> Érase una vez Euclidicia, una ciudad donde reinaba el orden y la tranquilidad. Sus habitantes, los rayos rectilíneos, eran seres bastante amorosos; permanecían en una constante búsqueda de relaciones y configuraciones sentimentales y geométricas. Sus más perfectos amoríos, que consistían en juntarse por sus vértices y formar ángulos rectilíneos, tenían como producto las bisectrices, seres especiales y perfectos que embellecían esta unión.
>
> Sin embargo, esto cambió cuando descubrieron que entre ellos había seres de otra especie, las sensuales curvas de las circunferencias, y que con ellas también podían establecerse el mismo tipo de relaciones, a condición de juntar su vértice con la curva y ser tangente a esta en ese sensual punto de contacto. Tal desliz geométrico-amoroso generaba seres conflictivos y realmente anormales, los ángulos corneados (aunque algunos preferían el calificativo “cornudos”). Como ellos eran fruto del amor que no obedecía a los principios éticos, un sector de la sociedad llegó a declarar que “los corneados eran menores que cualquier rectilíneo”; otro sector, más liberal, abogó por la idea de que sencillamente eran incomparables.

Rodríguez, H. y Guacaneme, É. (2022). ¿Infidelidades geométricas?: Aventuras del ángulo corneado. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 187-194. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

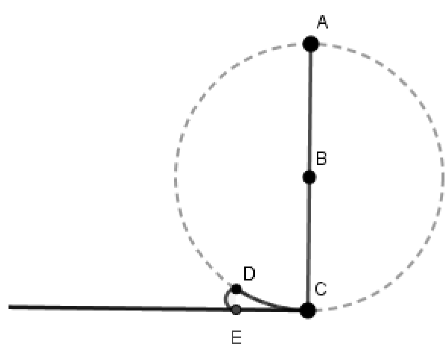
> El fruto del amor de los corneados también era su bisectriz, pero era extraña y totalmente diferente a los amantes; no parecía provenir de ellos. Las malas lenguas alcanzaron a vociferar que eran curvas endemoniadas; las buenas lenguas advirtieron que eras preciosas curvas parabólicas. Pero, la verdadera trama de la historia comenzó cuando la sociedad abrió su mente y reconoció que también había relaciones afectivas entre circunferencias y que estas generaban otro tipo de ángulos corneados cuando ellas se juntaban tangencialmente; de tales relaciones nacían bellísimas curvas cónicas, con las que se formaban nuevos ángulos corneados y, con ello, la evolución de la especie.

EUCLIDES Y LOS ÁNGULOS CORNEADOS

El concepto de ángulo ha recorrido múltiples culturas y no ha sido siempre el mismo; su significado y utilidad han dependido de su ubicación en el transcurrir histórico. En un principio, como medio de comprensión del universo y la naturaleza y, en tiempos posteriores, estudiado por el placer que brinda la búsqueda de la verdad y la claridad del intelecto (Matos, 1990).

En el desarrollo conceptual de esta noción matemática se dio un momento histórico que estuvo impregnado de controversia. En el Libro III de *Elementos* de Euclides, específicamente la proposición 16[1], se alude a la existencia de un ángulo muy exótico y particular, un ángulo más pequeño que cualquier ángulo agudo dado, llamado "ángulo de contingencia" por el matemático alemán Jordanus Nemorarius (1225-1260). Este se forma a partir de una circunferencia y una tangente a esta en un punto dado (véase Figura 1).

Figura 1: $\sphericalangle DCE$ ángulo de contingencia, de contacto o corneado



[1] "La recta trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y <u>el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo".</u> (Puertas, 1991, p. 198; el subrayado no está en el original)

En el Libro I de *Elementos* Euclides define un ángulo plano como "la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta" (Puertas, 1991, p. 110). Al respecto, es preciso aclarar que para Euclides los ángulos eran posibles también entre líneas curvilíneas y no solamente entre líneas rectas. Desde ese punto de vista, el ángulo de contingencia existe en el marco de la geometría euclidiana, ya que la definición lo admite.

ÁNGULO CORNEADO VERSUS ÁNGULO RECTILÍNEO

La comparación de un ángulo corneado con uno rectilíneo, explicitada en la proposición euclídea a la que se aludió antes, dio lugar a gruesas discusiones entre famosos matemáticos y filósofos de diferentes épocas, desde coetáneos de Euclides hasta nuestros tiempos, como Klein (1939)[2]. Para algunos la comparación sí es posible, pero esto lleva a inconsistencias lógicas e imprecisiones conceptuales. Al respecto, Boyer (1986) señala:

> Campano observó que, si uno compara el ángulo de contacto o de contingencia […] con el ángulo entre dos semirrectas, parece haber una clara inconsistencia con la proposición X. l de los *Elementos* de Euclides, que es la proposición fundamental del método de exhausción. (p. 333)

Examinemos esto con detenimiento. Para ello, consideremos la proposición X. l[3] de *Elementos*. Para nosotros es claro que si se aplicara esta proposición a los ángulos en cuestión, sí se obtendría un ángulo rectilíneo menor que un ángulo corneado, lo cual contradeciría lo señalado en la proposición 16 del Libro II; ello nos lleva a colegir, al igual que lo hizo Campano, que la proposición X. 1 exige que las magnitudes sean homogéneas y que los ángulos corneados y rectilíneos no lo son. Esto hace que tampoco, en el marco de la geometría euclidiana, sea coherente hablar de la razón entre las magnitudes de estos ángulos pues la definición 3 del Libro V exige la homogeneidad de estas.

Basándose en la definición 4 del Libro V de *Elementos*, Wallis (1685) argumenta la imposibilidad de comparar un ángulo rectilíneo agudo con este pecu-

---

[2] En la parte final de esta obra, Klein dedica varias páginas al Axioma de Arquímedes y a los ángulos corneados como ejemplo de un sistema de magnitudes excluidos por el axioma.

[3] "Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada". (Puertas, 1996, p. 12)

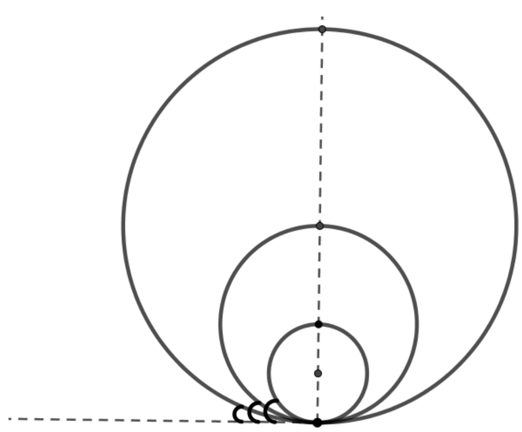
liar ángulo, ya que si se multiplica la medida de este por cualquier número positivo nunca se va a sobrepasar en tamaño un ángulo rectilíneo agudo dado; sostiene que esto implica un quiebre en lo que se conoce como el Axioma de Arquímedes o la propiedad arquimediana, dando vida a magnitudes de otra naturaleza.

MAGNITUD Y MEDIDA EN EL ÁNGULO CORNEADO

El desentrañamiento de la naturaleza de los ángulos corneados se abrió paso en la mente de muchos matemáticos. Desde distintos periodos históricos se intentó dar solución a preguntas como: ¿este ángulo conlleva una magnitud? y si así fuera, ¿cuál sería su medida? Como lo menciona Boyer (1949), Galileo, Wallis y otros matemáticos aseguraban que la medida de este ángulo era 0 y otros, como Hobbes, Newton y Leibniz, defendían lo contrario.

Wallis (1685) asegura que "el ángulo de contacto no es una magnitud, pero es a un ángulo real como 0 es a un número" (p. 71). En esta afirmación reconocemos que más que estar asintiendo que la medida de este ángulo era 0, lo que estaba planteando era una cierta "proporción" o analogía. Un razonamiento al otro extremo de la propuesta de Wallis fue hecho por el filósofo Hobbes (1956, como se citó en Bräting, 2012), quien consideraba que este ángulo sí era una magnitud porque era posible observarlo visualmente y aseguraba que el tamaño de este variaba dependiendo de qué tan grande o pequeña fuera la circunferencia (ver Figura *2*).

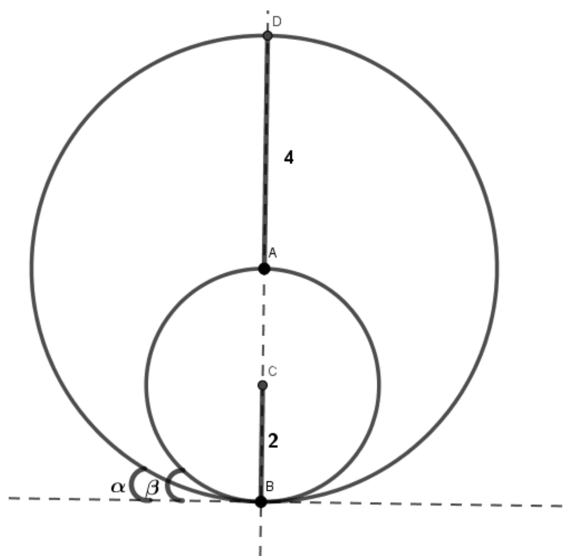
Figura 2: variación del tamaño del ángulo de contingencia según el tamaño de la circunferencia



Como se observa en la Figura 2, la abertura de este ángulo va a depender de la longitud del radio de la circunferencia; entre más pequeño sea el radio, mayor será este ángulo (Bair y Henry, 2008).

Al respecto, Jahnke (2003) propone que el recíproco del radio de la circunferencia puede servir como medida de los ángulos corneados, lo cual está directamente asociado con la curvatura de la circunferencia. Para ilustrarlo, tomemos dos circunferencias interiores tangentes y la tangente común a estas, una de ellas de radio 4 y la otra de radio 2 (véase Figura 3). Por la forma establecida de medición, la medida del ángulo asociado a la circunferencia de radio 4 (es decir, $\frac{1}{4}$) es la mitad de la medida del ángulo de radio 2 (es decir, $\frac{1}{2}$).

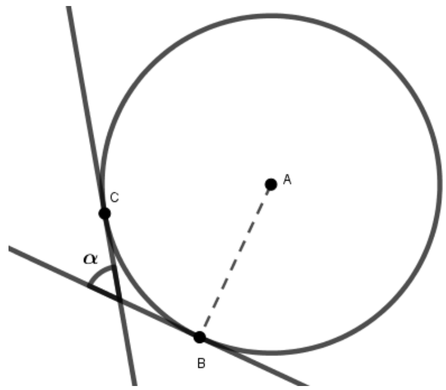
Figura 3: medida del ángulo corneado



Este procedimiento puramente aritmético entra en crisis cuando lo miramos desde un punto de vista geométrico, pues no parece existir una construcción que permita asegurar que el ángulo α es la mitad del ángulo β, o que $2\alpha = \beta$. En realidad, estamos enfrentados a magnitudes no arquimedianas que tienen un comportamiento algebraico diferente a las magnitudes geométricas arquimedianas tratadas en *Elementos*.

Ahora bien, como lo afirma Bräting (2012), la claridad del concepto de ángulo corneado (y de su medida) va a estar mediada por la definición de ángulo que construyamos o que tengamos presente. Como muestra de esto, Sonar (2020) plantea que “[s]i definimos los ángulos corneados como los ángulos entre las tangentes, entonces (la medida de) cada ángulo corneado es simplemente cero, y el sistema numérico arquimediano es nuevamente restaurado" (p. 40), (véase Figura 4).

Figura 4: ángulo α entre rectas tangentes, como ángulo de contingencia



Con base en lo anterior, y ligado al trabajo de grado en desarrollo, nuestra hipótesis respecto de la medida del ángulo corneado se expresa en la siguiente analogía: el ángulo corneado es al infinitesimal, como su medida es a los hiperreales.

SUMA DE ÁNGULOS CORNEADOS

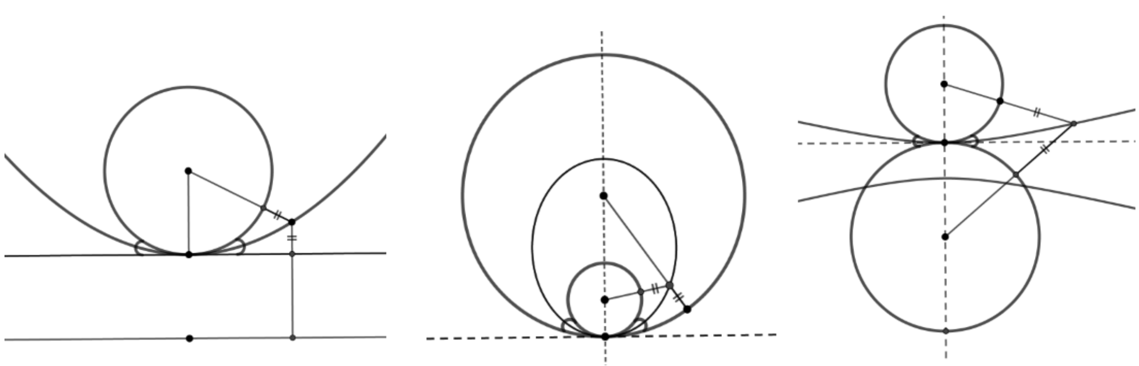
En la bibliografía consultada hasta el momento no hemos localizado algún procedimiento geométrico que pueda ser considerado como algoritmo para sumar ángulos corneados. No obstante, consideramos que sí puede existir o se puede llegar a crear. Esta consideración se basa en el reconocimiento de que en *Elementos* existen algoritmos para sumar longitudes de segmentos, superficies de regiones y amplitudes de ángulos rectilíneos. Precisamente, la suma de superficies lleva a reconocer al Teorema de Pitágoras como algoritmo para sumar superficies de cuadrados y a advertir que la cuadratura es una "operación" que genera cuadrados del mismo tamaño de una superficie poligonal. A partir de ello, conjeturamos sobre la posibilidad de "transformar" ángulos corneados en unos tales que sí se puedan sumar. También intuimos que si estudiamos la aritmética de los hiperreales e intentamos emularla en el ámbito geométrico, dispondremos de un algoritmo para sumar ángulos corneados y rectilíneos, sin caer en inconsistencias.

La bisectriz de un ángulo corneado

La bisectriz de cualquier ángulo rectilíneo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los rayos que lo conforman. En virtud de esto, podemos extrapolar esta idea y preguntarnos si los ángulos corneados tienen bisectriz. Al respecto, en el siglo V d. C. Proclo señaló que la bisección de ángulos no es un asunto para un tratado elemental, ya que incluso se cuestiona si la bisección de un ángulo es siempre posible; además agrega que se podría dudar de si es posible bisecar el ángulo corneado (Proclus, 1970, p. 271). Sin embargo, no realizó un desarrollo de esta idea.

Al respecto de los comentarios de Proclo, Koshkin (2020) expone el hallazgo e identificación de las bisectrices de tres tipos de ángulos corneados: el primero de ellos es el formado por la circunferencia y la tangente en un punto de esta; el segundo, formado por dos circunferencias tangentes interiores; y, el último, formado por dos circunferencias tangentes exteriores. La belleza de estos resultados recae en que las secciones cónicas resultan ser las bisectrices de estos ángulos (véase Figura *5*).

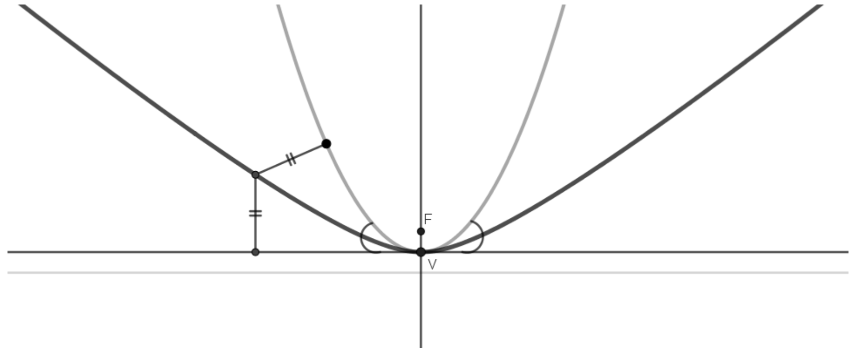
Figura 5: bisectriz para distintos tipos de ángulos corneados



a) Parábola como bisectriz **b) Elipse como bisectriz** **c) Hipérbola como bisectriz**

Finalmente, consideremos una curva diferente a la circunferencia: la parábola y su tangente también forman ángulos corneados. De esta manera, se abre la posibilidad de que estos tengan bisectriz. En la Figura 6 se muestra el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de la parábola y su tangente. Aunque, a primera vista, podríamos decir que la bisectriz es otra parábola o incluso una hipérbola, aún no tenemos las pruebas para afirmarlo de manera fehaciente, ya que podemos construirla y visualizarla, pero no logramos caracterizarla algebraicamente.

Figura 6: bisectriz de un ángulo corneado establecido por una parábola y su tangente



REFERENCIAS

Bair, J. y Henry, V. (2008). From mixed angles to infinitesimals. *The College Mathematics Journal*, *39*(3), 230-233.

Bräting, K. (2012). Visualizations and intuitive reasoning in mathematics. *Mathematics Enthusiast*, *9*(1 y 2), 1-18.

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications Inc.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* (Mariano Martínez Pérez, trad.) Madrid: Alianza Editorial S. A.

Jahnke, H. (Ed.) (2003). *A history of analysis*. *American Mathematical Society* & London Mathematical Society.

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry* (vol. 2, 3.ª ed., E. Hedrick y C. Noble trad.). New York: Macmillan.

Koshkin, S. (2020). Bisecting horn angles. *The College Mathematics Journal*, *51*(2), 124-131.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, *1*(1), 4-11.

Sonar, T. (2020). *3000 years of analysis: Mathematics in history and culture*. Alemania: Editorial Birkhäuser.

Puertas, M. L. (1991). *Elementos, Libros I-IV*. Madrid: Editorial Gredos.

Puertas, M. L. (1996). *Elementos, Libros X-XIII*. Madrid: Editorial Gredos.

Proclus, (1970). *A commentary on the First Book of Euclid's Elements* (G. Morrow trad.) Princeton: Princeton University Press.

Wallis, J. (1685). *A treatise of algebra.* Max Planck Institute for the History of Science, Library. http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:GK8U243K

DISEÑO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS, A PARTIR DEL "TEOREMA DE LAS DIAGONALES"

Julián Santos y Martín Acosta
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
jhsantost@correo.udistrital.edu.co, macostag@udistrital.edu.co

Este artículo está dirigido a profesores de matemáticas que pretendan reflexionar sobre el aprendizaje del objeto geométrico teorema de Pitágoras en el aula. Presentamos un diseño, en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas, cuyo objetivo es que los estudiantes reconozcan las relaciones geométricas entre las áreas de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo a partir de la relación entre las áreas de los cuadrados cuyas diagonales son los lados de un triángulo rectángulo. Nuestra intención fue producir un *milieu* que les permita a profesores y estudiantes construir el teorema de Pitágoras como una relación entre áreas y no solo como una técnica para calcular lados de un triángulo rectángulo.

INTRODUCCIÓN

En la escuela el teorema de Pitágoras suele presentarse de forma recurrente como una fórmula para calcular un lado de un triángulo rectángulo a partir de la medida de sus otros dos lados, generalmente recurriendo a la expresión $c^2 = a^2 + b^2$. Formulamos que esta forma de presentar este objeto geométrico es anti intuitiva para los estudiantes, es decir, carece de relaciones entre la comparación de las áreas que se producen en los cuadrados cuyos lados son los lados de un triángulo rectángulo y la medida de los lados de un triángulo rectángulo.

Proponemos un diseño, en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2006), con el que pretendemos que los estudiantes reconozcan las relaciones geométricas entre las áreas de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo, a partir de una construcción en la que se produce una relación, que hemos llamado "teorema de las diagonales", entre los cuadrados cuyas diagonales son los lados de un triángulo rectángulo.

Santos, J. y Acosta, M. (2022). Diseño para la construcción del teorema de Pitágoras, a partir del "teorema de las diagonales". En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 195-202. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Este diseño permitirá a los estudiantes trabajar en una *situación adidáctica*[1] en la que interactúan con un *milieu*[2] material, para construir la relación que se produce entre las áreas de los cuadrados cuyos lados son los lados de un triángulo rectángulo y las de los cuadrados cuyas diagonales son los lados de un triángulo rectángulo. Así, los estudiantes no tienen solo como objetivo producir una fórmula del *saber*, sino producir un *saber*[3] que puede ser aplicado no solo para solucionar problemas de medidas de lados de un triángulo rectángulo.

Diseño

Proponemos el diseño para estudiantes entre los 10 y los 12 años. Se basa en la imbricación del *milieu* con el *software* de geometría dinámica (DGPad-Colombia)[4], propuesta por Acosta et al. (2010), que permitirá a los estudiantes interactuar con el *software* y con otros estudiantes y el profesor, para aprender por adaptación y por aculturación en dos momentos de trabajo:

Momentos de trabajo adidáctico: momentos en los que una pareja de estudiantes soluciona las tareas propuestas por el profesor en interacción con un *milieu* material.

Momentos de puesta en común: luego de los momentos de trabajo *adidáctico*, en los que se espera que se hayan construido los *conocimientos* en situación, el profesor propone puestas en común, que pueden tener distintos objetivos, pero en los que se espera que se validen colectivamente las formulaciones propuestas en la fase de trabajo *adidáctico*.

---

[1] Como lo escribí en Santos (2021, p. 3): "la Teoría de Situaciones Didácticas afirma que no es posible transmitir de manera directa el *saber* al estudiante y por lo tanto es necesaria una estrategia indirecta para la transmisión del *saber*. Esta estrategia indirecta consiste en crear las condiciones de un aprendizaje por adaptación, a través de lo que se llama una situación adidáctica".

[2] El *milieu* en la TSD, citando las palabras de Artigue et al. (2014), es el sistema con el que los estudiantes interactúan en una situación adidáctica. Puede ser material (fichas de colores, cajas de cartón, software de geometría) o intelectual (problemas, tareas, situaciones, los sujetos mismos).

[3] Debido a la extensión del documento, hemos omitido mencionar descripciones sobre elementos teóricos propios de la TSD. El lector debe ser cuidadoso en las distinciones entre saber y conocimiento que se hacen en este artículo.

[4] https://dgpad-colombia.udistrital.edu.co/

El objetivo en este diseño es entonces diseñar ese *milieu* que les permita a los estudiantes interactuar para aprender, pero que también le permita al profesor proponer reflexiones con el grupo de estudiantes en espacios de puesta en común (Santos, 2016), mencionados por Margolinas et al. (2011) como fases de balance.

Fase 1 del diseño

Objetivo de aprendizaje

El objetivo de esta fase[5] es construir el siguiente *saber*: si un triángulo ABC es rectángulo, entonces los cuadrados cuyas diagonales son los catetos de ABC quedan siempre unidos por un lado.

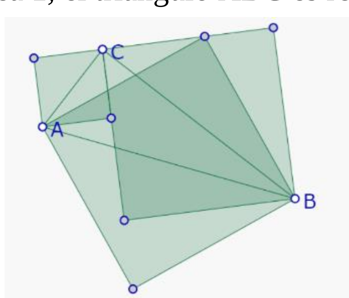
Descripción del *milieu*

Se comparte inicialmente con los estudiantes una hoja dinámica en blanco, pero los estudiantes pueden acceder a una macro (herramienta que permite la construcción directa de una figura) prediseñada que les permitirá construir un cuadrado cuya diagonal es un segmento cualquiera.

Tareas

En esta fase se proponen dos tareas: 1) se les pide a los estudiantes construir un triángulo ABC cualquiera (con la herramienta segmento) y construir los cuadrados que tienen como diagonales los lados del triángulo (usando la macro); luego se pide acomodar el triángulo para que dos de los cuadrados queden unidos por un lado; 2) se les pide a los estudiantes construir un triángulo ABC que garantice que dos cuadrados queden siempre unidos por un lado (véase Figura 1).

Figura 1: solución de la tarea 1, el triángulo ABC es rectángulo



[5] Cada fase se describe con mayor grado de profundidad en el marco de una Ingeniería Didáctica sobre este diseño. Puede enviar un correo a la dirección del autor para conocerla.

Breve análisis *a priori*

La tarea 1 debe posibilitar a los estudiantes el reconocimiento de una conjetura de forma perceptiva, el triángulo ABC debe ser rectángulo, por esto es importante que los estudiantes reconozcan varias posiciones para el triángulo ABC en las que dos cuadrados quedan unidos por un lado. La tarea 2 requiere el paso de una construcción blanda a una construcción exacta en la que dos cuadrados siempre están unidos por un lado. El profesor debe garantizar en un momento *adidáctico*, mediante las acciones de *devolución*, que los estudiantes produzcan la construcción exacta construyendo un triángulo rectángulo ABC, los estudiantes pueden usar una macro para producir el triángulo con esta característica. En el momento de puesta en común se debe construir el *saber* propuesto en el objetivo de aprendizaje como un acuerdo colectivo, discutiendo las formulaciones personales de los estudiantes.

Fase 2 del diseño

Objetivo de aprendizaje

El objetivo de esta fase es construir colectivamente el siguiente *saber*: Si un triángulo es rectángulo, entonces la suma de los cuadrados cuyas diagonales son los catetos es igual al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa (teorema de las diagonales).

Descripción del *milieu*

Figura 2: construcción fase 2

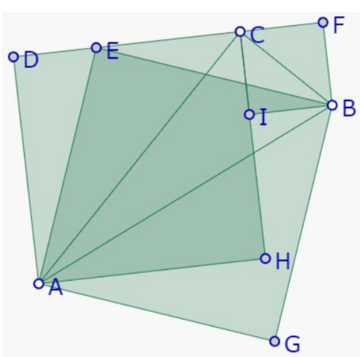
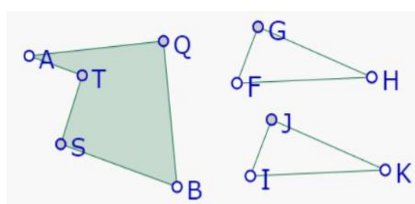


Figura 3: piezas para la tarea auxiliar fase 2



Se comparte con los estudiantes una hoja dinámica con la construcción producida en la tarea 1 que tiene nombres para cada punto (véase Figura 2). Este archivo tendrá dos macros prediseñadas: una que permitirá construir un cuadrado cuya diagonal es un segmento cualquiera y otra que permitirá copiar un triángulo.

Tareas

En esta fase se proponen cinco tareas, una de ellas es auxiliar: 1) Se pide responder por qué hay una zona oscura. 2) Se pide describir la zona clara. 3) Se pide responder la pregunta ¿qué es más grande la "L" (formada por los cuadrados cuyas diagonales son los catetos del triángulo rectángulo ABC) o el cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC? 3.1). Tarea auxiliar: usando el macro copiar triangulo, construir dos copias de uno de los triángulos que forman la zona clara (JKI,GFH); utilizar la herramienta polígono para construir el polígono ATSBQ (puede haber confusiones entre esta herramienta y el macro de polígonos, el profesor puede explicitar el uso de esta herramienta); ocultar todo menos el polígono ATSBQ los triángulos JKI, GFH (véase Figura 3); con esas tres piezas formar el cuadrado grande, cuya diagonal es la hipotenusa AB y con esas mismas tres piezas formar la "L". 4) Se pide responder la pregunta ¿Cuál es la relación entre los tres cuadrados de la construcción?

Breve análisis *a priori*

Se espera que los estudiantes resuelvan en un momento de trabajo *adidáctico* las tareas 1 y 2: hay una zona oscura porque el cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa del triángulo ABC se superpone a los cuadrados cuyas diagonales son los catetos del triángulo ABC; la zona clara está compuesta por 4 triángulos rectángulos iguales (se espera que los estudiantes puedan verificar experimentalmente que los triángulos son iguales y deductivamente que son rectángulos). Es importante que el profesor, en un momento de puesta en común, produzca un texto general sobre la zona clara y la zona oscura a partir de las formulaciones de los estudiantes.

No se espera que los estudiantes resuelvan en un momento de trabajo *adidáctico* la tarea 3: la "L" es igual al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa del triángulo ABC. El profesor puede sugerir la tarea auxiliar en la que se pretende manipular las piezas (los dos triángulos y el polígono) que forman la "L" y el cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa del triángulo ABC. Esta manipulación entre armar una figura o la otra puede hacerse tantas veces como el profesor lo considere necesario. Es importante que el profesor, en un momento de puesta en común, produzca un texto general sobre la igualdad de la "L" con el cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa a partir de las formulaciones de los estudiantes.

Con la tarea 4 se espera que los estudiantes reconozcan que los cuadrados cuyas diagonales son los catetos del triángulo ABC son iguales al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa del triángulo ABC; para *validar* esta relación los estudiantes deben producir un razonamiento deductivo basado en la conservación de áreas: si la “L” está formada por los cuadrados cuyas diagonales son los catetos del triángulo ABC, y la “L” y el cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa del triángulo ABC son iguales porque están formados por la zona oscura y dos de los cuatro triángulos iguales de la zona clara, entonces la suma de los cuadrados cuyas diagonales son los catetos es igual al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa. El profesor debe precisar que ABC no era cualquier triángulo, ABC es un triángulo rectángulo. En un momento de puesta en común se debe construir el *saber* propuesto en el objetivo de aprendizaje como un acuerdo colectivo, discutiendo las formulaciones personales de los estudiantes.

Fase 3 del diseño

Objetivo de aprendizaje

El objetivo de esta fase es construir colectivamente el siguiente *saber*: Si un triángulo es rectángulo entonces la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Descripción del *milieu*

Se comparte con los estudiantes una hoja dinámica en blanco, pero ellos pueden acceder a dos macros prediseñadas que les permitirá construir un cuadrado cuya diagonal es un segmento cualquiera y copiar un triángulo.

Tareas

Figura 4: reconstrucción 1

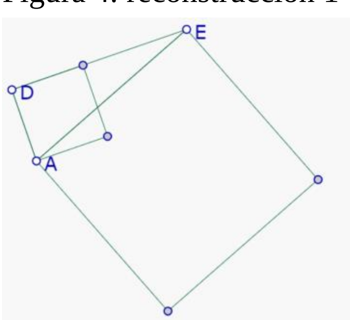
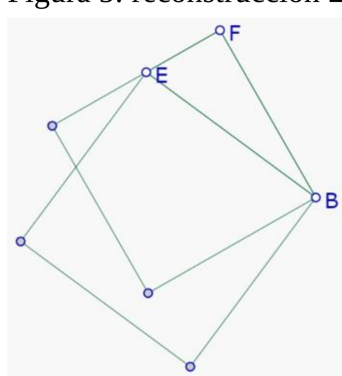


Figura 5: reconstrucción 2



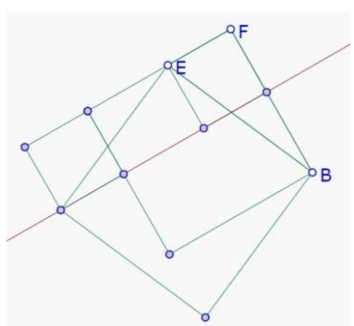
En esta fase se proponen dos tareas: 1) Se pide a los estudiantes construir un triángulo que represente el triángulo rectángulo de la zona clara ADE, luego reconstruir la figura de la fase anterior a partir del triángulo rectángulo de la zona clara que representa ADE (véase Figura 4). 2) Se pide a los estudiantes construir un triángulo que represente el triángulo rectángulo de la zona clara EFB, luego reconstruir la figura de la fase anterior a partir del triángulo rectángulo de la zona clara que representa EFB (véase Figura 5).

Breve análisis *a priori*

En esta fase las tareas se diseñan previendo que los estudiantes puedan visualizar que es posible reconstruir toda la construcción a partir de uno de los triángulos rectángulos de la zona clara, es decir, construyendo los cuadrados cuyos lados son los lados de un triángulo rectángulo de la zona clara.

Para hacerlo se requiere tomar dos posiciones diferentes de ese triángulo: cuando el triángulo representa ADE y EFB. Se prevé que los estudiantes en momento de trabajo *adidáctico* en la tarea 1, solo puedan construir dos de los tres cuadrados, el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto menor (véase Figura 4), usando la macro de construcción de cuadrados a partir de un lado; en la tarea 2, solo puedan construir dos de los tres cuadrados, el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto mayor (véase Figura 5), usando la misma herramienta; se prevé también que reconozcan que se han podido construir los tres cuadrados en las dos tareas y puedan trasladar uno de los cuadrados a la posición requerida para terminar la reconstrucción (véase Figura 6).

Figura 6: construcción fase 3



Se debe promover entonces con los estudiantes una discusión, en un momento de puesta en común, sobre el cambio que se produjo en esta reconstrucción: los cuadrados no se construyeron a partir de una diagonal. Los estudiantes deben reconocer que ya no se usan los lados del triángulo como diagonales de los cuadrados; se usan los lados de un triángulo como lados de los cuadrados, además que la relación entre los cuadrados se mantiene. Se espera que los estudiantes reconozcan esto y con mediación del profesor se reescriba la relación en términos de los lados del triángulo (el teorema de Pitágoras).

Conclusión

Nuestra intención fue producir un *milieu* que permita a profesores y estudiantes construir el teorema de Pitágoras como una relación entre áreas y no solo como una técnica para calcular lados de un triángulo rectángulo. Basados en experiencias de implementación, no reportadas aquí, reconocemos el potencial de este diseño, que puede ser implementado por otros profesores, como una oportunidad de construcción colectiva del Teorema de Pitágoras mediante un razonamiento deductivo basado en la conservación de áreas.

Referencias

Acosta, M., Blanco, L. y Gómez, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración*, *28*(2), 173-189.

Artigue, M., Haspekian, M. y Corblin-Lenfant, A. (2014). *Introduction to the theory of didactical situations (TDS)*. En A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger (eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 47-65). Cham: Springer

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*, 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, trads. y eds.). Springer Science & Business Media.

Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F.y Wozniak, F. (Eds.) (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Clermont-Ferrand 2009. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Santos, J. (2016). Una implementación para la construcción del objeto geométrico parábola, a partir del trabajo con el *software* de geometría dinámica CaRMetal. Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Santos, J. (2021). Una propuesta de uso del *software* de geometría dinámica como *milieu* para el diseño de una actividad aritmética: la división como un reparto justo. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*, 2, 1-8.

Encuentro de
GEOMETRÍA
y sus APLICACIONES
22 al 24 de junio de 2022

Pósteres

DE LA DANZA A LA GEOMETRÍA

Laura Salazar y Esteban Garzón
Estudiante y profesor del Colegio Gimnasio Vermont, Bogotá
ls2161@gimnasiovermont.edu.co, hector.garzon@gimnasiovermont.edu.co

En este documento se presenta, sin detalles, información sobre un trabajo realizado en el Colegio Vermont (Bogotá, Colombia), con el objetivo de explorar la aplicación de la geometría al movimiento del cuerpo humano; más precisamente, para indagar sobre la relación de estos. Tal exploración hizo parte de la evaluación para el bachillerato internacional del colegio.

Nuestro interés en la danza dirigió el trabajo de exploración. Indagamos sobre la geometría del cuerpo humano, específicamente dentro del ballet. Consideramos que esta aplicación de la geometría es clave como base para que todo el movimiento en el baile se ejecute de manera armónica.

La danza del ballet involucra determinados movimientos que, según el teórico Rudolf Laban, se pueden modelar con una kinesfera. El concepto de kinesfera hace referencia a una esfera imaginaria que rodea el cuerpo humano en movimiento y cuyo interior está formado por planos y figuras geométricas; permite estudiar la geometría del cuerpo humano en movimiento, además de identificar cómo la proporción áurea se relaciona con los distintos planos que quedan sugeridos dentro de la kinesfera.

Buscamos, entonces, establecer qué es y cómo se compone la figura de la kinesfera. Para ello, explicamos algunos de sus componentes mediante un análisis e interpretación geométrica que relaciona la kinesfera con el cuerpo humano, con ayuda de herramientas tecnológicas. La exploración geométrica se realizó tomando medidas del cuerpo humano –en reposo y en movimiento– y las medidas se tomaron manualmente y también con un *software*, para así validar la proporción áurea, la construcción de la kinesfera y los planos que la componen. Al explorar este tema, desde un enfoque matemático y geométrico, logramos establecer razones lógicas y argumentativas, importantes para entender este fenómeno de la vida diaria de una forma crítica y consciente.

En la exploración, en primera instancia, se estableció la proporcionalidad entre el cuerpo humano y los planos del icosaedro dentro de la kinesfera, ya que estos

Salazar, L. y Garzón, E. (2022). De la danza a la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 205-206. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

planos cumplen con propiedades y características del rectángulo de oro. Por tanto, se usó el número áureo, dado que permite estudiar aspectos de proporcionalidad. ¿Cómo se estableció la proporcionalidad? Se tomaron medidas de determinados segmentos del cuerpo (en reposo y en movimiento) de diferentes personas, se encontró evidencia de la proporción áurea y se comprobó la relación entre esta, los planos del icosaedro y la kinesfera. Los segmentos medidos se establecieron a partir de conceptos previos de la proporcionalidad en el cuerpo y según características que se intuyeron a partir de la kinesfera y los recursos estudiados (Figura 1). Este procedimiento se realizó mediante dos métodos distintos; en el primero, con una cinta métrica, se midieron las distancias desde el centro del cuerpo –establecido como referencia– hasta unos puntos específicos; después, se realizaron diferentes operaciones aritméticas –aplicando conceptos y procedimientos matemáticos– para llegar a un valor aproximado al establecido por la proporción áurea en el cuerpo humano. El segundo método recurrió a la herramienta GeoGebra (Figura 2), para medir las distancias entre determinadas partes del cuerpo, a partir de una serie de fotografías del cuerpo humano. Las medidas, en este método, se tomaron en una escala más pequeña, que permitió adaptarlas a coordenadas de puntos en el plano cartesiano. En segunda instancia, se buscó la relación entre icosaedro, proporción áurea y las medidas del cuerpo humano para construir y entender relaciones entre los planos de la kinesfera, determinando la construcción y funcionamiento de esta. Finalmente, se hizo una construcción de la kinesfera a partir de las dimensiones del cuerpo humano y de los planos de la misma.

Figura 1: esquema guía para las medidas del cuerpo humano

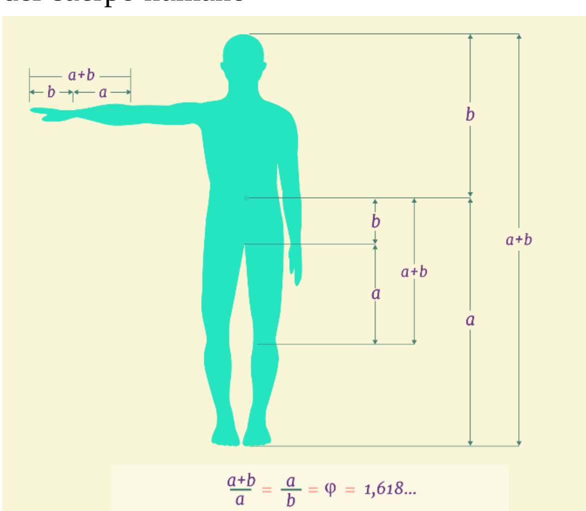
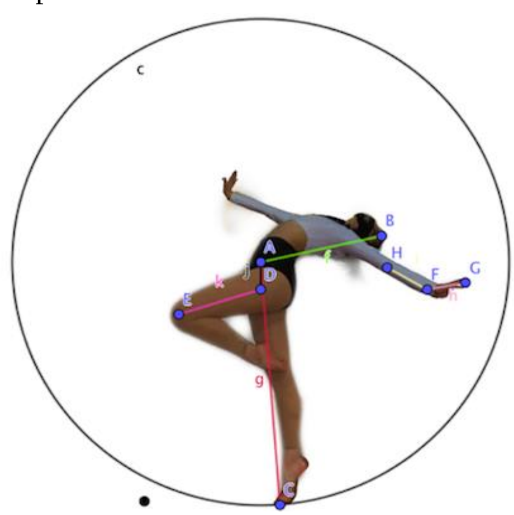


Figura 2: medidas y proporciones de un cuerpo humano en movimiento



Geometría Diferencial: la piedra de Rosetta para entender la Teoría General de la Relatividad

Carlos Trujillo
Universidad Central
ctrujillot1@ucentral.edu.co

En la Teoría General de la Relatividad, las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la presencia de materia con la curvatura del espacio-tiempo, la Geometría Diferencial define y desarrolla conceptos para estudiar las propiedades métricas del espacio, en especial los espacios que son curvos, como el descrito por Einstein en su teoría. No obstante, al ser un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales acopladas, se requiere definir unas condiciones de frontera para obtener una solución única. En este documento se estudia la métrica de Schwarzschild desde la óptica de la Geometría Diferencial, observando las condiciones que dan validez a la solución del sistema, así como los procedimientos matemáticos requeridos para el entendimiento de fenómenos como la gravedad, el movimiento de los planetas y los agujeros negros.

La métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild describe una solución de las ecuaciones de campo de Einstein [$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$], asumiendo que el espacio-tiempo se encuentra bajo la influencia de un objeto de gran masa, esféricamente simétrico, ubicado en el vacío y sin rotación. Aunque la expresión a simple vista parece sencilla, representa un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales acopladas, que matemáticamente representan un desafío, ya que supera las técnicas comunes para su resolución. En este documento se expone un análisis desde el punto de vista matemático, sin profundizar en los conceptos físicos descritos en la Teoría General de la Relatividad, para en su lugar presentar los conceptos y herramientas de la Geometría Diferencial que dan validez al trabajo realizado por Schwarzschild.

El espacio-tiempo de 4 dimensiones

Considerar la gravedad como un efecto de la curvatura causada por los objetos masivos en el espacio-tiempo es el pilar fundamental de la Teoría General de la Relatividad, y ¿qué mejor herramienta para modelar curvas, que la Geometría

Trujillo, C. (2022). Geometría Diferencial: la piedra de Rosetta para entender la Teoría General de la Relatividad. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 207-208. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Diferencial? Vale la pena mencionar que cuando Einstein concibió tales ideas, ya existía un desarrollo pleno de la Geometría Diferencial, y que, gracias al trabajo realizado por Gauss, Riemann, Ricci y otros, se dio sustento al que, hasta la fecha, es el mejor modelo del funcionamiento del universo.

Cualquier sistema con una dimensión mayor a 3 se escapa a la intuición humana, pero gracias a las matemáticas es posible describir sus características. En particular, agregar la variable temporal al espacio de 3 dimensiones, que conocemos, supone en las matemáticas la posibilidad de un sistema coordenado de 4 dimensiones; sin embargo, dadas las características del tiempo, tal posibilidad no es factible y, por eso, el espacio-tiempo se describe a través de una variedad pseudoriemanniana con signatura (1,3) lo cual se evidencia en que la distancia espacio-temporal puede ser negativa.

La solución de Schwarzschild

Bajo las premisas dadas sobre un sistema estático, esféricamente simétrico, cuyas componentes son función del radio, se puede expresar el elemento de línea como $ds^2 = -f^2(r)dt^2 + h^2(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\theta^2$. Los coeficientes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, son:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f^2(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

En el desarrollo de este documento se formulan soluciones para las funciones $f^2(r)$ y $h^2(r)$, que tienen aplicaciones como la descripción del movimiento de una partícula alrededor de un agujero negro.