# MEMORIAS

## 23 Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

junio de 2017

Organizan

Universidad Pedagógica Nacional

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Universidad Sergio Arboleda

Patricia Perry
Editora

# MEMORIAS
## Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

Patricia Perry
Editora

Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

Edición

**Patricia Perry**

Diseño de logo

**Viviana Torres**
Dirección de Comunicaciones y Mercadeo
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Diagramación de portada y portadillas

**Adrián Díaz**
Grupo Interno de Trabajo Editorial
Universidad Pedagógica Nacional

ISSN: 2346-0539



Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Calle 72 No. 11 86
Bogotá, Colombia

# Presentación

El *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* es un evento académico de carácter internacional que tradicionalmente ha organizado la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), con el apoyo de otras instituciones. El propósito ha sido convocar a matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Con el *Encuentro* se espera contribuir a: la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y docentes de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones; el fomento del estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

El 23º *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* ha sido organizado por la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad Sergio Arboleda, la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. El grupo de invitados a participar cuenta con cuatro personas de reconocida trayectoria académica a nivel internacional: Carolina Guerrero (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile), Celina Abar (Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, Brasil), Horacio Itzcovich (Universidad Pedagógica, Argentina) y Mario Eraso (Florida International University, Estados Unidos). A nivel nacional, están invitados a participar profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas: Colombia Aprendiendo, Pontificia Universidad Javeriana, Universidad Antonio Nariño, Universidad de Antioquia, Universidad de los Andes, Universidad de Nariño Universidad del Rosario, Universidad Industrial de Santander, Universidad Nacional de Colombia, Universidad de Tolima, y de las entidades organizadoras. Para esta versión del *Encuentro*, las actividades académicas se relacionan con alguna de las siguientes temáticas: geometría en la educación matemática, geometría e historia, geometría y otras ramas de la matemática, geometría y artes, geometría y tecnología, y temas de geometría.

Las ponencias sometidas a consideración del Comité Académico del *Encuentro* fueron evaluadas por pares académicos. Este libro digital, que no es una compilación de documentos sino una obra editada, incluye solo los documentos que además de haber sido aceptados por los evaluadores pasaron por un proceso adicional de evaluación y de edición académica, este último con la participación de los autores.

Comité Organizador
Bogotá, junio de 2017

# ORGANIZACIÓN DEL ENCUENTRO

## COMITÉ ORGANIZADOR

**Universidad Pedagógica Nacional**

Carmen Samper, Tania Plazas, Leonor Camargo, Camilo Sua, Claudia Vargas

**Universidad Sergio Arboleda**

Juan Carlos Avila

**Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito**

Carlos Álvarez, Alicia Guzmán

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas**

Martín Acosta

## COMITÉ DE REVISIÓN ACADÉMICA

**Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito**

Alicia Guzmán, Carlos Álvarez, Bernarda Aldana, Julián Agredo, Nora Rojas, Raúl Chaparro

**Fundación AprendEs**

Miriam Ortiz

**Universidad Católica de Cali**

Hernán Díaz

**Universidad de Campinas**

Jenny Acevedo

**Universidad de Nariño**

Óscar Soto

**Universidad del Rosario**

Rafael Méndez

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas**

Martín Acosta, Olga León

**Universidad Industrial de Santander**

Jorge Fiallo, Sandra Parada

**Universidad Nacional de Colombia**

Iván Castro, José Ramírez, Leonardo Cano

**Universidad Pedagógica Nacional**

Ingrith Álvarez, Orlando Aya, Leonor Camargo, Alberto Donado, Armando Echeverry, William Jiménez, Óscar Molina, Lyda Mora, Patricia Perry, Tania Plazas, Carmen Samper, Benjamín Sarmiento, Nubia Soler, Camilo Sua, Claudia Vargas

**Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia**

Clara Rojas

**Universidad Sergio Arboleda**

Juan Carlos Avila

**Universidad del Valle**

Luis Carlos Arboleda

## ENTIDAD DE APOYO ADMINISTRATIVO

Invoga Eventos

## ENTIDADES AUSPICIADORAS

Belpapel Ltda., Grupo Editorial Norma, ICETEX, Magisterio Editorial, NISSAN, Secretaría de Educación del Distrito, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Universidad de Medellín

# Tabla de contenido

## Conferencias de invitados



## Cursillos de invitados



## Conferencias

## CURSILLOS



## COMUNICACIONES BREVES

## PÓSTER

# Conferencias de invitados

# ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO DE LAS MEMORIAS DEL ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES ENTRE 2002 Y 2015

**Paola Castro y Pedro Gómez**
*Universidad de los Andes*
dp.castro116@uniandes.edu.co, argeifontes@gmail.com

Exponemos avances de un análisis bibliométrico de las memorias de las versiones XIII a XXII del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, realizadas entre 2002 y 2015, con el propósito de caracterizar parcialmente la producción científica de esta comunidad. Nos basamos en una taxonomía de términos clave específica para la Educación Matemática. Las variables establecidas para el estudio son cuatro: enfoque, nivel educativo, teoría curricular y tema. Establecemos la evolución en el tiempo de estas variables. Podemos concluir que el encuentro de geometría ha estado enfocado en trabajos de investigación y en temas asociados a enseñanza, aprendizaje y aula. La mayoría de los documentos abordan el tema de la geometría en general sin centrarse en temas específicos del campo.

La literatura de investigación destaca la importancia de conocer y caracterizar las comunidades de una disciplina. Hay necesidad de determinar los patrones de la productividad investigadora en Educación Matemática para otorgarle estatus científico (Fernández, Torralbo, Rico, Gutiérrez y Maz, 2003). Además, son pocos los estudios desarrollados sobre los medios de difusión, por lo que merecen ser investigados (Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Hidalgo-Ariza, 2011). Los estudios realizados en esta disciplina se han centrado en analizar la producción de programas de doctorado, la colaboración en artículos, revistas y algunos congresos españoles (Bracho, Torralbo, Maz-Machado y Adamuz, 2014). Consideramos relevante analizar la producción colombiana de esta disciplina en el marco del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones para tener una visión global de sus focos de interés a partir del encuentro XIII. A continuación, presentamos el marco conceptual, los objetivos, el método y los resultados de este estudio. Terminamos con algunas conclusiones.

## MARCO CONCEPTUAL

Seleccionamos el análisis de contenido (Mayring, 2015) como técnica para caracterizar las memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones.

Castro, P. y Gómez, P. (2017). Análisis bibliométrico de las memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones entre 2002 y 2015. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 3-10). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Krippendorff (1990) indica que el análisis de contenido es una técnica que permite formular, a partir ciertos datos, inferencias válidas que puedan aplicarse a su contexto (p. 28). La cuantificación de las características bibliográficas de los documentos se puede asociar al número de trabajos con términos métricos en el título, resumen y palabras clave; al número de trabajos con términos métricos en la introducción y metodología; y al número y/o porcentaje de elementos del contenido que tratan los trabajos (Verdejo, 2011, pp. 35-37). Usamos principios de la bibliometría descriptiva para realizar el análisis del contenido de las memorias del encuentro.

Para estudiar, a partir de su producción documental, una comunidad dentro de la Educación Matemática, es conveniente partir de una taxonomía de términos clave que guíe los estudios y establecer categorías que permitan caracterizarla. En este estudio, nos basamos en la taxonomía construida por Gómez y Cañadas (2013). Ellos proponen una taxonomía que está basada en un estándar para la construcción, formato y gestión de vocabularios controlados. Estos autores definen, entre otras, las categorías: enfoque, nivel educativo, matemáticas escolares y teoría curricular. El enfoque caracteriza el propósito del documento —investigación, ensayo, innovación y actividad—. El nivel educativo se centra en el tipo de formación de los sujetos a los que hace referencia el documento: educación infantil, educación primaria, educación secundaria básica, educación secundaria media, estudios de posgrado, formación profesional, título de grado universitario y todos los niveles educativos. La taxonomía propuesta por Gómez y Cañadas (2013) diferencia los términos clave que hacen referencia a la Educación Matemática de aquellos que se refieren a los contenidos matemáticos. En el primer caso, la taxonomía está basada en un marco conceptual específico a la Educación Matemática y en un enfoque curricular que busca abordar cuatro cuestiones centrales: el conocimiento que se va a enseñar, el aprendizaje, los métodos de enseñanza y la valoración de los aprendizajes realizados (por ejemplo, Rico, 1997, p. 381). A partir de esta teoría, se propone la categoría de teoría curricular que contiene términos clave asociados con: (a) sistema educativo, (b) centro educativo, (c) aula, (d) alumno, (e) profesor, (f) aprendizaje, (g) enseñanza, (h) evaluación e (i) currículo. La categoría matemáticas escolares incluye los contenidos de cálculo, estadística, geometría, medida, números, probabilidad y álgebra. En este estudio, nos centramos en el tema geometría que aborda términos clave asociados a construcciones con regla y compás, formas geométricas, geometría analítica, geometría en tres dimensiones, geometría euclídea, geometría vectorial, relaciones geométricas, teoremas, topología básica, transformaciones geométricas y trigonometría.

## OBJETIVOS

Con este estudio pretendemos caracterizar la evolución de la producción documental del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones entre los encuentros XIII y XXII en términos de los valores de las variables: enfoque, nivel educativo, teoría curricular y temas de geometría, que responden a las categorías que mencionamos en el marco conceptual.

## MÉTODO

El estudio es de tipo descriptivo. Analizamos unas fuentes de información con el propósito de caracterizarlas a partir de sus términos clave. En lo que sigue, describimos las fuentes de información y los procedimientos de este estudio.

### Fuentes de información

Caracterizamos la producción documental del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones con las memorias de los encuentros XIII a XXII, con excepción del encuentro XIX, cuyas memorias no están disponibles. En total, trabajamos con 241 documentos.

### Procedimientos

En este estudio, nos centramos en el análisis de las características bibliométricas de los documentos, a partir de la identificación de términos clave y su organización en categorías según la propuesta de Gómez y Cañadas (2013). El estudio bibliométrico y el análisis del contenido de los documentos requiere: (a) definir las variables, (b) diseñar un instrumento de codificación, (c) codificar todos los documentos, (d) resumir la codificación, (e) organizar los resultados de la codificación y (e) analizar los resultados de la codificación.

Las variables que empleamos para analizar cada documento responden a las categorías que establecimos en el marco conceptual. Así, asociamos a la variable enfoque los valores: actividad, ensayo, investigación e innovación. En la variable nivel educativo trabajamos con los valores: educación infantil, educación primaria, educación secundaria básica, educación secundaria media, estudios de posgrado, formación profesional, título de grado universitario y todos los niveles educativos. Para la teoría curricular, identificamos los valores: sistema educativo, centro educativo, aula, alumno, profesor, aprendizaje, enseñanza, evaluación y currículo. Analizamos la variable contenidos de geometría con los valores: geometría, construcciones con regla y compás, formas geométricas, geometría analítica, geometría en tres dimensiones, geometría euclídea, geometría vectorial, relaciones geométricas, teoremas, topología básica, transformaciones geométricas y trigonometría. Cabe aclarar que cada documento puede estar asociado a uno o más niveles educativos, a uno o más aspectos de la teoría curricular y a uno o más temas de geometría, pero solo puede ubicarse en un tipo de documento (enfoque). El valor geometría de la variable temas de geometría puede incluir documentos que fueron etiquetados con los otros valores de esa variable y documentos asociados a otros contenidos de geometría.

Realizamos la codificación de los datos luego de la lectura de los documentos, con el detalle necesario para asignar los valores de las variables que les corresponden. Los codificadores registraron la información bibliográfica del documento (título, resumen, autores, año) y establecieron su enfoque (actividad, ensayo, investigación o innovación) y nivel educativo. Luego, identificaron el conjunto de términos clave del documento que están relacionados con las variables teoría curricular y temas de geometría. Una vez se hizo la codificación de un documento, el revisor de las codificaciones verificó la validez y precisión de cada una de las informaciones que se registraron: verificó que los términos clave, el enfoque y nivel educativo que se asignaron al documento fueran adecuados. Adicionalmente, otro investigador verificó aleatoriamente el trabajo de los codificadores y del revisor de la codificación.

Registramos los resultados de la codificación en un sistema de bases de datos. Para analizar la producción de cada encuentro en relación con las variables del estudio, utilizamos tablas cruzadas. De esta forma, logramos establecer los porcentajes de producción en cada encuentro respecto a los valores de cada variable y la variable tiempo, expresada en el año en que se publicó la memoria de cada encuentro. En la Tabla 1, presentamos, como ejemplo, la tabla cruzada de los encuentros con la variable enfoque.

Luego de organizar los datos en las tablas cruzadas, representamos los porcentajes de publicación en gráficos de líneas con el fin de mostrar las tendencias de las publicaciones a lo largo del tiempo. Así, podemos identificar los focos de estudio en las diferentes versiones del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones en las variables del estudio.

| Año-encuentro<br>Enfoque | 2002<br>XIII | 2003<br>XIV | 2004<br>XV | 2005<br>XVI | 2006<br>XVII | 2007<br>XVIII | 2011<br>XX | 2013<br>XXI | 2015<br>XXII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Actividad | 0% | 0% | 4% | 6% | 11% | 0% | 0% | 21% | 0% |
| Ensayo | 14% | 0% | 0% | 0% | 0% | 10% | 26% | 4% | 16% |
| Innovación | 0% | 0% | 0% | 0% | 11% | 14% | 12% | 7% | 7% |
| Investigación | 86% | 100% | 96% | 94% | 78% | 76% | 62% | 68% | 77% |

Tabla 1. Tabla cruzada de encuentro y variable enfoque

## RESULTADOS

Presentamos resultados de la caracterización del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones a partir del análisis documental de las memorias, para cada una de las variables de estudio.

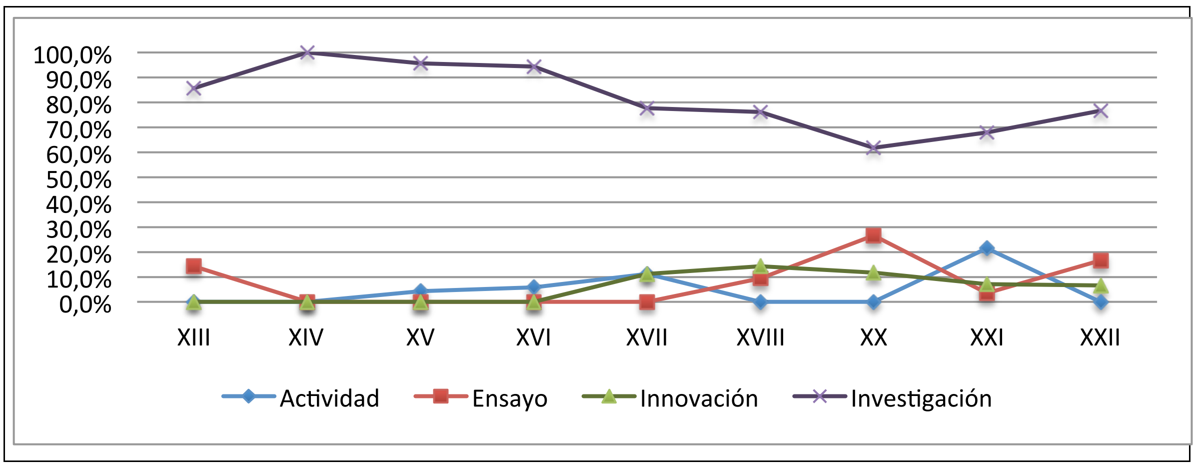



Figura 1. Producción en variable enfoque

Vemos que el encuentro de geometría ha estado enfocado en trabajos de investigación (Figura 1). En los eventos XIII a XV los porcentajes de producción estuvieron por encima del 80%. Esta tendencia, aunque sigue siendo sobresaliente, ha venido descendiendo en los últimos encuentros. La producción de documentos como ensayos —trabajos que no requieren procesos sistemáticos de justificación— y actividades de aula ha aumentado.

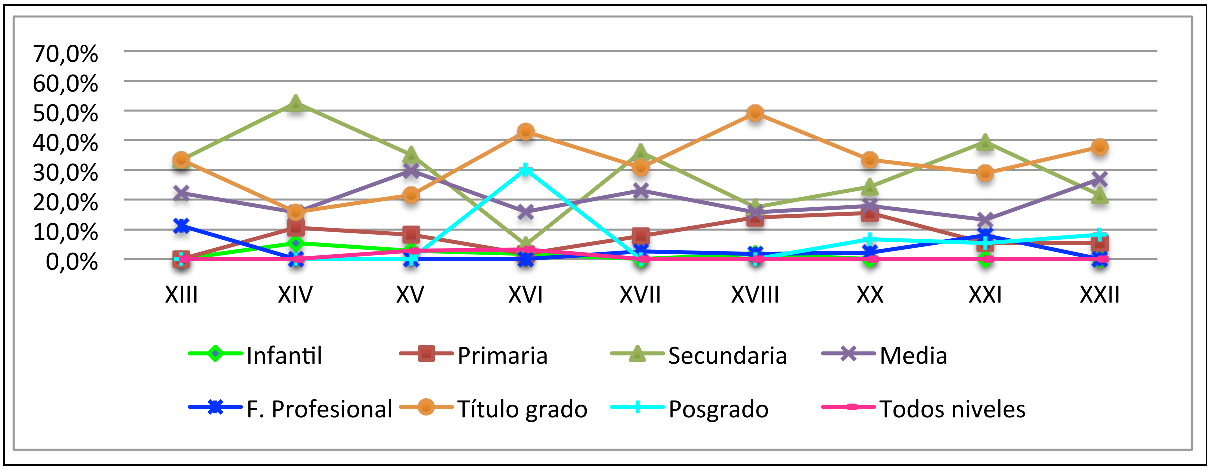



Figura 2. Producción en variable nivel educativo

En la Figura 2, vemos el comportamiento de la producción del encuentro de geometría en relación con los niveles educativos. Las memorias del encuentro están dirigidas en mayor medida a trabajos de título de grado y educación secundaria. En el encuentro XIV la producción en secundaria tuvo un porcentaje superior al 50%. Identificamos una relación inversa entre la producción de primaria y secundaria a partir del encuentro XVIII.

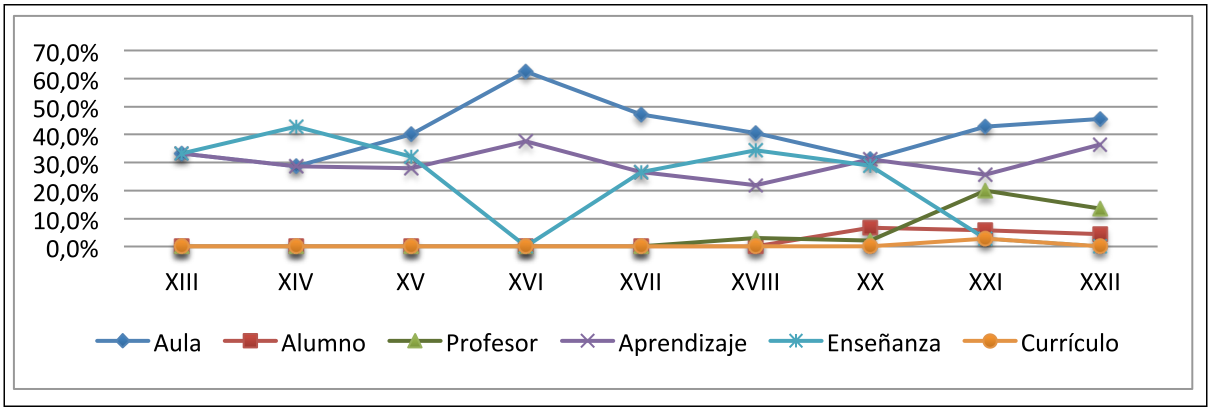



Figura 3. Producción en variable teoría curricular

En los encuentros de geometría no se han abordado cuestiones de sistema educativo y centro educativo. Se han enfocado en temas asociados a enseñanza, aprendizaje y aula. La producción relacionada con enseñanza, que en promedio fue del 28% hasta el encuentro XX, ha tenido un descenso considerable en los últimos encuentros. Como se observa en la Figura 3, la producción asociada a aula está por encima de los otros valores de la variable teoría curricular. A partir del encuento XVII, la documentación relacionada con profesor viene en ascenso. Los temas alumno y currículo han tenido un nivel bajo de producción.

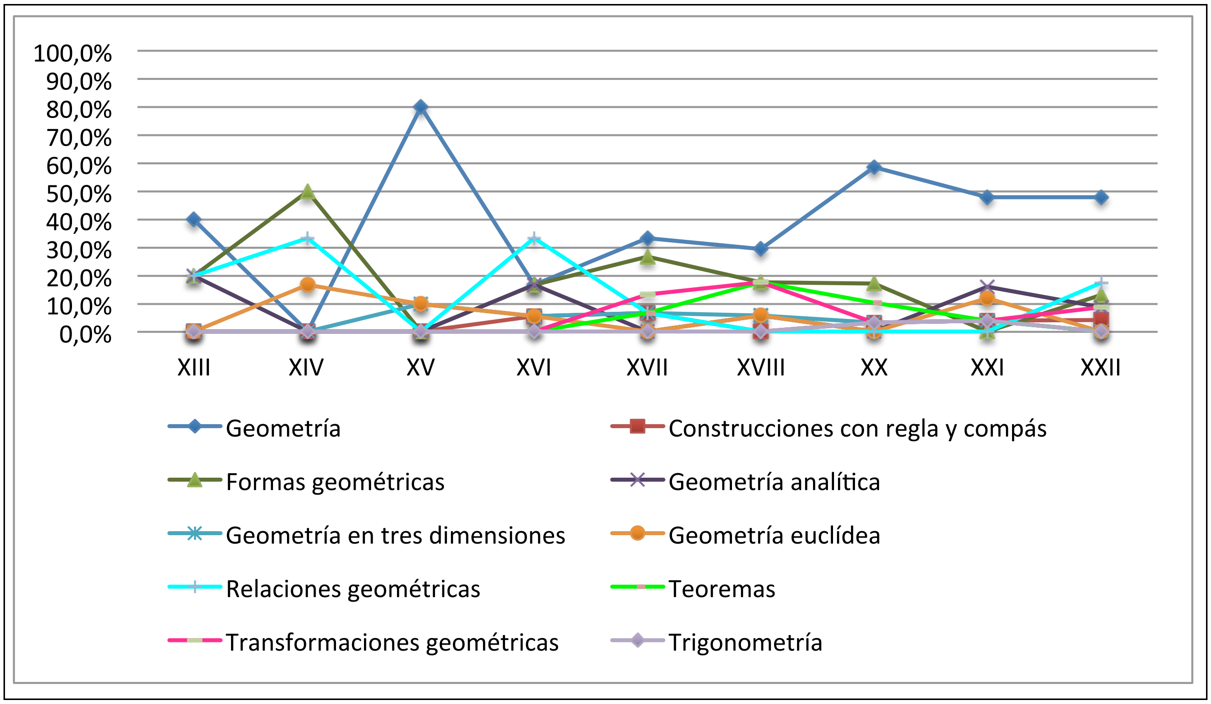



Figura 4. Producción en variable teoría curricular

Por último, presentamos la evolución del encuentro de geometría a partir del análisis de sus memorias en relación con la variable temas de geometría (Figura 4). Desde el encuentro XV, el valor geometría ha tenido el mayor porcentaje de producción. Vemos que el tema formas geométricas, que venía teniendo un nivel sobresaliente de publicaciones, tuvo descensos considerables en los encuentros XV y XXI. En los encuentros XIII y XIV hubo una producción importante de trabajos en relaciones geométricas y disminuyó entre los encuentros XV y XXI (0% en los encuentros XV, XVIII, XX y XXI); en el encuentro XXII un 17% de los trabajos estuvieron relacionados con este tema. No se percibe interés por socializar temas relacionados con trigonometría en lo que va del Encuentro de Geometría y sus aplicaciones.

## CONCLUSIONES

Consideramos que este estudio hace un aporte a la comunidad de profesores e investigadores que convergen en el Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones en relación con el comportamiento de su producción bibliográfica. A partir de las variables que empleamos y sus valores, podemos identificar cuáles han sido los focos de interés en las diferentes versiones del evento y analizar su evolución. Los resultados de este trabajo proporcionan información sobre los niveles educativos, los elementos de la teoría curricular y los temas de geometría que podrían abordarse con mayor profundidad en futuros encuentros.

## AGRADECIMIENTOS

Este estudio se realizó con el apoyo del Fondo Francisco José de Caldas (Colciencias), en el marco del programa de investigación 54242, correspondiente a la convocatoria 731 de 2015. Agradecemos a Patricia Perry, editora de este volumen, por sus comentarios y correcciones a una versión previa del documento.

## REFERENCIAS

Bracho, R., Torralbo, M., Maz-Machado, A. y Adamuz, N. (2014). Tendencias temáticas de la investigación en educación matemática en España. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1077-1094.

Fernández, A., Torralbo, M., Rico, L., Gutiérrez, P. y Maz, A. (2003). Análisis cienciométrico de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática (1976-1998). *Revista española de Documentación Científica, 26*(2), 162-176.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2013). Development of a taxonomy for key terms in mathematics education and its use in a digital repository. *Library Philosophy and Practice (e-journal)*.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. España: Paidós.

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods* (pp. 365-380). Dordrecht, Holanda: Springer.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M.-P. y Hidalgo-Ariza, M.-D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA, 5*(4), 163-184.

Rico, L. (Ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

Verdejo, M. J. (2011). *Análisis de los estudios métricos de la información publicados en revistas españolas de documentación (2005-2009)* (Proyecto final de carrera). Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

# FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE UN MODELO PARA ANALIZAR ARGUMENTOS DE MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL

**John Durango**
*Universidad de Antioquia*
john.durango@udea.edu.co

Este artículo presenta ideas que fundamentan un modelo teórico integral en Educación Matemática que permite a investigadores analizar argumentos de maestros que están en formación. Este modelo parte de la propuesta de Toulmin para integrar cualidades lógicas, retóricas y dialécticas. Específicamente, la argumentación se define en términos de acciones comunicativas de maestros en formación cuando solicitan u ofrecen argumentos a participantes de auditorios conformados por colegas o por estudiantes de escuela, mediante preguntas y respuestas cuya intención es validar, justificar, refutar, defender, explicar o persuadir puntos de vista o conocimientos sobre el aprendizaje o la enseñanza de la geometría.

## INTRODUCCIÓN

El Modelo Teórico Integral de la Argumentación (MTIA) en Educación Matemática y su fundamentación teórica, en la que se enfoca este artículo, se documentaron en la investigación doctoral titulada: "Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso" (Durango, 2017). Fue objetivo específico de la investigación proponer un modelo teórico integral para analizar e interpretar la argumentación de maestros en la práctica pedagógica de su formación inicial. Para lograrlo, se realizó inicialmente una revisión de estudios investigativos relacionados con la argumentación en Educación Matemática, bajo tres categorías: formación inicial de maestros, formación de escolares, y epistemología y lógica de la argumentación. En tal revisión se encuentra, en primer lugar, que no existen estudios investigativos que traten teóricamente la argumentación de una manera integral; es decir, que la consideren no solo a partir de cualidades lógicas sino también a partir de cualidades retóricas y dialécticas; y, en segundo lugar, que en diversos estudios, la argumentación se analiza o se define a partir del Modelo Argumentativo de Toulmin (MAT) considerando cualidades lógicas, pero no cualidades retóricas ni dialécticas.

Durango, J. (2017). Fundamentos teóricos de un modelo para analizar argumentos de maestros en formación inicial. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 11-17). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En la investigación participaron tres maestros en formación inicial, quienes presentaron y discutieron algunas tareas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, en dos auditorios particulares: el seminario de práctica pedagógica y el aula de clase en la escuela. En el primer auditorio participaron, de manera secundaria, el investigador y colegas suyos; mientras que en el aula de clase participaron los tres maestros en formación, que desempeñaban su labor docente con estudiantes de Educación Básica Primaria o Secundaria.

El MTIA se construyó de manera emergente mediante una relación entre teoría y práctica; es decir, por un lado, la revisión de estudios permitió incluir, *a priori*, algunos elementos teóricos tales como recursos retóricos e intenciones argumentativas cuando se aprende o enseña geometría. Por otro lado, el análisis de los datos investigativos recolectados en el trabajo de campo permitió identificar, *a posteriori*, cualidades lógicas, retóricas y dialécticas mediante la estrategia de interpretación de ejemplos individuales (Stake, 1998), y luego estos ejemplos se fueron agrupando mediante la estrategia de suma categórica (Stake, 1998).

Finalmente, el MTIA está compuesto por: (i) cualidades dialécticas que incluyen argumentos dialógicos y monológicos e indicadores de argumentación; (ii) cualidades retóricas que incluyen recursos como el ejemplo, la ilustración, el modelo y la metáfora; y (iii) cualidades lógicas que incluyen los componentes argumentativos. Además, el modelo reconoce seis intenciones para los argumentos: validar, justificar, refutar, defender, explicar o persuadir.

Dado que la construcción del MTIA se logra como complementación del MAT, y en este documento se pretende presentar la fundamentación teórica del modelo construido, a continuación, se exponen: los componentes lógicos de un argumento, según Toulmin, y algunas críticas y complementos al MAT que le aportan cualidades retóricas y dialécticas al MTIA.

## MODELO ARGUMENTATIVO DE TOULMIN

Para estudiar la estructura lógica de un argumento según Toulmin (2007) se deben comprender sus componentes: datos, conclusión, garantía, soporte, cualificador(es) modal(es) y refutador(es). El MAT propone los *datos* como puntos de vista o conocimientos que se consideran punto de partida de la argumentación. La *conclusión*, la propone como afirmación o punto de vista que defiende quien argumenta. La *garantía* justifica la conexión entre los datos y la conclusión. El *soporte* apoya la garantía a través de la evidencia. El *cualificador modal* especifica el grado de certeza de la conclusión, y el *refutador*, lo propone como una excepción a o un desacuerdo con la conclusión frente a un punto de vista o conocimiento.

## Críticas y complementos al MAT

El MAT critica la clásica argumentación deductiva y ofrece como alternativa la propuesta de argumentación sustantiva, en la cual no solo se destacan datos y conclusión, sino también garantías, soportes, cualificadores modales y refutadores. Así, Toulmin se distancia de la argumentación deductiva, y propone una estructura de los argumentos en la que los puntos de vista o el conocimiento, los cualificadores modales y la refutación hacen parte de la validez, y no está solo ceñida a reglas *a priori* de inferencia lógica y a esquemas de silogismos.

En la teoría sobre la argumentación pueden encontrarse estudios que formulan críticas a la propuesta del MAT, pero coinciden en mantenerla como base para lograr una teoría más extensa. Estas críticas afirman que la propuesta de Toulmin limita el análisis de los argumentos a sus componentes; por ejemplo, que no considera cualidades retóricas (van Eemeren, Grootendorst y Henkemans, 2006) o que no incluye cualidades dialécticas (Nielsen, 2011). Aunque la propuesta brinda elementos teóricos para el análisis de los refutadores, no así, para el análisis de procedimientos entre los sujetos que expresan el refutador. En el mismo orden de ideas, es preciso decir que el análisis de cualidades dialécticas sería un requisito para el análisis estructural de los argumentos en un contexto comunicativo donde predomina el diálogo (Simpson, 2015; Nielsen, 2011).

En la construcción del MTIA se han tenido en cuenta las tres justificaciones desarrolladas a favor de las críticas hechas al MAT. Veámoslas.

Una primera justificación refiere a la complementación teórica del MAT con cualidades retóricas para la distinción entre argumentación y demostración que establecen algunos autores (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006). La distinción, que no es declarada por Toulmin de forma expresa, radica en lograr la persuasión o el convencimiento de un sujeto mediante enunciados dirigidos a un auditorio.

El MAT permite analizar la argumentación mediante sus cualidades estructurales analítico-sustantivas (Simpson, 2015). Sin embargo, al enfatizar el análisis de los cualificadores modales se encuentra que estos pueden relacionarse con cualidades retóricas (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006), aunque estas no sean suficientes para un análisis integral.

Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) afirman que cuando se argumenta eficazmente un enunciado se aumenta la "intensidad de adhesión de manera que desencadene en los oyentes la acción prevista (acción positiva o abstención), o, al menos, que cree, en ellos, una predisposición, que se manifestará en el momento oportuno" (p. 91); mientras que cuando se demuestra una proposición "basta con indicar qué procedimientos permiten que esta proposición sea la última expresión de una serie deductiva cuyos primeros elementos los proporciona quien ha construido el sistema axio-mático" (p. 48). Esta intensidad de adhesión de un auditorio se logra mediante el refinamiento de los cualificadores para lograr fuerza en los argumentos.

No obstante, en el MTIA, para erigir diferencias entre *persuadir y convencer* se recurre a Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) cuando afirman: "Nos proponemos llamar *persuasiva* a la argumentación que sólo pretende servir para un auditorio particular, y nominar *convincente* a la que se supone que obtiene la adhesión de todo ente de razón." (p. 67); es decir, un auditorio universal. Asimismo, los auditorios que se consideran corresponden con el del seminario de práctica pedagógica y el del aula de clase, ambos *auditorios naturales y particulares*.

Una segunda justificación, que fundamenta la complementación teórica del MAT con otras cualidades retóricas, refiere a la teoría de Anscombre y Ducrot citados por Herrero (2006); al respecto, afirma que no solo interesa estudiar los enunciados en sí mismos sino "el valor que un enunciado asume mediante el encadenamiento argumentativo con otro enunciado en el discurso" (pp. 71-72). Esta propuesta de Anscombre y Ducrot aporta al MAT porque este desatiende el análisis de conectores y unidades de enlace que se usan entre argumentos. De forma concreta, *los indicadores de argumentación* se consideran como cualidades retóricas vinculadas con la persuasión y el convencimiento en el diálogo.

En la fundamentación teórica del MTIA, el análisis no se ciñe solo al uso de conectores ni a la pertinencia de enunciados y proposiciones. Se usan también algunos recursos retóricos, tales como *el ejemplo, la ilustración, el modelo y la metáfora* (Perelman, 1997). Al ofrecer o solicitar *ejemplos* se fundamenta una regla y se supone

> la existencia de algunas regularidades de las que los ejemplos darán una concreción. Lo que podrá ser discutido, cuando se recurre a ejemplos, es el alcance de la regla, el grado de generalización que justifica el caso particular, pero no el principio mismo de la generalización. (Perelman, 1997, p. 143)

Ofrecer o solicitar una *ilustración* en una argumentación

> tiene como función el reforzar la adhesión a una regla conocida y admitida, proporcionando casos particulares que esclarecen el enunciado general, muestran el interés de éste por la variedad de las aplicaciones posibles, aumentan su presencia en la conciencia. (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006, p. 546)

De otro lado, al argumentar a través del ofrecimiento o de la solicitud de un *modelo,*

> El caso particular en vez de servir de ejemplo o de ilustración puede presentarse como modelo para imitar; pero no es una acción cualquiera la que es digna de imitarse: se imita sólo a quienes se admira, a quienes tienen autoridad y un prestigio social, sea debido a su competencia, a sus funciones o al rango que ocupan en sociedad. (Perelman, 1997, p. 148)

Además, se argumenta mediante el ofrecimiento o la solicitud de la *metáfora* cuando hay "un acertado cambio de significación de una palabra o de una locución" (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006, p. 610).

Una tercera justificación que se plantea está relacionada con la complementación teórica de cualidades dialécticas, debido a que su inclusión en el MTIA favorece la interpretación entre protagonistas y antagonistas. Conceder cualidades dialécticas a la argumentación permite mayor riqueza en virtud de que en el MAT se consideran, de forma exigua, los refutadores como cualidades estructurales de un argumento. Sin embargo, los procedimientos de los sujetos que usan estos refutadores no son considerados en el MAT. Estas teorías que complementan la propuesta de Toulmin son consecuentes con una teoría integral de la argumentación que incluya la lógica, la retórica y la dialéctica (Bermejo, 2006).

En el MTIA, convocar finalmente la teoría de Habermas, tiene como propósito reaccionar a las críticas que algunos investigadores hacen contra la teoría de

Toulmin; es decir, la teoría de la argumentación propuesta por Habermas (1999) vincula procesos, procedimientos y productos. De igual manera, los procesos se vinculan con indicadores y recursos retóricos usados por los sujetos cuando argumentan, los procedimientos se conectan con cualidades dialécticas relativas al diálogo y la refutación, y los productos se articulan con la validez y forma interna de los argumentos.

Habermas (2002) considera que en la argumentación, la racionalidad se encamina por tres vías: una epistémica, una teleológica y una comunicativa. En el MTIA, la argumentación que usa la racionalidad epistémica busca la consecución de la verdad de proposiciones. En la segunda, la argumentación se fundamenta por intenciones; y, en la tercera, por el entendimiento entre seres humanos que se comunican. En el MTIA, los argumentos para validar se consideran con una racionalidad epistémica; los argumentos para justificar, refutar y defender, con una racionalidad teleológica y, los argumentos para explicar y persuadir, con una racionalidad comunicativa.

## EN RESUMEN

El MTIA complementa las cualidades lógicas que involucra el MAT al incluir cualidades retóricas y dialécticas como aspectos importantes de tener en cuenta cuando se analizan los argumentos de los maestros en formación. Es importante que ellos, durante su práctica docente, tanto con sus colegas como con sus estudiantes, no solo validen el conocimiento geométrico sino que justifiquen, refuten, defiendan, expliquen y persuadan a partir de conocimientos y puntos de vista.

## REFERENCIAS


Bermejo, L. (2006). *Bases filosóficas para una teoría normativa integral de la argumentación. Hacia un enfoque unificado de sus dimensiones lógica, dialéctica y retórica* (Tesis doctoral). Universidad de Murcia, Murcia, España.

Durango, J. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia - Facultad de Educación, Medellín, Colombia.

Habermas, J. (1999). *Teoría de la acción comunicativa, I. Racionalidad de la acción y racionalización social* (Manuel Jiménez Redondo, Tr.). Madrid, España: Taurus Ediciones (primera edición en alemán, 1981).

Habermas, J. (2002). *Verdad y justificación. Ensayos filosóficos* (Pere Fabra y Luis Díez, Trs.). Madrid, España: Editorial Trotta (primera edición en alemán, 1999).

Herrero, J. (2006). *Teorías de pragmática, de lingüística textual y de análisis del discurso*. La Mancha, España: Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Nielsen, J. (2011). Dialectical features of students' argumentation: A critical review of argumentation studies in science education. *Research in Science Education, 43*(1), 371-393. doi: 10.1007/s11165-011-9266-x.

Perelman, C. (1997). *El imperio retórico: retórica y argumentación* (Adolfo León Gómez Giraldo, Tr.). Santafé de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma (primera edición en francés, 1977).

Perelman, C. y Olbrechts-Tyteca, L. (2006). *Tratado de la argumentación. La nueva retórica* (Julia Sevilla Muñoz, Tr.). Madrid, España: Editorial Gredos (primera edición en francés, 1989).

Simpson, A. (2015). The anatomy of a mathematical proof: Implications for analyses with Toulmin's scheme. *Educational Studies in Mathematics, 90*(1), 1-17.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid, España: Ediciones Morata (primera edición en inglés, 1995).

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación* (María Morrás y Victoria Pineda, Trs.). Barcelona, España: Ediciones Península (primera edición en inglés, 1958).

van Eemeren, F., Grootendorst, R. y Henkemans, F. S. (2006). *Argumentación: análisis, evaluación y presentación.* Buenos Aires, Argentina: Biblos.

# Geometría de la música:
# un camino por las superficies tonales

**Andrés Villaveces**
*Universidad Nacional de Colombia*
avillavecesn@unal.edu.co

Mostraré cómo usar geometría (superficies tonales) para entender (¡y visualizar!) las progresiones de acordes en música. Primero definiré la acción de ciertos grupos de simetrías sobre superficies tonales, usando ideas de David Lewin (basadas remotamente en trabajos de Hugo Riemann en el siglo XIX), y luego expondré trabajos recientes del musicólogo Dmitri Tymoczko: algo de geometría algebraica aplicado al problema de la estructura en música. En la charla sobrevolaré la conexión entre aspectos *geométricos* de la teoría musical, desde los inicios hasta la configuración de las "superficies tonales" de Tymoczko en la parte final.

## ¿Matemática de la música?

La música es el placer que experimenta la
mente humana al contar sin darse cuenta de
que está contando.

Gottfried Leibniz

## Algunos caminos en falso

El inicio remoto de la matemática en occidente está entrelazado con el origen de la música, como es bien conocido. De alguna manera, preguntas sobre el misterio de la estructura del mundo estuvieron mezcladas con intentos de explicación de sistemas numéricos y a la vez con el inicio de la teoría musical. Aspectos puramente *físicos* del mundo (ritmos del cuerpo, respiración, vibración) se mezclan de manera peculiar desde entonces con aspectos *mentales* de nuestro acceso a este (entender razones de números –y sus limitaciones– y a la vez explicar cómo funcionan los ritmos y melodías que son la base de la música). En esta compleja red de relaciones entre el cuerpo y la mente, la música y la matemática juegan un papel peculiar. En esta conferencia exploraré algunas construcciones contemporáneas referentes al tema.

Villaveces, A. (2017). Geometría de la música: un camino por las superficies tonales. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 19-26). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Aún así, *caveat emptor*. El camino que tomaré en la charla no es el de la *física de la música*[1], sino uno puramente matemático. Vale la pena enfatizar que el tipo de matemática adecuado para la música **no** responde a preguntas del tipo:

> ¿Existe una ecuación/un modelo matemática/o que *describa* una pieza musical?
>
> ¿Existe una ecuación matemática que *prediga* la continuación, el desenlace, de una pieza musical?

Nos interesa directamente entender la estructura de piezas musicales:

> ¿Qué hace que suene bien la música? ¿Cómo podemos visualizar la música –la evolución de las voces– matemáticamente?

Para esto, hay muchos caminos posibles. Privilegiaré la línea iniciada por Riemann (¡Hugo!) en el siglo XIX, que permitió que en el siglo XX se *algebrizara* la música[2], para llegar a los trabajos más recientes en geometría (principalmente derivados del artículo en *Science* en 2008 de Callender, Quinn y Tymoczko, y luego explicados de manera mucho más detallada en términos más puramente musicales por Tymoczko en su libro *A Geometry of Music* de 2011.[3]

Así, nuestro contexto matemático será *grupos de transformaciones* y sus acciones sobre *clases de notas* y *topología de superficies* (representación de la dinámica musical).

---

[1] Aunque la física de la música es otro tema sumamente interesante, recientemente muy usado en combinación con ciencia de la computación por compositores en su trabajo, este no es el tema nuestro aquí.

[2] Las ideas de H. Riemann se decantarían mucho más adelante en las construcciones de David Lewin (1987), cuyo *Generalized Musical Intervals and Transformations* inspiraría a tantos –Lewin, entre la década de 1960 y 2003, inició el estudio sistemático de *acciones de grupos de simetría* sobre espacios tonales y logró análisis impresionantes de la estructura de muchas obras del Romanticismo tardío–.

[3] Otra línea por contrastar, que por dos razones no incluyo aquí, es la abierta por el suizo Guerino Mazzola (2002) en su famosísimo *Topos of Music*. Las dos razones son: por un lado, el enfoque de Mazzola es "geométrico" en el sentido más general de topoi –muy interesante, pero requiere mucho más tiempo–. Las construcciones de Tymoczko (2011) me parecen más concretas matemáticamente y más naturales desde el punto de vista musicológico –este último punto merecería debate prolongado y sostenido–. Por otro lado, más allá de su uso de teoría de categorías, Mazzola tiene otro aspecto muy interesante pero *adicional* a lo que me interesa exponer aquí.

## La hipótesis de Tymoczko – Otros caminos

Resumiendo mil años de historia musical, Tymoczko inicia su matematización aislando los siguientes cinco rasgos presentes en la mayoría de géneros musicales –occidentales o no, pasados y presentes–:

- movimiento melódico conjunto,
- consonancia acústica,
- consistencia armónica,
- macroarmonía limitada,
- centricidad.

Explicaré cómo se matematiza esta hipótesis y conduce a las construcciones geométricas.

### ÁLGEBRA DE LA MÚSICA – TRANSFORMACIONES

El primer paso hacia la geometría de superficies de la música está anclado en las acciones de grupos de transformaciones.

## Espacio tonal lineal

Ubicamos los tonos posibles en los reales.

El sonido se produce por pequeñas fluctuaciones en la presión del aire. Si el período es $t$, la frecuencia fundamental es $1/t \in R$. Si un músico no tiene oído absoluto, la melodía (f, g, h, . . . ) puede ser cantada en otro momento ($\alpha$f, $\alpha$g, $\alpha$h, . . . ) donde $\alpha$ es un real cercano a 1.

Usando logaritmos, y renombrando los tonos, tenemos $p = c_1 + c_2 \log_2(f/440)$.

Lo importante es que ahora la trasposición de las notas es de (p, q, r, . . . ) a (p + x, q + x, r + x, . . . ). La distancia entre tonos ahora es $|p - q|$ en lugar de f/g. Por ejemplo, si tomamos $c_1 = 69$ y $c_2 = 12$ obtenemos los tonos de las notas del teclado en los enteros: DO central es 60, LA es 69. En este contexto, las notas usuales son números enteros, pero perfectamente podemos ubicar notas en cualquier número real intermedio (Figura 1): DO4 es 60, DO#4 es 61 ... pero podemos pensar en la nota 60, 33 por ejemplo.

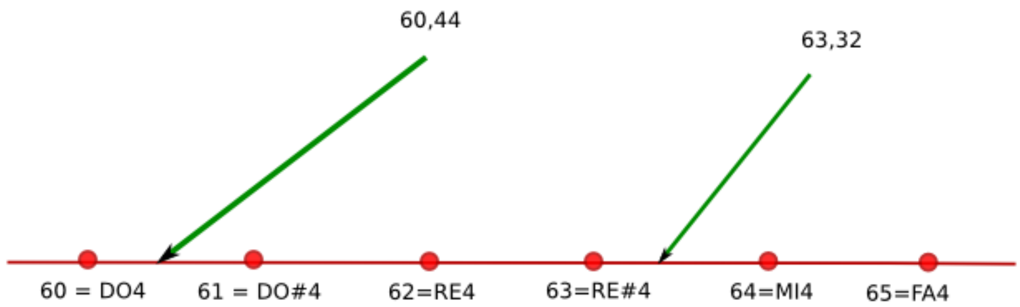



Figura 1. Espacio tonal lineal

El espacio de tonos **circular** se construye “dividiendo” el espacio de tonos lineal por la relación de equivalencia “ser equivalente mod 12” (Figura 2).

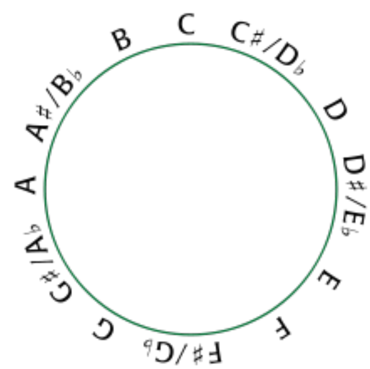



Figura 2. Espacio tonal circular (gráfica tomada de Tymoczko, 2011)

Aquí, las *trasposiciones por n* (n un entero mod 12) son las funciones $T_n$:Z/12→Z/12 dadas por x → x+n mod 12 y las *inversiones n* son las funciones $I_n$:Z/12→Z/12 dadas por x → -x+n mod 12.

Podemos representar las trasposiciones y las inversiones en espacio tonal lineal, en espacio tonal circular y en notación musical “clásica”:

## Grupos en música: T/I, PLR, dualidades estructurales

Dos grupos importantes son el PLR y T/I –ambos son isomorfos a $D_{12}$, el diedro de orden 24, pero surgen a partir de transformaciones musicales distintas[4]–.

[4] PLR surge así:

- P(0, 4, 7) = (7, 3, 0): intercambia primera y tercera nota, y cambio el tipo de acorde (de primo a invertido).

Lo importante de lo anterior es que, aun a este nivel tan elemental, la matemática revela una *dualidad* profunda entre distintas transformaciones importantes en música *–a priori*, no era obvio que trasponer e invertir acordes fuera un “hermano gemelo desconocido” de tomar relativas, paralelas y cambios de dominantes en música–. David Lewin explota esta dualidad; en la conferencia exploramos un poco más este tema.

## GEOMETRÍA DE LA MÚSICA – SUPERFICIES TONALES

Este es el objetivo primordial de la charla. Aquí construimos las superficies tonales, siguiendo principalmente a Tymoczko.

### Grupos neo-riemannianos y su acción sobre toros

La siguiente sucesión de acordes ocurre en la IX sinfonía de Beethoven:

> DO, la, FA, re, SI♭, sol, MI♭, do, LA♭, fa, RE♭, si♭, SOL♭, mi♭, SI, sol♯, MI, do♯, LA

Toda la secuencia se puede obtener mediante aplicaciones de las transformaciones L y R del grupo PLR. Douthett y Steinbach (1998) encuentran patrones (Figura 3) como este camino en un toro, dados por los acordes de la Novena Sinfonía de Beethoven (de hecho, Beethoven rompe la simetría dejando solo 19 de los 24 acordes *–la matemática nos permite examinar rupturas de simetría en distintos compositores–*):

---

- L es como P, pero intercambiando segunda y tercera nota: L(0, 4, 7) = (11, 7, 4).
- R es como P, pero intercambiando primera y segunda nota: R(0, 4, 7) = (4, 0, 9).

El grupo T/I es simplemente el generado por trasposiciones e inversiones.

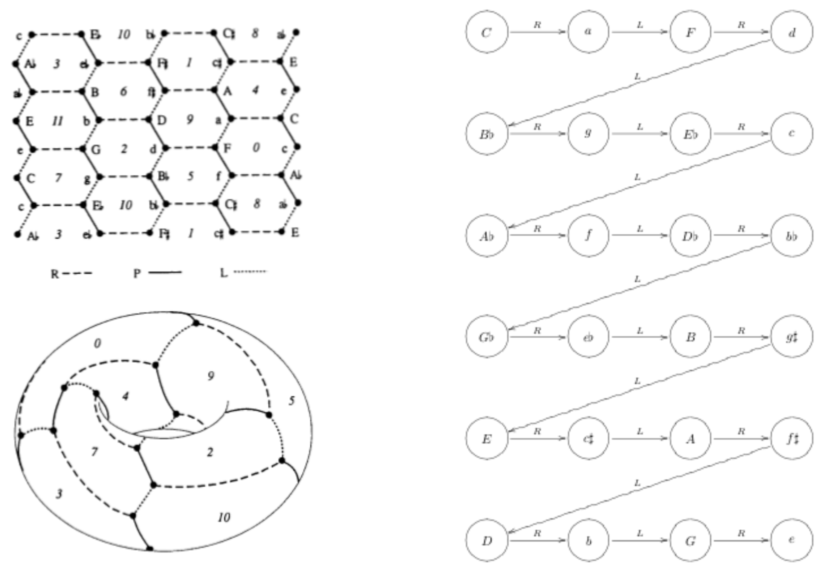



Figura 3. La sucesión de acordes, representada en un toro, y con las transformaciones de PLR (tomada de Tymoczko, 2011)

# Espacio tonal

## Espacio tonal en dimensión 2

De manera análoga a como hacemos en matemática básica al "ubicar" pares de coordenadas en el plano cartesiano, podemos armar superficies al tratar de ubicar pares de notas... y estudiar el efecto de aplicar las transformaciones que Tymoczko llama O, P, T, I, C[5] sobre estas superficies. El resultado de llevar a cabo esto de manera sistemática, en manos de Tymoczko y otros, ha llevado a:

- superficies tonales (análogas a cintas de Möbius),
- análisis de caminos dados por el movimiento "vertical" (armonía) y "horizontal" (conducción de voces, contrapunto),
- sistemas dinámicos asociados a obras musicales. Exploramos esos temas en el *software Chord Geometries*, de Tymoczko.

Las definiciones explícitas de espacios tonales (en dimensiones arbitrarias) las daremos en detalle durante la charla. También (si el tiempo alcanza) ilustraremos algunas mediante el *software ChordGeometries*.

[5] En teoría musical, dos objetos pertenecen a la misma clase (*set class*) si están relacionados por alguna de las cinco simetrías "OPTIC" (cambio de octava (O), permutación (P), trasposición (T), inversión (I), cambio de cardinal (C)).

La estructura geométrica de los espacios tonales es tipo “orbifold”. Esto responde a simetrías adicionales de los pares de notas. En principio las ubicamos en potencias de los reales (o de los complejos) –sin embargo, cabe recordar que la notación usual es discreta– en las figuras que vienen las parejas tipo (do, mi) corresponden a coordenadas discretas dentro del orbifold.

Los *caminos* dentro del orbifold corresponden a lo que los músicos llaman “progresiones” (de varios tipos). La dimensión del espacio tonal es precisamente el número de notas que van en la progresión. En el caso de dimensión dos, esto corresponde a progresiones de dos notas. Es un caso bastante restringido, pero aún así muchas cosas interesantes se pueden visualizar.

En la charla visualizaremos varios otros de estos caminos en orbifolds musicales.

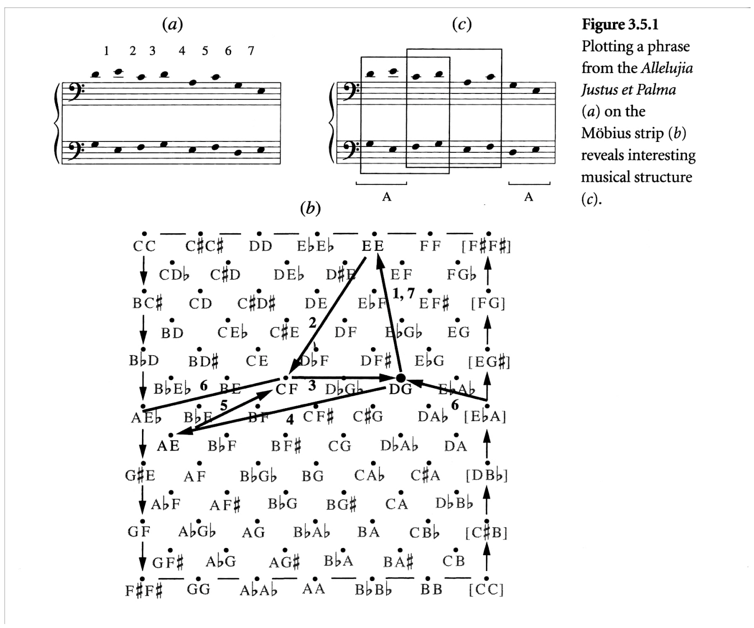



Figura 4. Camino de frase del Alleluja Justus et Palma (Tymoczko, 2011)

## Espacios tonales en dimensiones arbitrarias

En dimensiones más altas, aunque es más difícil visualizar, es posible hacer cálculos. Esta parte empieza a depender más de invariantes típicos de topología o geometría algebraica, y se aleja más y más de la visualización posible en dimensión 2. El *software* de Tymoczko permite seguir caminos tonales hasta en dimensión 3 –ya mucho más significativos musicalmente–.

Partes enormes de la historia de los últimos mil años en música se pueden comparar usando estas ideas; lo mismo sucede con temas como:

- teoría de escalas (escalas no clásicas se pueden ubicar en variantes de estos espacios y se pueden comparar, buscar simetrías, etc.)
- centralidad tonal … y muchos otros.

Más que un producto final, las ideas de Tymoczko están ahí para incluir muchos otros tipos de comparaciones –a veces visualizables, en teoría musical–. Las conclusiones que se pueden obtener son sorprendentes. Aunque en autores como Mazzola puede haber más sofisticación en herramientas matemáticas, considero que los espacios tonales son *naturales*, *accesibles* y sirven como modo de pensar la música de maneras novedosas y a la vez ancladas en una tradición interesante que nos viene del siglo XIX.

## Referencias

Douthett, J. y Steinbach, P. (1998). Parsimonious graphs: A study in parsimony, contextual transformations, and modes of limited transposition. *Journal of Music Theory*, *42*(2), 241-263.

Lewin, D. (1987). *Generalized musical intervals and transformations*. New Haven, EUA: Yale University Press.

Mazzola, G. (2002). *The topos of music: Geometric logic of concepts, theory, and performance*. Basel, Suiza: Birkhäuser Verlag.

Tymoczko D. (2011). *A geometry of music: Harmony and counterpoint in the extended common practice*. New York, EUA: Oxford University Press.

# Cursillos de invitados

# Explorando la geometría hiperbólica en el modelo de Poincaré

**Juan Carlos Avila**
*Universidad Sergio Arboleda y Grupo de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional*
juan.avila@usa.edu.co

Lobachevski desarrolló su geometría sin encontrar contradicciones lógicas y demostrando que el postulado de las paralelas de la geometría euclidiana no es consecuencia de los restantes axiomas de esta. Así, a partir de la geometría de Euclides pudo definir otra geometría en la cual el quinto postulado no tiene lugar. Esta última afirmación es precisamente la que motiva este cursillo: estudiar un modelo de geometría no euclidiana con base en la geometría euclidiana.

## Introducción

Cualquier geometría, como teoría matemática, parte de unos objetos básicos, elementales o primitivos no definidos, a saber: punto, recta y plano. El comportamiento de estos objetos se define con base en los axiomas y los teoremas que cumplen, estos últimos demostrados deductivamente. La forma y naturaleza de los objetos primitivos de cualquier geometría, en una primera instancia y desde un punto de vista formal de las matemáticas, parecieran no tener importancia; sin embargo, cuando la geometría es objeto de enseñanza y aprendizaje, los modelos intuitivos y formales relacionados con estos elementos primitivos cobran preponderancia al proporcionarle a quien los estudia una "cara" sobre la cual trabajar. Así, por ejemplo, pensar que por un punto exterior a una recta no pasa más de una paralela es una idea que, en general, puede considerarse sensata; sin embargo, la historia de las matemáticas ha mostrado que después de veinte siglos, esta idea llegaría a ser precisamente el origen de una geometría no euclidiana, la geometría imaginaria de Lobachevski (1793-1856), después denominada hiperbólica, en la cual, pensar sobre la forma de las rectas y el plano lleva a la necesidad de definir estos objetos, antes primitivos, para precisarlos dentro del modelo.

El logro fundamental de Lobachevski en su geometría fue no encontrar contradicciones lógicas y demostrar que el postulado de las paralelas no es consecuencia de los restantes axiomas de la geometría de Euclides puesto que "conjuntamente con la geometría de Euclides, en la cual dicho postulado se

Avila, J. C. (2017). Explorando la geometría hiperbólica en el modelo de Poincaré. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 29-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

acepta como verdadero, es posible otra geometría, «imaginaria», en la cual el V postulado no tiene lugar" (Efimov, 1984). Esta última afirmación es justamente la que motiva lo que se hará en este cursillo: estudiar un modelo de geometría no euclidiana con base en la geometría euclidiana. Para ello, se recurrirá a algunos conceptos relacionados con circunferencias y, particularmente, a la relación de inversión de un punto con respecto a una circunferencia, transformación que permite definir un tipo de recta en el modelo que se estudiará.

## PRELIMINARES

Como primera actividad del cursillo, se proporcionará la definición de una función[1] sobre el conjunto $\alpha - \{A\}$ donde $\alpha$ es un plano y $A$ un punto de este plano, para luego resolver un problema usando un *software* de geometría como GeoGebra:

Considérese la circunferencia $H$ con centro en $A$ y radio $a$ en un plano $\alpha$. Sea $f: \alpha - \{A\} \rightarrow \alpha - \{A\}$ una función de modo que para cada punto $P \in \alpha - \{A\}$, $f(P) = P'$ tal que:

1. $P' \in \overrightarrow{AP}$

2. $$AP' = \frac{a^2}{AP}$$

*Actividad 1*. Sin usar opciones de GeoGebra como "segmento de longitud dada" o similares, proponga una construcción con regla y compás (al modo euclidiano) de un punto $P'$ para cada punto $P$ de $\alpha - \{A\}$. Argumente su respuesta.

La idea de esta actividad es que los asistentes se den cuenta de que la condición 2 de la definición puede escribirse como $AP' \cdot AP = a^2$ o como $\frac{AP}{a} = \frac{a}{AP'}$, razón por la cual debe buscarse $P' \in \overrightarrow{AP}$ de modo que la media geométrica entre $AP$ y $AP'$ sea el radio de la circunferencia dada. Esto permite recordar, en primer lugar, la definición de media geométrica de dos números y, en segundo lugar, cómo es posible construir la media geométrica de dos números con regla y compás, y con base en ello, proponer una construcción en

[1] Puede ampliarse al respecto en Moise (1964).

la que se conoce la media geométrica de dos números pero no uno de ellos, en este caso, $AP'$. Por otra parte, al tener una construcción robusta del punto $P'$ para cada $P$, es posible definir una macro en el *software*; solo hasta este punto se mencionará que tal función se denomina *inversión* con respecto a una circunferencia y se explorarán sus propiedades.

## HACIA UN MODELO DE GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Una vez establecida la construcción de la inversión de un punto con respecto a una circunferencia $H$ y hecha la exploración de algunas de sus propiedades, se propondrá la siguiente actividad:

*Actividad 2*. Sea $\ell$ una recta en el plano $\alpha$ de modo que $A \notin \ell$, ¿cuál es la inversión de $\ell$ con respecto a $H$? Intente argumentar su respuesta.

A través de esta actividad, se espera que los asistentes descubran y argumenten que la inversión de una recta que no pasa por $A$, con respecto a $H$, es una circunferencia que pasa por $A$ y viceversa[2], esto es, la inversión de una circunferencia que pasa por $A$ con respecto a $H$ es una recta. Por otro lado, esta actividad sugiere preguntarse cuál es la inversión de otras figuras con respecto a la circunferencia $H$, por tal razón, se propondrá la siguiente actividad:

*Actividad 3*. Sea una circunferencia $C$ que no pasa por $A$, ¿cuál es la inversión de $C$ con respecto a $H$? Intente una justificación.

Como en la Actividad 2, los asistentes descubrirán que la inversión de una circunferencia que no pasa por $A$ es otra circunferencia. Aprovechando el carácter dinámico del *software* y con base en los resultados hallados, se cuestionará sobre lo siguiente:

*Actividad 4*. ¿Cuál(es) debe(n) ser la(s) característica(s) de una circunferencia $C \neq H$ de modo que su inversión con respecto a $H$ sea la misma circunferencia $C$? Intente argumentar su respuesta.

Como en la Figura 1, se espera que los asistentes descubran que si la circunferencia $C$ se interseca con $H$ en dos puntos y sus rectas tangentes en los puntos de intersección son perpendiculares, entonces la inversión de dicha

[2] Una demostración de este hecho puede consultarse en Abella (1994).

circunferencia con respecto a $H$ es ella misma. Diremos que esta circunferencia $C$ es *ortogonal* con $H$.

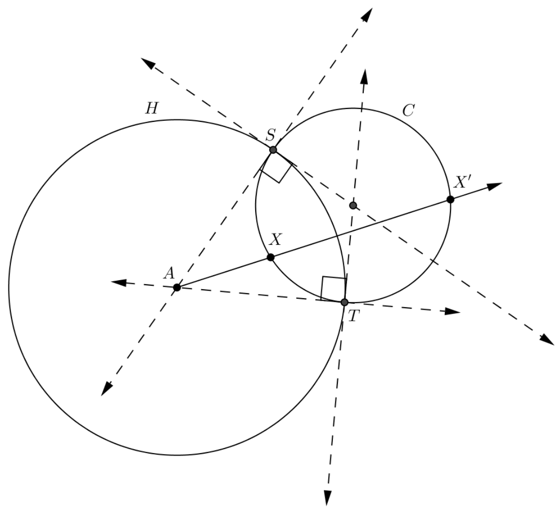



Figura 1. Inversión de una circunferencia $C$ con respecto a $H$ que es la misma $C$

Este hecho sugiere una de las primeras definiciones importantes en el modelo de geometría no euclidiana que se propondrá, ya que llevará a la definición de una recta no euclidiana. Para esto, se planteará:

*Actividad 5*. Sea $\mathbb{H}$ el interior de la circunferencia $H$. Considere $A$ y $B$ dos puntos distintos de $\mathbb{H}$, proponga cómo trazar una circunferencia ortogonal a $H$ que contenga los puntos $A$ y $B$. Intente justificar su respuesta.

La solución de este problema mostrará que la circunferencia hallada es única, hecho que se parece al *postulado de la recta*[3] de la geometría euclidiana, por tanto se introducirán las siguientes definiciones:

Definición 1: El interior de la circunferencia $H$, $\mathbb{H}$, se denomina *plano hiperbólico*.

Definición 2: Sean $P, Q \in \mathbb{H}$, si $P$ y $Q$ son colineales con el centro de $H$ (recordemos que es $A$), entonces la *L-recta*[4] $PQ$ es $\overline{PQ} - \{P, Q\}$. Por otro lado, si $P$ y $Q$ no son colineales con el centro de $H$, la *L-recta* $PQ$ es la intersección de $\mathbb{H}$ con la circunferencia ortogonal que contiene a $P$ y $Q$. El conjunto de todas las L-rectas de $\mathbb{H}$ se nota $\mathcal{L}_H$.

[3] En la geometría euclidiana el *postulado de la recta* afirma que por dos puntos distintos dados, existe una única recta que los contiene.

[4] L-recta en honor a Lobachevski.

Luego de desarrollar las actividades previas, es claro que las L-rectas antes definidas satisfacen el postulado de la recta. Así, $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ es también una geometría incidente[5] como la geometría euclidiana, solo que en este caso, no se satisface el postulado de las paralelas; para mostrar esto será necesaria la siguiente actividad:

*Actividad 6*. Desde un punto de vista visual, es decir, con las opciones que permite GeoGebra, ¿el postulado de las paralelas se cumple en $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$? Ejemplifique su respuesta.

## ASUNTOS PARA REFLEXIONAR Y DISCUTIR

En el curso Geometría no Euclidiana de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, las actividades aquí presentadas y otras más se han implementado permitiendo usar los conceptos aprendidos sobre geometría euclidiana en el curso previo y, con ello, profundizar sobre conceptos asociados a las circunferencias, ya que con base en estas se estudia el modelo de geometría hiperbólica. Por otra parte, los siguientes son algunos asuntos observados durante el desarrollo del curso:

- Los estudiantes son continuamente retados al proponerles problemas geométricos que implican: formular preguntas y soluciones, plantear hipótesis, poner a consideración soluciones a los problemas, demostrar las soluciones.

- Generalmente, en la solución de las actividades anteriores, aparece más de una propuesta correcta.

- Continuamente se ponen a prueba las capacidades de creación y argumentación de los estudiantes.

- Los estudiantes amplían sus conocimientos sobre geometría, su historia y fundamentación.

- Se potencia el hecho de que aunque la geometría es visual, los resultados que se obtienen deben ser demostrados.

[5] Una *geometría incidente* es una geometría en la que por cada par de sus puntos pasa una única recta y en el conjunto de puntos existe al menos tres puntos no colineales. Para ampliar, puede revisarse en Millman (1991).

En cuanto al modelo estudiado:

- Este permite reflexionar sobre asuntos como: ¿Cómo definir los “puntos”, los “planos”, las “rectas” en modelos de geometría euclidiana y no euclidiana? ¿Qué elementos del modelo permiten su definición? Estas preguntas se sustentan en el hecho de que desde un punto de vista sintético de la geometría, los planos, las rectas y los puntos son objetos *no definidos*.

- ¿Cuáles otros axiomas de la geometría euclidiana se satisfacen en el modelo de la geometría hiperbólica?

- ¿Por qué la distancia hiperbólica entre dos puntos se define en la forma en que se hace? ¿Cuál es la historia detrás de esta geometría?

- ¿Cómo se establece la definición de un modelo de geometría analítica de la geometría hiperbólica a partir del modelo estudiado?

- ¿Cómo las ideas dadas en el modelo permitirían definir otros modelos de geometría euclidiana y no euclidianas?

## REFERENCIAS


Abella, G. (1994). *Un recorrido por la geometría*. Santafé de Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.

Efimov, N. (1984). *Geometría superior*. Moscú, Unión Soviética: Mir.

Millman, R. y Parker, G. (1991). *Geometry. A metric approach with models*. New York, EUA: Springer.

Moise, E. (1964). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. EUA: Addison-Wesley.

# Razonamiento científico en clase de geometría

**Leonor Camargo, Patricia Perry y Carmen Samper**
*Universidad Pedagógica Nacional*
lcamargo@pedagogica.edu.co, pperryc@yahoo.com.mx, csamper@pedagogica.edu.co

Se presenta y discute una vía para desarrollar razonamiento científico en clase de geometría mediante tareas que promueven la construcción de significado de los objetos geométricos. La vía se ejemplifica con producciones de estudiantes de grado séptimo, que usaron la definición de punto medio producida en la clase, para justificar acciones y aserciones realizadas al solucionar problemas.

En el cursillo ejemplificamos una vía para promover el razonamiento científico en las clases de geometría. Es resultado de un proyecto de desarrollo e investigación adelantado por el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional en una institución educativa de Cundinamarca, Colombia. Junto con los profesores de matemáticas de la institución implementamos una unidad didáctica diseñada para propiciar razonamiento científico, apoyándonos en un software de geometría dinámica.

En la primera sesión discutimos y ejemplificamos las ideas esbozadas en el siguiente apartado, relacionadas con el diseño de secuencias de enseñanza cuyo propósito es la construcción de significado de objetos geométricos. En la segunda sesión nos centramos en la mediación semiótica del profesor, aspecto determinante de la construcción de significado por parte de los estudiantes.

## Construcción de significado y razonamiento científico

Por lo regular, los profesores caemos en la trampa de pensar que si un estudiante representa bien un objeto geométrico y repite la definición, entonces tiene un significado personal del objeto muy cercano al significado institucional pretendido. No diferenciamos el significado personal del significado institucional. El primero es subjetivo, parcial y provisional; se constituye a través de ideas que se van formando, reformando, precisando, respecto al objeto, y de los usos que se puedan hacer tanto de su definición como del objeto mismo en contextos diversos. El significado institucional es, en cambio, objetivo e integra consensos de significados que se han construido en el seno de la comunidad profesional del discurso matemático.

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2017). Razonamiento científico en clase de geometría. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 35-40). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Varios autores nos alertan sobre la complejidad de la construcción de significado y advierten que no se da a corto plazo, porque el proceso de lograr compatibilidad entre las ideas que se tienen del objeto y las de la comunidad de referencia necesariamente es gradual (Godino y Llinares, 2000; Radford, 2000; Perry, Camargo, Samper, en evaluación). En la Figura 1 vemos, como ejemplo, sendas representaciones y justificaciones de dos estudiantes de grado séptimo que habían estudiado en clase la definición de punto medio[1].

Enunciado de la tarea: $M$ es un punto del $\overline{KL}$. ¿Es $M$ el punto medio del $\overline{KL}$?

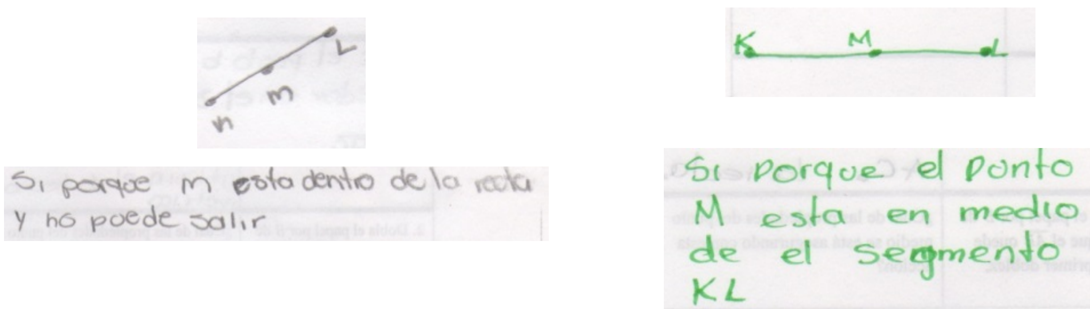



Figura 1. Producciones de dos estudiantes

A juzgar por sus representaciones gráficas, el significado personal de punto medio de ambos estudiantes es cercano al institucional. Pero las justificaciones dadas indican que ambos están lejos de una formulación deseable en lo que respecta al significado institucional. El texto de la izquierda alude a la colinealidad del punto medio con los extremos del segmento mientras que el otro alude a la interestancia. Desde nuestro punto de vista, no necesariamente "estar en medio" es equivalente a "estar en la mitad".

En busca de opciones para promover la construcción de significado en la clase de geometría, hemos puesto el énfasis en el diseño de tareas que favorezcan el desarrollo del razonamiento científico, entendido como el proceso cognitivo y social mediante el cual se aborda un fenómeno o un hecho del campo de las ciencias con miras a entenderlo, explicarlo y hacerlo parte del propio bagaje de conocimientos. De dicho proceso destacamos tres acciones que promueven la construcción de significado: la producción, a partir de evidencia obtenida por exploración empírica, de un enunciado relativo al fenómeno o hecho abordado, en el que se explicita una relación causal o de dependencia; la

[1] El punto $C$ es punto medio del $\overline{AB}$ si se verifica: (i) colinealidad de los puntos $A, B$ y $C$, (ii) interestancia de $C$ respecto a $A$ y $B$, término no definido sino interpretado desde su acepción común, y (iii) equidistancia de $C$ a $A$ y a $B$.

explicación argumentada del asunto que plantea el enunciado; y la obtención de inferencias que van más allá de la experiencia directa.

A partir de la idea de razonamiento científico y con la meta de aportar a la construcción de significado, promovemos un acercamiento que implica un proceso gradual de delimitar ideas, refinarlas, precisarlas, con la meta de construir definiciones y representaciones de objetos geométricos en la resolución de problemas. Pero la construcción de significado va más allá. Implica el uso de las definiciones en procesos de descubrimiento y justificación de propiedades y relaciones geométricas de otros objetos geométricos para ir edificando un corpus teórico. Por ello, las tareas diseñadas para promover la construcción de significado deben propender por la comprensión de las propiedades mencionadas en las definiciones, favorecer el uso de las definiciones, e impulsar el establecimiento de relaciones entre definiciones y propiedades y relaciones de otros objetos geométricos.

En el cursillo ejemplificamos las ideas anteriores con el objeto *punto medio de un segmento*. Lo escogimos para destacar que cualquier objeto geométrico, por elemental e intuitivo que parezca, puede ser aprovechado en la enseñanza para promover aprendizaje con significado.

Diseñamos una secuencia de enseñanza formada por tres bloques de actividad (B1, B2 y B3): las tareas de B1 promueven la producción de la definición de punto medio, mediante el examen de ejemplos y no ejemplos, y poniendo en juego los tres aspectos de la definición en la resolución de problemas. En las tareas de B2 se usa la definición como herramienta para conectar los pasos de una construcción con los atributos a los que alude la definición y para justificar afirmaciones. En las dos tareas de B3, la definición de punto medio es herramienta para explorar situaciones y descubrir hechos geométricos.

En la Figura 2 se muestra una de las tareas de B1. Junto con esta, las demás se proponen en el Cursillo para su resolución y discusión. También damos ejemplos de respuestas de estudiantes de grado séptimo.

En la Figura 3 incluimos una de las tareas de B2 que se discutirá en el Cursillo. Los estudiantes deben imaginar distintas representaciones y reconocer cuándo se puede responder afirmativamente la pregunta. Requiere una aplicación directa de la definición de punto medio para representar la situación pero no para responder la pregunta. Para hacerlo, se necesita un proceso de razonamiento deductivo a partir de la definición.

Examinar y explicar el comportamiento del punto rojo en 5 segmentos representados en un archivo de GeoGebra grabado previamente en la tableta o en el computador .

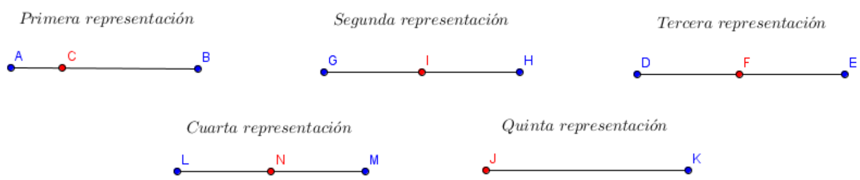



Figura 2. Ejemplo de tarea de B1

$J$ es el punto medio del $\overline{HI}$. $E$ y $F$ son dos puntos que **No** están en la $\overleftrightarrow{HI}$. $J$ también es el punto medio del $\overline{EF}$. ¿La distancia de $E$ a $J$ es igual a la distancia de $H$ a $J$?

Figura 3. Ejemplo de tareas en las que se pone en juego la definición de punto medio

Con las tareas de B1 y B2 se buscaba generar elementos teóricos para apoyar el razonamiento científico, e impulsar el desarrollo de actitudes imprescindibles para este. Es en el proceso de resolución de las dos últimas tareas de la secuencia (B3) donde se esperaba que se conjugaran procesos y conocimientos para realizar actividad matemática amplia: explorar, descubrir, formular conjeturas y proveer justificaciones teóricas. Este proceso requiere la mediación semiótica del profesor (Figura 4).

Con GeoGebra, representa cualquier $\Delta ABC$. Sea $D$ punto medio del $\overline{AB}$ y $E$ punto medio del $\overline{AC}$. Construye el $\overline{DE}$. Busca una relación especial entre $DE$ y $BC$. Describe cómo la encontraste. Escribe cuál es la relación que existe.

¿Existe un punto $F$ en $\overline{BC}$ tal que el perímetro del $\Delta DEF$ sea la mitad del perímetro del $\Delta ABC$? Justifica tu repuesta. (Para responder, recuerda la siguiente definición: El perímetro de un triángulo es la suma de las medidas de las longitudes de los lados del triángulo.)

Figura 4. Enunciados de tareas de B3

## MEDIACIÓN SEMIÓTICA DEL PROFESOR

Con *mediación semiótica del profesor* designamos las acciones interpretativas y deliberadas que realiza el profesor con el propósito de que la tarea puesta a los estudiantes contribuya a la convergencia de sus significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

En el momento de planear la enseñanza y crear o seleccionar tareas para promover la construcción de significado, el profesor no debe perder de vista que los enunciados de las tareas son parte de su mediación semiótica. Por ello, debería considerar qué efecto podrían tener en las interpretaciones que hagan los estudiantes. Y cuando ellos resuelvan la tarea, tendría que estudiar el efecto logrado y apoyarlo semióticamente al interactuar con sus estudiantes.

Nuestro interés por la mediación semiótica de los enunciados escritos de las tareas asignadas tiene su origen en nuestra convicción de la necesidad de prestar más atención, en los ámbitos educativos e investigativos, al diseño y gestión de tareas pues, como señalan algunos investigadores, diferencias menores en la formulación de los enunciados, o en la intervención del profesor pueden tener efectos significativos en el aprendizaje (Simon y Tzur, 2004; Hoyles, Noss, Vahey y Roschelle, 2013; Watson y Ohtani, 2015).

La primera tarea de B3 promueve la exploración empírica con geometría dinámica para llegar a enunciar el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*[2], que se acepta como resultado de dicha exploración, pero sin una justificación teórica, porque no se cuenta con el contenido geométrico necesario. La segunda tarea posibilita generar una conjetura y justificarla deductivamente usando el hecho geométrico descubierto anteriormente.

En el Cursillo presentamos el análisis de la mediación semiótica de una profesora (PI), cuando interactuó con un estudiante del curso, Andrew. Un apartado del diálogo, relativo al intercambio para mediar semióticamente la formulación de la relación entre las medidas $DE$ y $BC$, en el que PI busca que Andrew reconozca la generalidad de lo que descubre, es el siguiente:

> Se tomó un triángulo[3] Se tomó un triángulo y se buscó la ¿Se tomó un triángulo cualquiera o uno especial? Un triángulo… $ABC$ No hablemos del triángulo $ABC$. Se tomó un triángulo cualquiera, no tenía condiciones especiales ¿o sí? Un triángulo cualquiera… ¿y? Se buscó la relación… se ubicaron los puntos medios Ajá. Se ubicaron los puntos medios… de dos de los lados de dos de los lados. Y luego se unieron, se hizo un segmento Se construyó el segmento de extremos esos puntos medios esos puntos medios y luego se buscó… eee, las… ay, se me olvidó la palabra ¿La relación? la relación entre ese segmento y el segmento… uno de los segmentos. ¿Uno de los segmentos o uno de los lados? Uno de los lados. ¿Cualquiera de los lados? No. ¿Cuál? El de abajo… Pero,

[2] Si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados del triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

[3] El texto en azul corresponde a las intervenciones de PI y el texto en negro, a las de Andrew.

¿tiene que estar abajo o podría estar de ladito a veces? Sí, puede estar de lado. Ah, entonces, no te sirve decir debajo o de lado porque… El lado *BC*. (…) Pero si no has dicho nada de letras…

Al examinar el diálogo se reconoce que PI interviene principalmente a partir de los aportes de Andrew, y cuando este parece requerir de su ayuda. Así, ella completa información dada por él, lo parafrasea pretendiendo expresar su idea en términos más apropiados, hace preguntas para que el estudiante precise la información haciendo el cambio pertinente, pone objeciones invitando al niño a modificar lo que ha dicho. Respecto a Andrew, es posible reconocer que pudo sostener el diálogo con la profesora y, algo muy importante, hacer buena parte de su relato sin recurrir a la designación. Aún le falta poder referirse al lado del triángulo implicado en la relación descubierta, sin designarlo.

El análisis realizado a las tareas de B3 nos lleva a identificar como posible ruta para favorecer la enunciación de un hecho geométrico, una de las acciones clave en la construcción de significado, la siguiente:

> promover el descubrimiento de una relación → impulsar la toma de conciencia de la generalidad y la genericidad → estructurar el discurso de los elementos que intervienen vía la reconstrucción de un procedimiento → estructurar el discurso de los elementos que intervienen vía la explicitación del formato si-entonces (Perry, Camargo y Samper, en evaluación).

## REFERENCIAS


Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*, *12*(1), pp. 70-92.

Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P. y Roschelle, J. (2013). Cornerstone mathematics: Designing digital technology for teacher adaptation and scaling. *ZDM – International Journal on Mathematics Education, 45*(7), (1057-1070).

Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (en evaluación). *Puntos medios en un triángulo: un caso de construcción de significado y mediación semiótica*.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática* (número especial), *12*(1), pp. 51-69.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-10.

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.) (2015). *Task design in mathematics education. The 22nd ICMI study* (New ICMI study series). New York, EUA: Springer.

# Estrategias de solución de problemas de algoritmia y geometría a través de metáforas en el contexto de la máquina de Turing y los sistemas formales

**Raúl Chaparro y Juan Albornoz**
*Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito*
raul.chaparro@escuelaing.edu.co, jalbornoz09@gmail.com

En este cursillo se abre un espacio para la actividad y la reflexión sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales y estrategias de solución de problemas de algoritmia y geometría elemental, con base en metáforas y analogías que se construyen en los contextos de la máquina de Turing y de los sistemas formales.

La conceptualización tiene sentido en la medida en que sea significativa para el estudiante. El puente natural entre el mundo del estudiante y los nuevos conceptos y estrategias de solución de problemas lo tienden las analogías y metáforas que favorecen la ilustración de los temas importantes en una actividad de aprendizaje (Hofstadter y Sander, 2013) y además le permiten a la persona ser protagonista de su aprendizaje (Albornoz y Chaparro, 2005).

En este cursillo, se pretende ilustrar un enfoque de solución de problemas basado en la respectiva conexión de metáforas y analogías, y abstracción con la máquina de Turing y los sistemas formales. Este enfoque permite dar sentido al aprendizaje de conceptos y estrategias de solución de problemas en algoritmia y geometría (Albornoz y Chaparro, 2009). En cada actividad se reflexionará sobre los aspectos pedagógicos y didácticos correspondientes, y después de la puesta en común, se obtendrán las conclusiones (Lakoff y Johnson, 2005).

## Propuesta pedagógica que guía el cursillo

Con base en los resultados de pequeños experimentos pedagógicos que hemos realizado durante los últimos cinco años (Albornoz y Chaparro, 2005), creemos viable la creación de ambientes caracterizados por:

- permitir que el estudiante se aproxime gradualmente a los conceptos, los reconstruya y los interiorice (Lakoff y Johnson, 2005).

Chaparro, R. y Albornoz, J. (2017). Estrategias de solución de problemas de algoritmia y geometría a través de metáforas en el contexto de la máquina de Turing y los sistemas formales. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 41-45). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- proveer el contexto necesario para que el estudiante y el profesor se hagan preguntas (Polya, 1965) acerca de lo que estudian, expongan nuevas ideas, propongan otras problemáticas,
- favorecer la experimentación, la reflexión y la creatividad (Lakoff y Johnson, 2005).

## ACTIVIDADES DEL CURSILLO

El Cuadro 1 presenta el tema y los objetivos de los tres talleres planeados.

| | Tema del taller | Objetivo del taller |
|---|---|---|
| 1. | Metáforas para la solución de problemas ilustrados a través de la máquina de Turing | Conocer qué es una estrategia algorítmica para solucionar un problema (Schoenfeld, 1985).<br>Aprender a conectar una metáfora con la solución problemas (Laurieri, 1989).<br>Comprender la máquina de Turing y las estrategias de solución de problemas de naturaleza algorítmica (Mason, Burton y Stacey,1992). |
| 2. | Las metáforas y la modelización con sistemas formales | Estudiar y comprender:<br>los sistemas formales y la geometría,<br>los sistemas formales y el razonamiento deductivo (Mason, Burton y Stacey,1992),<br>los juegos discretos y los sistemas formales,<br>las diferencias entre un modelo visual y un modelo simbólico (Albornoz, Chaparro y Díaz, 2014).<br>Reflexionar sobre explicación vs. demostración. |
| 3. | La formalización y los invariantes | En el contexto de la solución de problemas,<br>entender qué es un invariante y para qué sirve (Schoenfeld, 1985),<br>encontrar invariantes del problema (Polya, 1965).<br>utilizar el lenguaje de la matemática para demostrar invariantes (Albornoz Chaparro y Díaz, 2014). |

Cuadro 1. Tema y objetivos de los tres talleres planeados

## ALGO SOBRE EL PRIMER TALLER

La máquina de Turing es un modelo conceptual de lo que es el computador en la actualidad. Fue propuesta en 1936 por el genial matemático inglés Alan Turing (1912-1954), uno de los "padres" de la computación, en su empeño por dar respuesta al problema de decisión (*Entscheidungsproblem*), que hacía parte de la famosa lista de grandes retos de las matemáticas planteados por D. Hilbert (1862-1943), a comienzos del siglo XX. Para desarrollar su máquina, Turing se inspiró en la manera como las personas (los computadores de aquellos días) hacían cálculos algorítmicos. En particular, notó que utilizaban papel para leer y escribir símbolos (de algún alfabeto particular) y que –de acuerdo con lo que leían en alguna parte del papel, y el estado del cómputo (llevado en la cabeza de la persona)– procedían a escribir o cambiar algunos de los símbolos, y así sucesivamente hasta que terminaban su cómputo.

La máquina de Turing consta de: una cinta de lectura y escritura, potencialmente infinita, dividida en celdas; un cabezal móvil que se posiciona en una de las celdas; un indicador del estado; y un conjunto de instrucciones o programa. La Figura 1 da una idea de la máquina, aunque la propuesta de Turing fue un objeto puramente matemático.

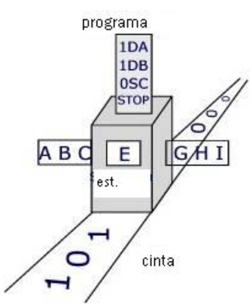



Figura 1. Dibujo conceptual de una máquina de Turing

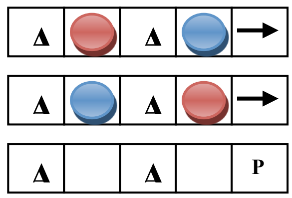
Figura 2. Modelo físico de la máquina de Turing

En el cursillo entregamos a cada participante un ejemplar de un modelo físico de la máquina, diseñado y construido por nosotros (Figura 5), para que programe con las manos, de la misma manera que con cualquier juego de fichas. Un problema para resolver con la máquina de Turing es un reto en el que se especifica una configuración inicial de la cinta y el cabezal, y la condición en que debe quedar la cinta al final. Para realizar esto hay que construir el conjunto de instrucciones correspondientes que garantice que el cabezal se mueva y la cinta cambie hasta llegar a la condición deseada.

## Ejemplo

Dado que en la cinta se tienen como entrada celdas de colores azul y rojo, hacer un programa que cambie cada azul por rojo y cada rojo por azul. Una solución es el programa conformado por las siguientes instrucciones

1)
2)
3)




*Reto 1*. En la entrada se tienen solo celdas azules. Se quiere determinar si el número de celdas es par o impar. Si es par, hay que escribir el color rojo al final a la derecha, y si es impar, el color amarillo.

*Reto 2*. Encontrar la mitad. Se tiene una cinta con una cantidad impar de celdas de color azul. Interesa encontrar la ficha de la mitad y colorearla de rojo.

*Reto 3*. La bandera colombiana. Este reto es una versión propia del famoso problema de la bandera holandesa, planteado y resuelto de manera magistral por E. W. Dijkstra (1930-2002), uno de los pioneros de la ciencia de la computación. La bandera colombiana consta de los colores amarillo, azul y rojo, en ese orden. Supóngase que como entrada se tiene una cinta con fichas de estos colores, dispuestas al azar. No se sabe cuántas fichas hay ni en qué orden están. Entonces hay que dejar la cinta final con las fichas amarillas a la izquierda, luego las rojas y al final las azules, manteniendo la cantidad original de fichas de cada color.

*Reto 4*. Triángulo de Sierpinski. Este reto es para el modelo virtual bidimensional de la máquina de Turing que hemos desarrollado. Se trata de elaborar en esta el famoso fractal de Sierpinski (1882-1969).

## ALGUNAS PREGUNTAS QUE SE PODRÍAN CONSIDERAR

- En el contexto de la máquina de Turing y los sistemas formales, ¿cómo da sentido el enfoque de metáforas y analogías, al aprendizaje de la modelización y al estudio y generalización de las soluciones a problemas?
- ¿Cuál es la importancia de la identificación de invariantes en la solución de problemas complejos?
- En el contexto de la máquina de Turing y los sistemas fórmales, ¿cuáles ventajas trae el enfoque de aprendizaje basado en metáforas y analogías a la solución de problemas en geometría e informática?

## REFERENCIAS


Albornoz, J. y Chaparro, R. (2005). The learning of fundamental concepts and problem solving strategies in informatics, through the experimentation and classroom research with physical and virtual models of the Turing machine. En *6th International Conference on Information technology based higher education and training* (pp. 100-105). doi 10.1109/ITHET.2005.1560295.

Albornoz, J. y Chaparro, R. (2009). La computación a través de los juegos discretos. *Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería*, *1*(3), 159-173.

Albornoz, J., Chaparro, R. y Díaz, M. (2014). *Un modelo para la creación de escenarios de aprendizaje en informática*. Ponencia presentada en Encuentro Internacional de Educación en Ingeniería. Disponible en: https://www.acofipapers.org/index.php/acofipapers/2013/paper/view/127

Hofstadter, D. y Sander, E. (2013). *Surfaces and essences: Analogy as the fuel and fire of thinking*. New York, EUA: Basic Books.

Lakoff, G. y Johnson, M. (2005). *Metáforas de la vida cotidiana* (José Millán y Susana Narotzky, Trs.). España: Cátedra (primera edición en inglés, 1980).

Laurière, J.-L. (1989). *Problem solving and artificial intelligence* (Jack Howlett, Tr.). New York, EUA: Prentice Hall.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente* (Mariano Martínez Pérez, Tr.). Barcelona, España: Centro de Publicaciones del MEC - Editorial Labor (primera edición en inglés, 1982).

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (Julián Zugazagoitia, Tr.). México D.F., México: Editorial Trillas (primera edición en inglés, 1945).

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, EUA: Academic Press.

# Conferencias

# POLINOMIO DE CONWAY: REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN UN SEMINARIO DE MATEMÁTICAS

**Nicol Contreras, William Jiménez, Julián Martínez, Cristián Rojas y Adriana Vega**
*Universidad Pedagógica Nacional*
njcontrerasv@upn.edu.co, wjimenez@pedagogica.edu.co, jdmartinezt@upn.edu.co, crarojasji@unal.edu.co, alvegac@upn.edu.co

La primera imagen que podemos plantearnos al hablar de nudo es: tener una cuerda, doblarla y manipularla para finalmente unir sus extremos, con la idea de no poder distinguir el punto de unión. Esta imagen tridimensional puede ser manipulada posteriormente sin necesidad de efectuar cambios. En matemáticas, un nudo se define como un subconjunto del espacio tridimensional que es homeomorfo al círculo. El objetivo de este trabajo es manipular estos objetos desde una perspectiva gráfica, abordando así el concepto de invariante y presentar el desarrollo de este proceso en el seminario de matemáticas del programa de Especialización en Educación Matemática cohorte 2016-I de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

## DE LA TEORÍA DE NUDOS

La teoría de nudos tiene fundamentos en la topología y se ha desarrollado en torno a ciertas problemáticas específicas, entre las cuales están las tres que se mencionan a continuación. En primer lugar, pasar de la representación tridimensional del nudo a otros tipos de representación (gráfica, verbal, simbólica o matricial), en segundo lugar, la clasificación de estos, y en tercer lugar el estudio de la equivalencia entre nudos.

Históricamente, la teoría de nudos tiene su auge en la teoría atómica (1860), en la cual Lord Kelvin afirmaba que los átomos se podían entender como representaciones anudadas de éter. Años más tarde, en 1885, el trabajo de Peter Tait sobre la clasificación de nudos "equivalentes" permitió establecer una lista de todos los nudos que podían ser dibujados con el menor número de cortes posible. Listado que pasó de nudos de cinco o seis cortes a nudos de diez cortes, gracias al aporte de Charles Little en 1900.

En la actualidad, la teoría de nudos se ocupa del estudio de la inmersión de un espacio topológico en otro (Juárez, 1997, en Vázquez, s.f.) y el problema fundamental de esta es establecer cuándo dos o más nudos son equivalentes,

Contreras, N., Jiménez, W., Martínez, J., Rojas, C. y Vega, A. (2017). Polinomio de Conway: representación gráfica en un seminario de matemáticas. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 49-55). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

para lo cual los topólogos han desarrollado lo que se conoce como *invariantes de nudos*.

## DE LAS INVARIANTES Y EL POLINOMIO DE CONWAY

Como se mencionó anteriormente una de las preguntas fundamentales en el desarrollo de la teoría de nudos ha sido el identificar cuándo dos nudos son equivalentes. Para responderla han surgido ciertos algoritmos conocidos como invariantes. Entre los más importantes y reconocidos está el denominado movimientos de Reidemeister[1], que consiste en reducir un nudo tanto como sea posible a partir de una secuencia finita de pasos. Otros casos de invariante son el polinomio de Alexander, el polinomio de Jones y el polinomio de Conway, el cual, a diferencia de otros, permite durante el proceso emplear los movimientos de Reidemeister, para facilitar cálculos. A continuación se realiza una breve descripción acerca del polinomio de Conway, en el cual se centra la atención de este documento.

Conway propuso asociar un polinomio como un invariante de los nudos, usando para esto la siguiente definición:

> Una terna $(L_l, L_r, L_s)$ de enlaces orientados en $\mathbb{R}^3$ se dice que es una terna de Conway si los enlaces pueden ser representados por diagramas $L_l, L_r, L_s$ los cuales coinciden por fuera de una vecindad; y dentro de la vecindad son de la siguiente forma (Figura 1). (Hernández, 2011, p. 16)

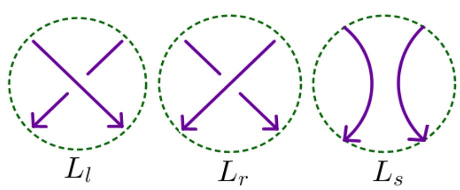



Figura 1. Terna de Conway

Para un enlace orientado $L$, el polinomio de Conway $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}$ está descrito por los siguientes axiomas:

1. $\nabla_{L_r}(z) = \nabla_{L_l}(z) + \mathrm{z}\nabla_{L_s}(z)$.
2. $\nabla_{L_l}(z) = \nabla_{L_r}(z) - \mathrm{z}\nabla_{L_s}(z)$.
3. $\nabla_O(z) = 1$ y $\nabla_{OO}(z) = \nabla_{OOO}(z) = \cdots = 0$ siendo $O$ un nudo trivial.

[1] Para ampliar, véase Contreras, Jiménez y Rojas (2017).

4. $\nabla_L(z) = a_0(L) + a_1(L)z + a_2(L)z^2 + \cdots + a_n(L)z^n$ tal que $n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Z}$.

De los axiomas se deduce que $\nabla(L_1) = \nabla(L_2)$ si $L_1$ y $L_2$ son enlaces equivalentes.

## DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA

En el marco del seminario de matemáticas de la Especialización en Educación Matemática (cohorte 2016) de la Universidad Pedagógica Nacional se realizó un trabajo centrado en la introducción a la teoría de nudos y el reconocimiento de ciertos conceptos inmersos en esta. Así pues, se trabajó en torno a algunas de las representaciones de los nudos y a partir de estas, el manejo de ciertas invariantes específicas (polinomio de Jones, de Alexander y de Conway). Así, tomando como punto de partida una representación gráfica (en dos dimensiones) de los nudos, se buscó obtener específicamente el polinomio de Conway que representara dicho nudo.

Inicialmente se pretendía pasar de un nudo en tres dimensiones (hecho en lana) a un dibujo que lo plasmara en dos dimensiones, centrando la atención en lograr representar cuándo las cuerdas que componían el nudo iban por encima o por debajo, aspecto que en dicha representación fue denominado *corte* y fue simbolizado con letras mayúsculas. Además, se trabajó con respecto al recorrido que se realizaba al graficar un nudo, partiendo de un punto de referencia y estableciendo que dicho recorrido sería en el sentido de las manecillas del reloj.

Considerando los aspectos mencionados y el objetivo de obtener el polinomio de Conway, fue necesario definir la orientación de cada uno de los cortes, teniendo en cuenta el recorrido del nudo. Dicha orientación puede clasificarse en positiva ($L_r$) y negativa ($L_l$), tal como se observa en la Figura 2.

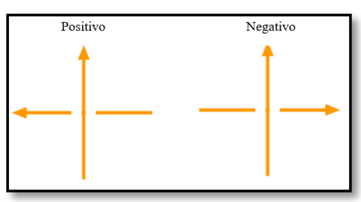



Figura 2. Clasificación de la orientación de cortes

Cabe acotar que dentro del desarrollo histórico que se le ha dedicado al estudio de este invariante, la salvedad del recorrido de la cuerda se ha hecho, al igual que la clasificación de cortes positivos y negativos; esta última cuestión se puede evidenciar en la descripción del polinomio previamente presentada.

A continuación se observa un nudo cuyo sentido de recorrido a partir del punto N, es a favor de las manecillas del reloj y la orientación de sus cortes se clasifica de acuerdo a lo establecido anteriormente (Figura 3).

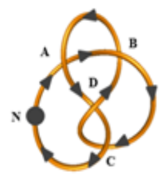
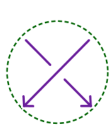
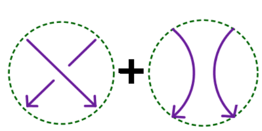
| | Cortes Positivos $L_r$ | Cortes Negativos $L_l$ |
|---|---|---|
|  | A<br>B | C<br>D |

Figura 3. Orientación de los cortes de un nudo

Teniendo en cuenta lo mencionado previamente, se sabe que las invariantes de nudos dan respuesta a una de las problemáticas que han sido centro de estudio de la teoría de nudos, la equivalencia entre estos. Para el caso específico del polinomio de Conway se debe tener en cuenta, partir del nudo original y centrar la atención en cada uno de sus cortes (uno a la vez) para aplicar reglas específicas, hasta obtener nudos triviales. Dichas reglas (axiomas) se resumen en dos aspectos: el primero, consiste en cambiar la orientación del corte, y el segundo, en modificar la orientación de este, de manera tal que en el corte que se esté centrando la atención se haga un rompimiento y unión de las cuerdas que conserve siempre el sentido del recorrido.

Es necesario mencionar que durante el trabajo realizado en el seminario, la terna de Conway se utilizó teniendo en cuenta el hecho de que se tenían cortes con orientación positiva y cortes con orientación negativa, de manera que al fijarnos en un corte puntual se relacionaban orientación y terna, y se llevaba a cabo el proceso propuesto por Conway (Figura 4).

| Orientación del corte | Enlaces que completan la terna | Proceso realizado |
|---|---|---|
| <br>Positivo | <br>$\nabla_{L_r}(z) = \nabla_{L_l}(z) + z\nabla_{L_s}(z)$ | A partir del corte inicial, se obtienen dos enlaces; el primero, al realizar un cambio de orientación de las cuerdas del corte inicial y el segundo, al realizar un rompimiento de las cuerdas que lo componen y |

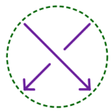
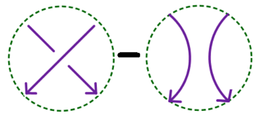
| | | |
|---|---|---|
|  Negativo |  $\nabla_{L_l}(z) = \nabla_{L_r}(z) - z\nabla_{L_s}(z)$ | unirlas nuevamente de tal forma que se mantenga el sentido de recorrido y dicha unión sea diferente a la que se tenía en el corte inicial. |

Figura 4. Aplicación de los axiomas 1 y 2 de Conway

A continuación se presenta un ejemplo en el que se determina el polinomio de Conway del nudo presentado en la Figura 3, haciendo uso de los axiomas descritos previamente (Figura 5).

*Paso 1*: el nudo de la representación (*a*) se obtiene al cambiar de orientación el corte A, y el de la representación (*b*), al realizar el rompimiento de dicho corte y unir los lazos violeta con verde y verde con azul, de forma tal que se mantenga el sentido del recorrido. El signo correspondiente es positivo (+) debido a la orientación del corte A.

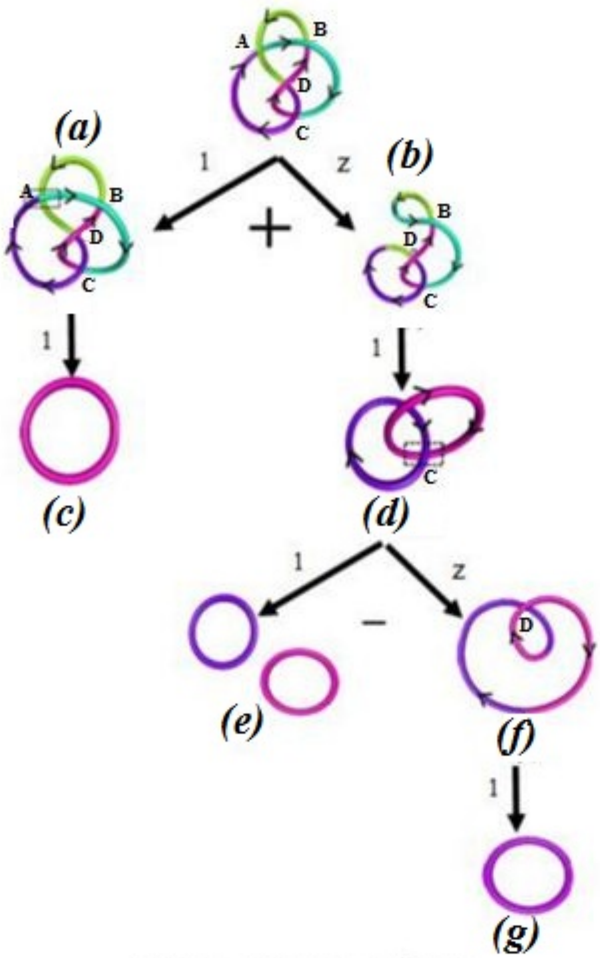
*Paso 2*: los nudos de las representaciones (*c*) y (*d*) se obtienen respectivamente con los movimientos de Reidemeister aplicados en los cortes A, B y D de la representación (*a*) y aplicados en el corte B de la representación (*b*).

*Paso 3*: el nudo de la representación (*e*) se obtiene al cambiar de orientación el corte C y el de la representación (*f*), al realizar el rompimiento de dicho corte y unir los lazos violeta y rosado manteniendo el sentido del recorrido. El signo correspondiente es negativo (-) debido a la orientación del corte C.

*Paso 4*: movimientos de Reidemeister aplicados en el corte D de la representación (*d*).

*Paso 5*: al aplicar axioma 4 en las representaciones (*c*), (*e*), (*g*) respectivamente y emplear los signos obtenidos durante el proceso se obtiene el polinomio $\nabla_L(z) = 1\nabla(0) + (Z\nabla(OO) - Z^2\nabla(0))$.

*Paso 6*: al aplicar axioma 3 al resultado obtenido en el paso 5 y usar los signos previamente establecidos, se tiene lo siguiente $\nabla_L(z) = 1 - Z^2$.




*Paso 1*: axioma 1[2]

*Paso 2*: movimientos de Reidemeister

*Paso 3*: axioma 2

*Paso 4*: movimientos de Reidemeister

$$1\nabla(0) + Z\nabla(OO) - Z^2\nabla(0)$$

*Paso 5*: axioma 4

$$1 - Z^2$$

*Paso 6*: axioma 3

Figura 5. Polinomio de Conway de un nudo

## CONCLUSIONES

La invariante de Conway es un método que permite asociar las representaciones "geométricas" de los nudos con representaciones algebraicas que facilitan la manipulación del objeto, además de liberar de la ambigüedad pues la repre-

[2] Al usar los axiomas 1 y 2, de izquierda a derecha, las ramificaciones se nombran 1 y *z* respectivamente.

sentación algebraica es única. Asimismo, la invariante de Conway resulta ser un modelo que destaca las características más importantes de los nudos, tales como la orientación, además de incluir de manera explícita resultados destacados de la teoría de nudos, como son los movimientos de Reidemeister.

Se resalta la importancia de las imágenes en el cálculo de la invariante de Conway pues sin las mismas es imposible calcular el polinomio, además de resaltar características esenciales en el nudo como lo es la orientación de los cortes.

## REFERENCIAS


Contreras, N., Jiménez, W. y Rojas, S. (en proceso de publicación). *Notación matricial para nudos*. SUMA.

Hernández, L. (2011). *Cálculo del polinomio de Conway de 3-ovillos orientados* (Tesis de maestría). Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., San Luis de Potosí, México. Disponible en:

http://repositorio.ipicyt.edu.mx/handle/11627/150

Vázquez, M. (s.f). *El polinomio de Alexander como invariante de nudos*. Recuperado de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:-C8bQ5dKJ2wJ:unipols.sep.gob.mx/politecnologia/index.php/rev1/article/download/35/22+&cd=3&hl=es&ct=clnk&gl=co

# “PROFE: ¿ESTO PARA QUÉ SIRVE?”
# UNA MIRADA A LA GEOMETRÍA DEL CONDUCTOR DE TRACTOMULA

**Deisy Delgado, Andrea Castelblanco y Juan Muñoz**
*Secretaría de Educación del Distrito SED*
deisyjohanadel@gmail.com, yandreacc@gmail.com, jufemugar@hotmail.com

Las curvas que son objeto de estudio en este artículo poseen una gran riqueza histórica, debido a que generaron avance del conocimiento en torno a la geometría no euclidiana y revolucionaron el campo de la física. Curvas como la cicloide, la tractriz y la catenaria no se abordan actualmente en los programas curriculares para grado décimo, pues estos centran su atención en la geometría plana, el reconocimiento de funciones trigonométricas y secciones cónicas, como preámbulo al trabajo en el análisis de funciones que se profundiza en el siguiente grado. Dichas curvas abren la puerta para el estudio y análisis de las geometrías no convencionales y sus aplicaciones, que van desde la geometría del conductor de tractomula hasta modelos cuánticos.

## INTRODUCCIÓN

Este escrito se presenta motivado por el interrogante ¿qué tienen en común un perro, un remolque, el universo y un edredón? propuesto por Castellano (2014), y surge con el fin de fortalecer principalmente tres procesos de pensamiento: observación, comparación y relación, de manera que se pueda avanzar a procesos superiores e integradores como clasificación, análisis, síntesis y evaluación. Este objetivo en su desarrollo ha generado el favorecimiento de espacios de reflexión y la conformación de comunidades académicas lideradas por los docentes en aulas de clase donde pensar matemáticamente es una prioridad. Se abordarán las curvas que dan respuesta a los siguientes cuestionamientos:

- Si una cadena se suspende por dos de sus puntos, ¿cuál es la curva que se genera?
- Si un objeto es arrastrado sobre un plano horizontal mediante una cuerda de longitud constante, cuando el extremo libre de la cuerda se mueve a lo largo de una línea recta en el plano, ¿cuál es la curva que describe su movimiento?

Delgado, D., Castelblanco, A. y Muñoz, J. (2017). “Profe: ¿esto para qué sirve?” Una mirada a la geometría del conductor de tractomula. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 57-63). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Según la Figura 1, si se deja caer un objeto desde el punto $A$ ¿En cuál de las tres trayectorias emplea el menor tiempo en llegar al punto $B$?

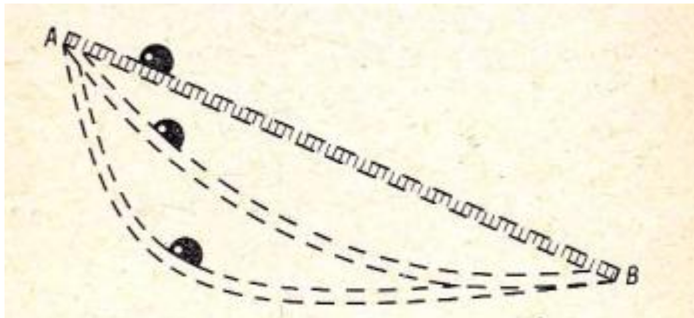



Figura 1. Caída de tres cuerpos en diferentes trayectorias. Disponible en: imagen:http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html

De estas curvas se muestra una perspectiva didáctica de enseñanza que considera situaciones reales, donde pueden observarse algunas de sus aplicaciones para luego describir sus propiedades con apoyo de GeoGebra, con el fin de facilitar la visualización, entendida desde la perspectiva de Cantoral y Montiel (2001) como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende.

## CURVAS CLÁSICAS

Es imposible hablar de las curvas clásicas sin recurrir a las geometrías no euclidianas. Todo surge por el planteamiento del quinto postulado de Euclides y su no tan intuitivo y evidente esbozo, pues no se derivaba de los cuatro restantes. Varios matemáticos se dieron a la tarea de intentar demostrarlo, entre ellos Saccheri y Lambert (Gómez, 2010):

> La comunidad matemática se fue convenciendo de que el postulado de las paralelas era un verdadero postulado y que no se trataba de un teorema, por lo que no requería demostración. Por otro lado, aunque todas las tentativas de demostración habían sido inútiles, tampoco se había probado la falsedad de su negación. La imposibilidad de demostrar el quinto postulado de Euclides encaminó la historia de las matemáticas hacia la concepción de las geometrías no euclideas. (p. 52)

Para mencionar una de las conexiones, se hará referencia a la curva tractriz, la cual permite exponer propiedades de la geometría hiperbólica.

## Cicloide

La trayectoria que describe un punto fijo $P$ sobre una circunferencia que rueda sobre una línea recta es la curva cicloide (Figura 2).

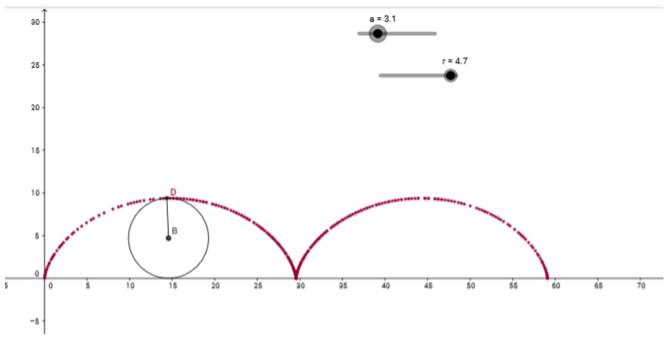



Figura 2. Curva cicloide

Sus propiedades fueron estudiadas por numerosos físicos y matemáticos de gran prestigio. Se dice que fue presentada inicialmente por Nicolás de Cusa, al intentar encontrar el área de un círculo por integración. Marín Mersenne y Galileo Galilei se aproximaron por primera vez a una definición adecuada de la cicloide; este último la nombró en una de sus cartas a Evangelista Torricelli.

Fue tal el interés por la cicloide que dio origen al reconocimiento de propiedades extraordinarias, especialmente en arcos de cicloide invertidos, como el ser:

- Tautócrona o isócrona: el tiempo empleado por una partícula que se desplaza sobre el arco de cicloide para llegar al punto más bajo es independiente de su punto de partida. Christiaan Huygens describió esta propiedad en su *Horologium Oscillatorium*, al intentar construir un reloj de péndulo.

- Braquistócrona: es la curva del descenso más rápido. En el hallazgo de esta propiedad intervinieron Johann y Jacobo Bernoulli, sin embargo, Gottfried Leibniz, Isaac Newton y L´Hôpital demostraron dicha característica la cual dio inicio a problemas variacionales.

Otra característica notable es que la razón entre el área bajo la curva de una cicloide y el círculo generador es de 3 a 1.

## Tractriz

Es la curva que describe un objeto que es arrastrado por otro que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta. Es conocida como "la curva del conductor de tractomula".

En la Figura 3, se observa la trayectoria de un objeto situado en $P$ que es arrastrado por otro situado en $A$. El objeto situado en $A$ se desplaza en línea recta y la distancia entre ambos se mantiene constante.

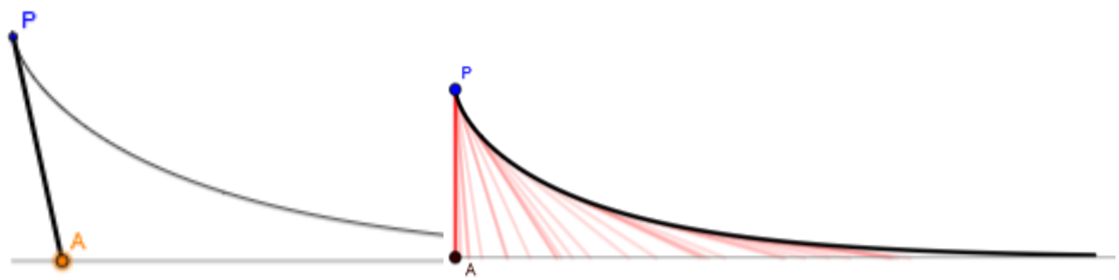



Figura 3. Curva tractriz

El estudio de la curva tractriz permite abordar la geometría hiperbólica, expuesta por Gauss, Lobachevsky, Bolyai y Beltrami; ellos basan sus axiomas en el estudio del comportamiento de puntos y rectas sobre la superficie de una pseudoesfera (Figura 4), siendo esta última el resultado de rotar una tractriz alrededor de su asíntota.

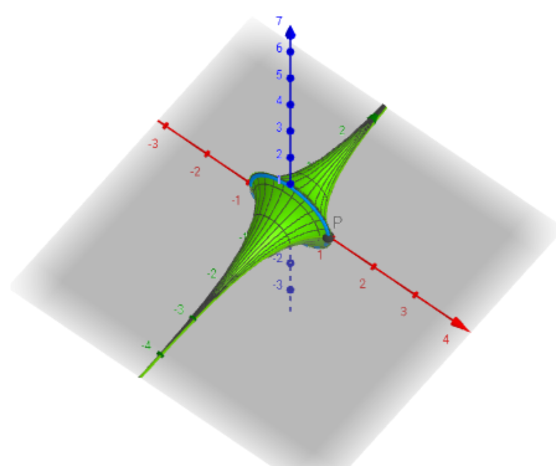



Figura 4. Pseudoesfera (disponible en: https://www.geogebra.org/m/AvQvKzPa)

En la pseudoesfera se identifican propiedades diferentes a las establecidas en la geometría euclidiana. Por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor a dos rectos, sobre una pseudoesfera las rectas paralelas no son equidistantes en todas sus partes, lo cual constituye el hecho diferencial respecto a la geometría euclidiana (Gómez, 2010) y la idea de recta.

## Catenaria

Esta interesante curva despertó la curiosidad de estudiosos como Galileo Galilei, quien en su momento consideró que era una parábola. Posteriormente, esto fue rebatido por Huygens al constatar que la catenaria, a diferencia de la parábola, no posee tensiones horizontales. Esto llevó a considerar los arcos de catenaria (catenaria invertida) como ideales pues soportan su propio peso.

¿Qué es una curva catenaria? Hemos dado ya algunas pistas al mencionar su gran similitud con una parábola, lo que condujo erróneamente a identificarlas. Sin embargo, su mayor atractivo es la infinidad de situaciones a nuestro alrededor en las que la podemos observar. Imaginemos por un instante a un enamorado que cuelga en el cuello de su amada un collar de perlas, o los separadores en las filas de los bancos, (el banco donde obtuvo el préstamo para comprar el collar), pues es así como se define la catenaria, como la curva que describe una cadena colgada por sus extremos, en un campo gravitatorio uniforme. La Figura 5 muestra la forma como actúan las fuerzas a lo largo de la cadena, la fuerza ejercida hacia la derecha, hacia la izquierda y la gravedad.

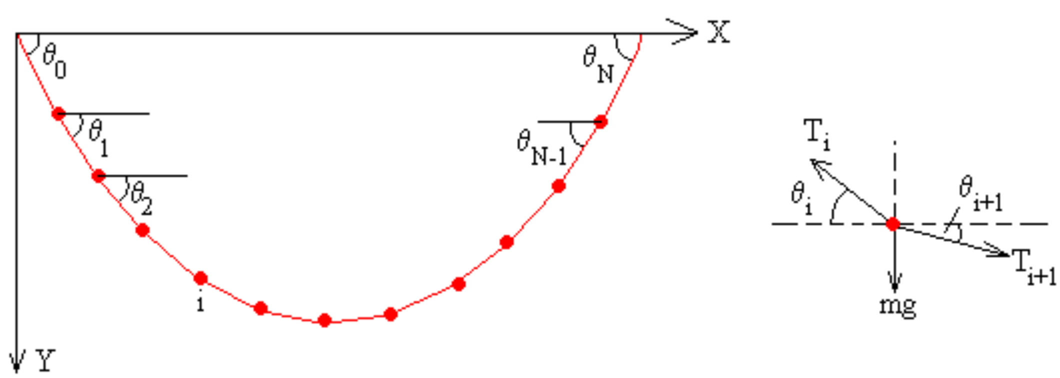



Figura 5. Fuerzas que actúan en la catenaria. Disponible en http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/catenaria/catenaria.htm)

Un análisis posterior de esta curva permite ver cómo su revolución genera la catenoide (Figura 6), una superficie de revolución presentada por Leonhard Euler en 1744 como la primera superficie mínima descubierta.

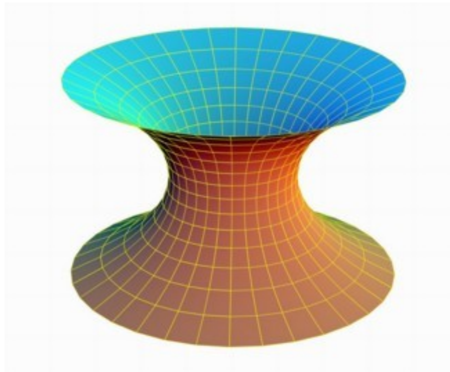


Figura 6. Catenoide. Disponible en
http://www.ugr.es/~jperez/docencia/Evolver/tutorial4.html

## CONCLUSIONES

El uso de las curvas cicloide, tractriz y catenaria proporciona en contextos físicos y matemáticos, herramientas para el estudio de conceptos básicos, aplicaciones elementales y principios intuitivos de la geometría no euclidiana, así como otros aspectos más avanzados de la matemática que se pueden aprovechar en el aula.

Hablar de estas curvas en el aula permite retomar la historia como recurso valioso para su enseñanza, dada la evolución, obstáculos y teorías que surgen a partir del análisis de sus características.

Aunque nuestro propósito no es dar a nuestros estudiantes de secundaria elementos rigurosos de geometría no euclidiana, sí podemos acercarlos a las nociones y cuestionamientos al respecto de algunas de sus propiedades y aplicaciones.

## REFERENCIAS

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. En J. R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 16, tomo 2, pp. 694-701). Chile: CLAME. Recuperado de:

http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2016_2.pdf

Castellano, G. (2014). *Matemáticas: el alfabeto del universo. Divertidas y extravagantes historias para descubrir cómo las matemáticas rigen nuestras vidas*. España: Editorial Guadalmazán.

Gómez, J. (2010). *Cuando las rectas se vuelven curvas*. Barcelona, España: RBA Libros, S.A.

# HOMOTECIA USANDO PANTÓGRAFOS Y GEOMETRÍA DINÁMICA: UN ACERCAMIENTO A LA COMPLEMENTARIEDAD DE ARTEFACTOS

**Jhonatan Ortega** y **Edinsson Fernández-Mosquera**
*Universidad de Nariño*
estivenortega@hotmail.com, edi454@yahoo.com

Se presentan avances de un trabajo de grado que se viene desarrollando en la Universidad de Nariño (Pasto, Colombia), cuya intención es poner en conocimiento cómo una herramienta física como el pantógrafo, y una herramienta virtual como el ambiente de geometría dinámica Cabri II Plus pueden complementarse cuando entran en juego en el proceso de enseñanza del concepto de *homotecia*, bajo el diseño de una secuencia de situaciones didácticas orientadas a estudiantes de grado noveno en Colombia. Se mencionan: intereses investigativos, objetivos, la pregunta de investigación, la justificación, análisis preliminares y resultados obtenidos hasta el momento.

## INTRODUCCIÓN

Se presentan avances del trabajo de grado "Complementariedad de artefactos Cabri II Plus y pantógrafo para la enseñanza de la homotecia: un acercamiento a las representaciones homotéticas cotidianas", que se está desarrollando en la Universidad de Nariño (Pasto, Colombia). La intención del estudio es mostrar cómo dos artefactos[1] –uno físico y otro virtual– como el pantógrafo y el ambiente de geometría dinámica pueden complementarse bajo el diseño de una situación didáctica que fomente la enseñanza de la homotecia en un curso de noveno grado de Educación Básica Secundaria. El diseño de la secuencia didáctica involucra lo que se ha denominado "representaciones homotéticas cotidianas", puesto que se pretende despertar el interés de los estudiantes hacia la homotecia, planteándoles situaciones cotidianas que hacen parte de su contexto, y que conlleven al asombro.

Concordando con Ibargüen y Realpe (2012, al citar a Hoyos, 2006), en esta investigación se entiende que la *función complementaria entre artefactos* hace referencia a:

[1] Según Rabardel (2011), un artefacto puede ser de carácter físico (material) o abstracto (simbólico).

Ortega, J. y Fernández-Mosquera, E. (2017). Homotecia usando pantógrafos y geometría dinámica: un acercamiento a la complementariedad de artefactos. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 65-72). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

> las características que posee cierto artefacto que le permiten mejorar las de otro o aquellas que tiene un grupo de artefactos que hace posible enriquecerse mutuamente, donde cada artefacto posibilita la construcción de un conocimiento diferente. (p. 8)

Cabe aclarar que el artefacto complementa el pensamiento del estudiante, mas no lo modifica.

## ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Dado que esta investigación gravita alrededor de los conceptos de homotecia y complementariedad de artefactos, se ha considerado una elección de documentos publicados durante las dos últimas décadas sobre estos temas. Para ello, se accedió a diferentes bases de datos y repositorios especializados en Educación Matemática. En total, 14 estudios en diferentes modalidades (ponencias, artículos, cursillos y tesis de pregrado) hacen parte de esta masa documental. Así mismo, acorde a la naturaleza de cada uno de ellos, fue posible clasificarlos en tres categorías, a saber:

- estudios acerca de la complementariedad de artefactos,
- estudios en los que no hubo uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC),
- estudios que integran las TIC.

Los estudios acerca de la complementariedad de artefactos hacen referencia a investigaciones que se basaron en el uso complementario de artefactos físicos (e. g., pantógrafos, simetrizadores, palillos, plastilina), o de las TIC (e. g., el programa de geometría dinámica Cabri). En la categoría de estudios en los que no hubo uso de las TIC se incluyeron investigaciones cuyo fin era enseñar la homotecia, pero sin la intervención de artefactos o tecnologías digitales. Y por último, la categoría de los estudios que integran las TIC, reúne las investigaciones que consideraron las TIC como un medio para la comprensión de propiedades, conceptos y procedimientos matemáticos; y que además fueron utilizadas en secuencias de enseñanza[2].

En los antecedentes, se encontró que el concepto de homotecia no se estudia en la geometría escolar y que los estudiantes tienen dificultades cuando tratan

[2] Para mayor información consultar Ortega y Fernández-Mosquera (2015).

de comprenderlo. Así mismo, se encontró que la función complementaria de artefactos fomenta la comprensión de conceptos matemáticos. A raíz de esto, con el propósito de indagar sobre el uso de las TIC y la enseñanza de la homotecia en las clases de matemáticas de algunas instituciones públicas del departamento de Nariño se desarrollaron y aplicaron dos encuestas tipo Likert, dirigidas a 13 docentes de matemáticas en ejercicio y a 30 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño. De las encuestas se concluyó[3] que la homotecia se estudia de modo ligero o no se estudia, y que las TIC no se utilizan en las clases de estos profesores. Este resultado apoya la importancia de realizar una investigación que fomente el uso de las TIC y el estudio de la homotecia en las clases de matemáticas a través de propuestas didácticas que mejoren la comprensión del mencionado objeto geométrico, acompañadas por el uso complementario de materiales didácticos (manipulativos físicos y virtuales) que garanticen un aprendizaje significativo de las propiedades de la homotecia acorde a las representaciones homotéticas cotidianas y a la resolución de problemas matemáticos.

## Pregunta y objetivos de la investigación

La pregunta que da pie a esta investigación es:

> ¿Cómo organizar situaciones didácticas bajo una función complementaria de utilización de artefactos como el Cabri y el pantógrafo a través de las representaciones homotéticas cotidianas, para fomentar el aprendizaje de las propiedades de la homotecia en estudiantes de grado noveno de Básica secundaria?

El objetivo general del estudio es:

> Determinar el *uso complementario* de artefactos manipulativos como el pantógrafo y Cabri II Plus en el aprendizaje de la homotecia para estudiantes de grado noveno de la Educación Básica Secundaria.

Los objetivos específicos son:

> Diseñar una *secuencia didáctica* que comprometa el uso complementario entre el Pantógrafo y Cabri II Plus cuando se les presentan representaciones homotéticas cotidianas a estudiantes de grado noveno de la Educación Básica Secundaria de Colombia, empleando la metodología de micro-ingeniería didáctica.

---

[3] Para mayor información respecto a las resultados, consultar Ortega y Fernández-Mosquera (2016).

Analizar las diferentes estrategias de solución realizadas por los estudiantes al hacer un uso complementario de estos artefactos para que comprendan las propiedades matemáticas de la homotecia.

## ANÁLISIS PRELIMINARES

Se realizaron tres análisis preliminares que hacen parte de la primera fase del marco metodológico adoptado en esta investigación: la micro-ingeniería didáctica (Artigue, 1995), los cuales se presentan en tres dimensiones usuales en el campo de la Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Francesa: dimensión histórico-epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica que, según Chamorro (2003), sirven como herramientas profesionales para producir y controlar secuencias de aprendizaje con cierta garantía de éxito. A continuación, se describe de manera sucinta el análisis en cada dimensión:

En la *dimensión histórico-epistemológica* se presentó una aproximación histórica a la homotecia y al artefacto pantógrafo (incluyendo una descripción de su fisionomía y uso); se describieron las características matemáticas de esta transformación geométrica.

Al realizar la aproximación histórica a la homotecia no se identificó qué geómetras la han estudiado, pues no se obtuvo información al respecto; sin embargo, según Mrabet (2012), la proposición dos (2) del libro VI de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 1994) ofreció la primera declaración histórica del teorema de *Thales* relacionada con la homotecia. No obstante, según Moriena (2006), el *Programa de Erlangen* publicado en 1872, promovido por Klein, dio paso al florecimiento de las propiedades invariantes de las familias de trasformaciones geométricas (que incluyen la homotecia).

En este orden de ideas, en una búsqueda histórica alrededor del pantógrafo se concluyó, desde el punto de vista etimológico, que la palabra “pantógrafo” viene de las voces griegas *pan* (todo) y *graphein* (descripción). El pantógrafo, como instrumento de dibujo, permite ampliar o reducir una imagen. Su invención en 1603 se atribuyó al sacerdote jesuita alemán *Christopher Scheiner* (1575-1650), quien se basó en los principios del paralelogramo (impuestos por Descartes). Sus aplicaciones en la historia abarcan un vasto abanico de campos; joyería (diseño de grabados en joyas, metales o monedas), medicina, agricultura.

Por último, precisando las características matemáticas de la homotecia, se tiene que: se llama homotecia de centro $O$ y razón $K$ (distinta de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto $A$ otro $A'$, alineado $A$ con $O$, tal que $OA' = K * OA$. Si $K > 0$ se llama homotecia directa, y si $K < 0$ homotecia inversa (implica rotación sobre $O$ con un ángulo π). Algunas de sus propiedades son: un punto de la figura y su imagen correspondiente son colineales con el centro de homotecia; es no isométrica; la imagen de un segmento será otro segmento paralelo; y cada lado es multiplicado por $|K|$, (si $0 < k < 1$ implica una "reducción").

En la *dimensión cognitiva* se estudió el *Enfoque Instrumental* de Rabardel (2011), para comprender las interacciones entre humanos y máquinas. Asimismo, se presentó un bosquejo general respecto al uso complementario entre materiales manipulativos y Cabri II Plus. También se consideraron los errores, obstáculos y dificultades (Socas, 2000), y se mostraron algunos errores que los estudiantes cometen cuando estudian la homotecia. Resumiendo:

El *Enfoque Instrumental* de Rabardel (2011) es un marco teórico adoptado en la Educación Matemática para comprender el papel que juegan las herramientas en la construcción de conocimiento de quien las usa. Esto implica dos procesos: *instrumentalización* (hacia el artefacto) e *instrumentación* (hacia el sujeto). En el primero, el sujeto descubre las propiedades iniciales del artefacto y las adapta a sus necesidades; en el segundo, el sujeto explota sus potencialidades. El uso complementario se fundamenta en la mejoría de las características intrínsecas de un artefacto, donde factores que son limitados por un artefacto, podrían ser movilizados por el otro. Artefactos como Cabri II Plus y el pantógrafo pueden llegar a complementarse, puesto que ambos ofrecen cualidades distintas (en entornos diferentes) que hacen que los estudiantes exploten sus potencialidades y limitaciones. Por tanto, se constituyen en factores que podrían llegar a ser limitados por uno de ellos, pero podrían ser movilizados y potencializados por el otro.

Por otra parte, según Socas (2000), el proceso de aprendizaje presenta dificultades y obstáculos, que preceden al error. Dificultades que según él, son clasificadas en cinco categorías: complejidad de los objetos matemáticos, procesos de pensamiento matemático, procesos de enseñanza, procesos cognitivos estudiantiles, y la actividad afectiva y emocional del estudiante con las matemáticas. Tanto errores como dificultades, según Socas (2000), proveen información importante para el docente, puesto que alimentarán estrategias de prevención y remedios en el acto de enseñar.

En este sentido, González y Arias (2017) muestran algunos errores y dificultades cognitivas que presentan los estudiantes al estudiar la homotecia. Los errores implican procesos erróneos al sumar, medir, dividir, y hasta utilizar en forma errada la definición. Las dificultades cognitivas consideran la mala comprensión del concepto.

En este trabajo de grado, en curso, también se han obtenido hasta el momento, algunos resultados similares: los estudiantes no identifican razones entre figuras semejantes, no distinguen una homotecia de una no homotecia, no la reconocen en un ambiente natural, y no generan un pensamiento dinámico (Ortega y Fernández-Mosquera, 2016).

Por último, el análisis en la dimensión didáctica se centró en reconocer el estado de la enseñanza de los objetos en cuestión, el diseño, la intervención y gestión didáctica del profesor. Así, se consideró: la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Brousseau (2007), acciones y retroacciones de los artefactos en cuestión, y por último se realizó un *análisis curricular* respecto a la homotecia. En consecuencia:

La TSD considera dos tipos de situaciones, a saber: *didáctica* y *a-didáctica*: la primera considera una situación normal de clase (donde se relaciona la tríada: docente – estudiante – saber), en la segunda el docente deberá plantear *un problema* al estudiante, quien deberá realizar *acciones* sobre un *medio* (artefacto) y recibir de este, *retroacciones* que le permitirán *validar*.

Por otro parte, según Acosta (2010), en Cabri II Plus se pueden realizar dos tipos de acciones con sus respectivas retroacciones: la acción de *construir* que genera como retroacción un *fenómeno estático*, y la acción de *arrastrar* que genera como retroacción un *fenómeno dinámico*. Con el pantógrafo se puede realizar la acción de *construir*, que genera, como retroacción, un *dibujo estático* en una hoja.

Por último, para examinar los aspectos curriculares del pensamiento espacial, en particular, de la homotecia, se tomó como referencia los *Estándares Básicos de Competencias* para el área de Matemáticas planteados por el Ministerio de Educación Nacional (2006), donde se evidenciaron logros que el estudiante debe alcanzar en su proceso de aprendizaje del concepto de homotecia. Se consideraron los *pensamientos Espacial y Métrico*, por tener una estrecha relación con la homotecia, posteriormente se evaluó la *coherencia vertical* y *horizontal* en los estándares de los conjunto de grados 6-7 y 8-9.

## CONCLUSIONES PARCIALES

Según la masa documental establecida en los antecedentes, al igual que los resultados obtenidos en las encuestas tipo Likert, los docentes de matemáticas de varias regiones del país no estudian temas relacionados con las transformaciones geométricas, en particular homotecia, ni mucho menos usan tecnologías digitales o artefactos físicos.

Los artefactos involucrados en este trabajo de grado pueden complementarse debido a que permiten solventar debilidades entre ellos.

Los Estándares Básicos de Competencias para Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006), en relación al pensamiento espacial, consideran una única vez el concepto de homotecia, por lo que se supone que este concepto es considerado como transitorio y sin importancia en el desarrollo del pensamiento espacial para los estudiantes, es por ello que se reivindica aquí la importancia de realizar un estudio alrededor de esta temática.

## REFERENCIAS


Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. En *Memorias del 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (pp. 132-142). Bogotá, Colombia: ASOCOLME.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericana.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Dilma Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal (primera edición en francés, 1998).

Chamorro, M. del C. (2003). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp. 69-94). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.

Euclides (1994, trad.). *Elementos: Libros V - IX* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

González, Y. y Arias, I. (2017). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica* (Tesis de pregrado). Universidad Nacional de Costa Rica, Heredia, Costa Rica. Recuperado de:

http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/12-tesis?download=153:gonzalez-y-y-arias-i-2016&start=20 (19/03/17)

Ibarguen, Y. y Realpe, J. (2012). *La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/3858 (28/01/15)

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Bogotá, Colombia: MEN.

Moriena, S. (2006). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano*. Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral, Prov. de Santa Fe, Argentina.

Mrabet S. (2012). Les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et les manuels tunisiens. En J.-L. Dorier y S. Coutat S. (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 480-491). Genève, Suiza: Université de Genève. Recueperado de: http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ortega, J. y Fernández-Mosquera, E. (2015). Complementariedad de artefactos físicos y Cabri para la comprensión de conceptos geométricos: un estado del arte. En L. A. Zabala y J. A. Rúa (Coords.), *VII Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas* (p. 133). Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.

Ortega, J. y Fernández-Mosquera, E. (2016). Estudio didáctico para la comprensión de las homotecias en la geometría escolar. En L. A. Zabala y J. A. Rúa (Coords.). *VIII Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas* (pp. ) Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Martín Acosta, Trad.). Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Editorial Horsori.

# Cursillos

# El tránsito del plano al espacio: propuesta de modelo de diseño de tareas con Cabri 3D

**Armando Echeverry, Leonor Camargo y Ángel Gutiérrez**
*Universitat de València, Universidad Pedagógica Nacional, Universitat de València*
armandoech@gmail.com, lcamargo@pedagogica.edu.co, angel.gutierrez@uv.es

En el cursillo invitamos a los asistentes a resolver algunas tareas que hacen parte de una secuencia de instrucción diseñada con el objetivo de favorecer el tránsito del plano al espacio, en un curso de geometría para maestros en formación, con el apoyo de Cabri 3D. Presentamos los elementos teóricos que fundamentan la secuencia y apoyan el análisis del aprendizaje de los estudiantes, y promovemos una discusión entre los asistentes acerca de los elementos que se ponen en juego en las tareas y que se constituyen en piezas para la construcción de un modelo teórico de diseño de tareas.

## Introducción

Desde nuestra perspectiva, la enseñanza de la geometría tridimensional en todos los niveles de la escolaridad, ha sido, en términos generales, dejada de lado en el currículo realmente ejecutado por los profesores. La disponibilidad actual de programas de geometría dinámica ofrece una oportunidad de saldar esa vieja deuda con nuestros estudiantes y brindarles oportunidades de avanzar en su aprendizaje sobre este tema. Pero para llevar a cabo esta tarea, es fundamental la preparación de los profesores y tengan a su disposición ejemplos de tareas y modelos de diseños de las mismas, para que puedan gestionar aprendizajes con sus estudiantes.

En el cursillo presentamos avances preliminares de una investigación en curso que apunta a construir un modelo teórico para el diseño de tareas y para el análisis de los aprendizajes de los estudiantes, de contenidos relacionados con el tránsito de la geometría 2D a la geometría 3D, con el apoyo del programa Cabri 3D. Con el propósito de favorecer el tránsito, las tareas se enfocan en: la búsqueda de argumentos geométricos para diferenciar el plano del espacio; la necesidad de identificar planos en el espacio o construir imágenes mentales de los mismos; caracterizar objetos geométricos según pertenezcan a un plano o a más de un plano; y las relaciones entre rectas y planos.

Echeverry, A., Camargo, L. y Gutiérrez, Á. (2017). El tránsito del plano al espacio: propuesta de modelo de diseño de tareas con Cabri 3D. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 75-80). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## MOTIVACIÓN

En Colombia, pese a no existir un currículo prescrito para la educación básica y media, se dispone de tres documentos con orientaciones curriculares para matemáticas: los *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998), los *Estándares Básicos de Competencias* (MEN, 2006) y los *Derechos Básicos de Aprendizaje* (MEN, 2015). En ellos se sugiere cómo organizar el currículo para cada grupo de grados y qué contenidos mínimos deben ser aprendidos. En los tres documentos se incluye la geometría 3D en todos los niveles de la escolaridad, como un contenido que se debe trabajar con los estudiantes. Sin embargo, la comunidad colombiana de investigadores en Educación Matemática tiene información, derivada de la permanente interacción con profesores en ejercicio, acerca del currículo implementado, que permite afirmar que contenidos de geometría distintos a algunas clasificaciones de figuras geométricas y al estudio de fórmulas para determinar áreas, son frecuentemente soslayados en el currículo realmente ejecutado por los profesores.

En un estudio evaluativo internacional en el que participó Colombia, que incluyó preguntas de geometría, (Mullis, Martin y Foy, 2008) se aplicó una prueba de carácter muestral en 49 países, en los grados 4 y 8. La prueba se acompañó de encuestas realizadas a profesores de los estudiantes que participaron en el estudio. En el reporte mencionado se encuentran, entre otros, los siguientes datos relevantes respecto a la educación en geometría y, particularmente, a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría 3D:

- El puntaje promedio de Colombia fue 371, ubicando al país en la posición 44, entre 49 países que se sometieron al estudio. En el primer lugar se ubicó Taiwán, con un puntaje de 592, y en el último lugar quedó Ghana, con un puntaje de 275.

- El porcentaje de estudiantes de grado 4 que recibió instrucción acerca del tema “Relación entre formas 3D y 2D” fue de 46% y en el caso de Colombia fue de 45%. Para el grado 8, el porcentaje global fue de 48% y en el caso de Colombia fue de 37%.

- En Colombia, para grado 4, el porcentaje de estudiantes con profesores que se sentían muy bien preparados para enseñar el tema “Relación entre formas 3D y 2D” fue de 51% y en grado 8 fue de 64%. El resultado contrasta con el de los estudiantes y lleva a preguntarse sobre la formación de profesores y el lugar de la enseñanza de este tema en los currículos.

La evidencia que proporciona el reporte mencionado nos permite afirmar que la enseñanza de la geometría 3D, y particularmente el tránsito de la geometría 2D a la geometría 3D, es un problema de considerable importancia en la educación básica y media en Colombia. Y, asociado a ello, la preparación de los profesores para la enseñanza de este tema de la geometría es un asunto que requiere la mayor atención y respuestas que deben provenir de la investigación.

Diversos autores han hecho manifiesta la necesidad de proponer modelos teóricos para fundamentar diseños instruccionales para la enseñanza de la geometría, y particularmente de la geometría 3D, apoyados en el uso de programas de geometría dinámica. Hace más de diez años, Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006) señalaron la necesidad de dirigir la investigación hacia el diseño de tareas y hacia el análisis de las características del programa que influyen en el aprendizaje. En un estudio posterior, Laborde y Laborde (2008), al referirse a la inserción del programa Cabri en las aulas, consideraron el tipo de tareas que se asignan a los estudiantes como un cambio importante en las exigencias para los profesores. Estos planteamientos han sido reiterados en estudios posteriores. Sinclair y Robutti (2013) y Sinclair, Bartolini Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens (2016), por ejemplo, destacan la necesidad de lograr una mejor comprensión del papel de la tecnología y una mejor integración del uso de esta en las prácticas de enseñanza de los profesores, apoyándolos en el diseño y desarrollo de nuevas tareas que sean apropiadas para el uso de programas de geometría dinámica. Dentro de las áreas de investigación relevantes señalan la necesidad de enfocarse en el desarrollo de marcos teóricos y metodológicos que permitan una mejor comprensión del papel de la tecnología existente y emergente, además de estudios empíricos acerca del uso de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje.

Por otro lado, está ampliamente documentado en la literatura investigativa (Gutiérrez, 1996) que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría tridimensional enfrentan un problema fundamental: los modelos de objetos tridimensionales son, por lo general, representaciones planas y estáticas. Este hecho conlleva pérdida de información sobre los objetos y genera dificultades en la conceptualización de estos. Los resultados de intervenciones de enseñanza en geometría tridimensional con el uso de *software* de geometría dinámica 3D han reportado resultados positivos en  el tránsito de la geometría intuitiva a la geometría teórica (Mithalal, 2010), la visualización de los estudiantes para la resolución de situaciones (Widder y Gorsky, 2013), la resolución del conflicto entre conocer y ver, a partir de representaciones planas de objetos tridimensionales (Ferrara y Mammana, 2014) y el mejoramiento de imágenes conceptuales de objetos y relaciones de la geometría tridimensional como impulsor del progreso en los niveles de razonamiento (Gutiérrez y Jaime, 2015).

Los trabajos mencionados previamente son reportes de experiencias puntuales con actividades relacionadas con contenidos de geometría 3D. La intención de nuestra investigación es más amplia, pues pretendemos generar un modelo teórico para el diseño de secuencias de instrucción en geometría del espacio, con el apoyo del programa Cabri 3D, y poner a prueba un esquema analítico para el análisis del aprendizaje de los estudiantes al desarrollar tareas concebidas a partir del modelo.

## CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

En la construcción del modelo teórico nos enfocamos en tres componentes que podrían estructurarlo. El componente epistemológico alude a cómo se conciben los objetos matemáticos en el modelo: los objetos matemáticos son accesibles solamente mediante sus representaciones (Moreno-Armella, 2014) y nos interesa particularmente el papel que desempeñan las representaciones como mediadores semióticos (David y Tomaz, 2012). El componente cognitivo del modelo alude a cómo entendemos el aprendizaje. La motivación por conocer surge de la incertidumbre (Zaslavsky, 2005), que actúa como un mecanismo que apoya el desarrollo del conocimiento matemático a través del surgimiento de la necesidad intelectual conceptualizada por Harel (2013). El componente didáctico del modelo alude a la gestión de la clase en relación con el uso de las representaciones de objetos matemáticos como mediadoras semióticas para promover el aprendizaje a partir de la generación de incertidumbre y orientar la necesidad intelectual. Ello se logra en la interacción comunicativa mediada semióticamente por el profesor (Bartolini Bussi y Mariotti, 2008).

## PREVISIÓN DEL DESARROLLO DEL CURSILLO

En cada sesión del cursillo, invitaremos a los asistentes a resolver algunas de las tareas, expondremos el marco de referencia, comentaremos los análisis disponibles y propiciaremos un intercambio de ideas.

## REFERENCIAS


Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh y B. Sriraman (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

David, M. M. y Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 413-431.

Ferrara, F. y Mammana, M. (2014). Seeing in space is difficult: An approach to 3D geometry through a DGE. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y A. Darien (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 3, pp. 57-64). Vancouver, Canadá.

Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: PME.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9*(2), 53-83.

Harel, G. (2013). Intellectual need. En K. R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 119-151). New York, EUA: Springer.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 257-304). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Laborde, C. y Laborde, J.-M. (2008). The development of a dynamical geometry enviroment: Cabri-Géometrè. En G. W. Blume y K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (pp. 31-52). Charlotte, North Caroline: Information Age.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Recuperado a partir de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Recuperado a partir de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Recuperado a partir de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Mithalal, J. (2010). 3D geometry and learning of mathematical reasoning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 796-805). Lyon, Francia: INRP. Recuperado a partir de: www.inrp.fr/editions/cerme

Moreno-Armella, L. (2014). *Educación matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Mullis, I., Martin, M., y Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report. Findings from IEA's trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades*. Boston, EUA: TIMSS & PIRLS. Recuperado a partir de: http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *48*(5), 691-719.

Sinclair, N. y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En M. A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook in mathematics education* (pp. 571-596). New York, EUA: Springer.

Widder, M. y Gorsky, P. (2013). How students solve problems in spatial geometry while using a software application for visualizing 3D geometric objects. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *32*(1), 89-120.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 297-321.

# ELEMENTOS DE LÓGICA DIFUSA Y OPERADORES MORFOLÓGICOS APLICADOS AL FILTRO DE IMÁGENES MÉDICAS

**Wilson Forero y Carlos Ochoa**
*Universidad Nacional, Universidad Distrital*
wjforerob@unal.edu.co, oochoac@udistrital.edu.co

En el estudio de las imágenes diagnósticas, la lógica difusa y los operadores morfológicos difusos son una opción para obtener información relevante. En el cursillo se estudian la génesis de los conjuntos difusos y los conceptos necesarios para trabajar con operadores morfológicos, se define la versión clásica y difusa de esta herramienta de análisis de imágenes, se aborda la interpretación de la herramienta por medio del lenguaje de programación Python y se da una corta explicación del algoritmo implementado.

## INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS DIFUSOS

Loth A. Zadeh divulgó en 1965 las primeras ideas de teoría de conjuntos difusos. La finalidad de esta teoría es encontrar, en las matemáticas, modelos apropiados para el estudio de problemas complejos de control que se presentan en la teoría de la información. La teoría de conjuntos difusos supera la rigidez de la teoría clásica de conjuntos y se relaciona estrechamente con la lógica multivariada dada la posibilidad de clasificar objetos de un universo conocido no solo atendiendo a si verifican o no una propiedad determinada sino si la verifican parcialmente.

Esta relación se puede abordar desde el principio de bivalencia, que establece que una proposición tiene exactamente uno de los dos valores de verdad: verdadero (1) o falso (0), junto con el principio de composición, que indica que el valor de verdad de cada fórmula compuesta bien formada es función del valor de verdad de sus componentes.

Lo anterior indica que una fórmula puede cumplir parcialmente una interpretación dependiendo del grado de pertenencia que tenga respecto al conjunto difuso. Para atender el concepto de conjunto difuso se toma inicialmente la definición dada en Zadeh (1965), la cual se ha constituido en la noción primitiva por excelencia.

Forero, W. y Ochoa, C. (2017). Elementos de lógica difusa y operadores morfológicos aplicados al filtro de imágenes médicas. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

*Definición 1*. Sea $X$ un espacio de puntos, con un elemento genérico de $X$, denotado por $x$. Un *conjunto difuso* $A$ en $X$ está caracterizado por una función de pertenencia $f_A(x)$ la cual asocia a cada punto de $X$ un número real en el intervalo $[0,1]$; este valor $f_A(x)$ representa el "grado de pertenencia" de $x$ en $A$.

## Normas triangulares (t-normas)

Las normas triangulares en la lógica difusa constituyen la generalización de la intersección.

*Definición 2*. Una *t-norma* es una operación $*\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisface:

1. Para todo $x, y, z \in [0,1]$:

   $x * y = y * x$

   $(x * y) * z = x * (y * z)$

2. $*$ no es decreciente en ambos argumentos, es decir:

   $x \leq y$ implica que $x * z \leq y * z$

   $x \leq y$ implica que $z * x \leq z * y$

3. $1 * x = x$ y $0 * x = 0$ para todo $x$ en $[0,1]$.

Dada la estructura de orden y topológica que el intervalo $[0,1]$ posee como subespacio de $\mathbb{R}$, es posible considerar la naturaleza de $*$ con respecto al concepto de continuidad. Desde esta perspectiva, siguiendo a Forero (2015) se tiene que $([0,1], \leq, \cap, \cup, *, \rightsquigarrow, 0, 1)$ es un retículo residuado completo con $*$ una t-norma continua a izquierda, donde $x \rightsquigarrow y$ se conoce como el residuo de la t-norma con $x \rightsquigarrow y = \max\{z \mid x * z \leq y\}$.

*Ejemplo*. Algunos ejemplos conocidos de la Definición 2 son:

$x * y = \min(x, y)$ (t-norma del mínimo o de Gödel),

$x * y = x\,y$ (t-norma del producto),

$x * y = \max(x + y - 1, 0)$ (t-norma de Lukasiewicz).

## Interpretación de imágenes con Python

El programa Python permite interpretar una imagen en formato jpg, png, etc., de manera que se forme un arreglo en el que cada elemento corresponde a un pixel de la imagen en la escala de color RGB. Para obtener el mencionado arreglo, se usan la librería PIL y el comando **.load()**. Es posible acceder a estas opciones si en el preámbulo se escribe la línea **from PIL import Image**, **ImageOps.**

Para obtener un dato específico de la imagen es suficiente colocar [x,y] después del nombre del arreglo que definimos con el comando **.load(),** donde x es la fila y y la columna deseada. En caso de necesitar el valor rojo, verde o azul de un pixel basta con extraerlo del arreglo que se generó.

Para graficar un arreglo de datos constituidos por triplas (x, y, z) que están en el rango admitido en la escala RGB se deben convertir dichos datos al formato RGB por medio del comando **Image.fromarray** (nombre del arreglo, 'RGB').

Para visualizar el resultado del procedimiento anterior tan solo se debe poner el nombre de la **imagen.show()** y es posible guardarla usando el comando **.save().** Todo esto permite modificar, filtrar o acceder a regiones determinadas de la imagen de estudio; en particular, permite aplicar los operadores morfológicos difusos.

## Operadores morfológicos difusos en Python

Para comenzar, se abordará la concepción de los operadores morfológicos difusos, tratando en primer lugar el caso clásico. Siguiendo a Elorza, Fuentes-González, Bragard y Burrillo (2013), se definen los operadores erosión y dilatación en $X = \mathbb{R}_2$ o $X = \mathbb{Z}_2$, respectivamente por:

1. $\varepsilon_B(A) = \{y \in X \mid \bar{B}_Y \subset A\}$
2. $\delta_B(A) = \{y \in X \mid \mathrm{B}_Y \cap A \neq \emptyset\}$

   donde $\bar{B}_Y = \{y - b \mid \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$ y $\mathrm{B}_Y = \{y + b \mid b \in B\}$.

Se extienden las ideas anteriores tomando un conjunto arbitrario $X$ y una relación difusa $R$, que es la proyección del concepto de elemento estructural y, en consecuencia, se denomina "relación estructural". Así, las ecuaciones (1) y (2) se definen en un contexto difuso por medio de $*$ y $\rightsquigarrow$ ; se define $L^X$ como el conjunto de todas las funciones de $X$ en $L$, esto es, el conjunto de todos los subconjuntos $L$-difusos de $X$.

*Definición 3*. Sea $(L, \leq, \cap, \cup, *, \rightsquigarrow, 0, 1)$ un retículo residuado completo y dada una relación difusa $R \in L^{X \, x \, X}$ , los operadores erosión y dilatación de $\mu \in L^X$ son:

1. $\varepsilon_R(\mu)(x) = (R^{op} \lhd \mu)(x) = \bigwedge_{y \in X}\{R(y,x)\, \mu(y)\}$
2. $\delta_R(\mu)(x) = (R \circ \mu)(x) = \bigvee_{y \in X}\{R(x,y) * \mu(y)\}$

Con los operadores antes definidos es posible construir los operadores de apertura $\alpha_R(\mu) = R \circ (R^{op} \lhd \mu)$ y cerradura $\gamma_R(\mu) = R^{op} \lhd (R \circ \mu)$.

La relevancia de estos operadores radica en que permiten eliminar ruido de la imagen de estudio sin alterar su estructura global sujeta al adecuado uso de la relación estructural, debido a que es posible comprobar la indempotencia de los operadores, nociones de interioridad, finidad entre ellos. Esto fue estudiado con respecto al operador apertura y erosión en Ochoa y Forero (2017).

Al implementar los operadores morfológicos clásicos en Python, por medio de la versión de 2007 de los paquetes pymorph (Pymorph: Image morphology in Python)[1] o OpenCV, se encuentran dos limitantes: el elemento estructural es binario y la función de pertenencia es bivaluada. Para solucionar lo anterior se usan los conjuntos difusos, cuya función de pertenencia se construye a partir de un *If* anidado, definiendo el rango de pertenencia en la tonalidad del pixel en formato RGB. En la Figura 1 se aplican los operadores dilatación y erosión en el caso difuso con un elemento estructural en forma de línea diagonal con tonalidad gris oscura a clara.

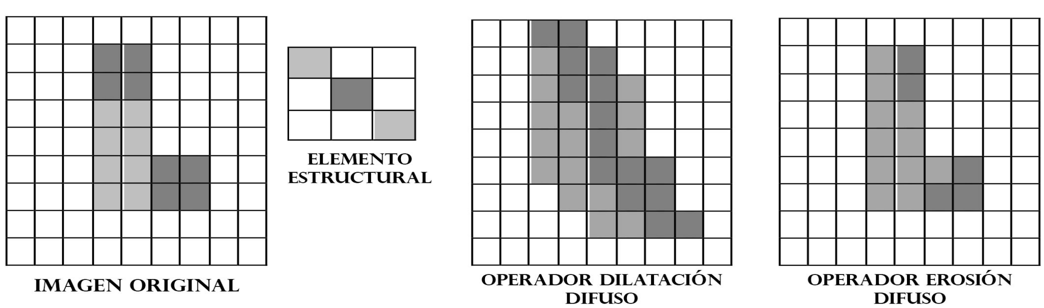



Figura 1. Ejemplo de aplicación de los operadores dilatación y erosión

[1] Disponible en: https://pythonhosted.org/pymorph/

Para eliminar la limitante del elemento estructural binario, se construye un arreglo formado por elementos cuyo valor numérico esté en la escala de RGB de una línea gris, un cuadrado, triángulo, etc. Este arreglo se elige de acuerdo a la imagen de estudio, para luego compararla, pixel a pixel, con la imagen original y filtrarla por medio de los operadores morfológicos difusos, de la siguiente forma:

1. Se crea una malla alrededor del pixel de estudio (denotado pixel[i][j]) de tres por tres pixeles,

2. Por medio de un *if* se pregunta qué tonalidad es más pequeña entre el elemento estructural y los elementos de la imagen que está en la malla del pixel[i][j].

3. El paso 2 crea una lista de nueve arreglos, cada uno de los cuales indica una tonalidad: en el caso de la erosión se toma el más pequeño (esto simula la t-norma del mínimo) y para la erosión, el máximo.

4. Se guarda en la coordenada [i][j] de un arreglo para luego graficarla tras realizar los pasos 1 a 3 con cada pixel de la imagen original.

En la Figura 2 se muestra el resultado de implementar el algoritmo anterior a una imagen médica (izquierda, tomada de Iturralde (2008)) obtenida por contraste, aplicándole los operadores de erosión (centro) y dilatación (derecha):

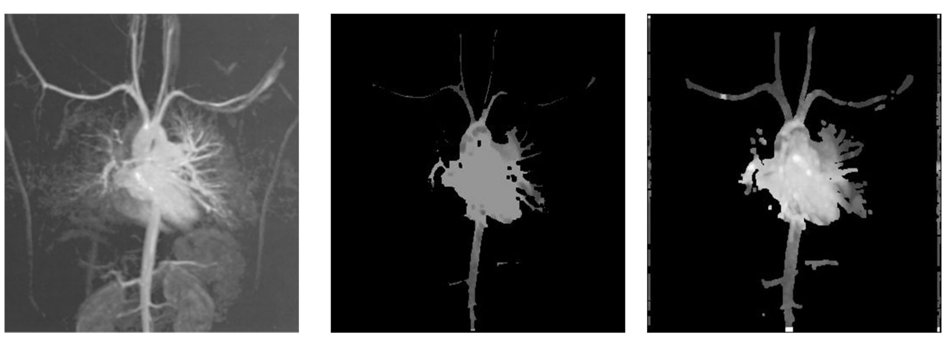


Figura 2. Aplicación de los operadores erosión y dilatación a una imagen médica

En la Figura 3 se ilustra que al ampliar el rango de pertenencia de la tonalidad cuando se filtran las imágenes se produce una reducción del ruido de fondo de la imagen con respecto al caso clásico (derecha).

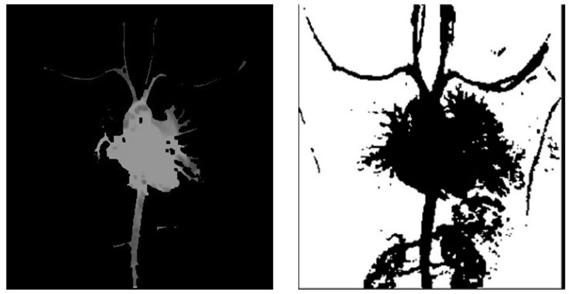


Figura 3. Reducción del ruido de fondo (izquierda) en una imagen en escala de grises

La Figura 4 ilustra la relevancia de escoger un intervalo adecuado en el cual tomar las tonalidades para definir la función de pertenencia. Para la imagen de la izquierda, el intervalo de pertenencia abarca desde el tono gris oscuro (100,100,100) al blanco (255,255,255), mientras que para la imagen de la derecha, abarca desde gris (140,140,140) hasta blanco (255,255,255).

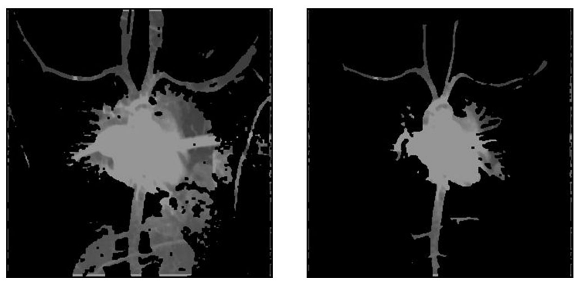


Figura 4. Relevancia de la elección del intervalo de pertenencia para filtrar la imagen

## REFERENCIAS


Elorza, J., Fuentes-González, R., Bragard, J. y Burillo, P. (2013). On the relation between fuzzy closing morphological operators, fuzzy consequence operators induced by fuzzy preorders and fuzzy closure and co-closure systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 218, 73-89.

Forero, W. (2015). *Relaciones difusas inducidas por el operador morfológico clausurativo difuso* (Trabajo de grado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Iturralde, A. R. (2008). *Urgencias urológicas*. La Habana, Cuba: Editorial Ciencias Médicas.

Ochoa, C. y Forero, W. (2017). Del operador apertura en la matemática morfológica difusa. *Ingeniería*, *22*(1), 125-139.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control, 8*(3), 338-353.

# ANÁLISIS DIDÁCTICO DE TAREAS MATEMÁTICAS: UN EJEMPLO PARA LA CLASE DE GEOMETRÍA

**Tania Plazas, Óscar Molina y Carmen Samper**
*Universidad Pedagógica Nacional*
tplazas@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

Producto de la interacción con profesores en ejercicio, hemos notado que los aspectos incluidos en el análisis, que habitualmente hacen, de tareas que proponen a los estudiantes, no proveen las herramientas requeridas para gestionarlas con miras a promover razonamiento matemático. El cursillo al que nos referimos aquí tiene como propósito identificar, por medio de un análisis didáctico, elementos que un profesor de matemáticas debe tener en cuenta para la gestión de tareas que promueven procesos de conjeturación y justificación, en una clase de geometría de cualquier nivel educativo.

## INTRODUCCIÓN

Durante el más reciente proyecto de investigación, *Geometría: vía al razonamiento científico*, desarrollado por el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), tuvimos la oportunidad de trabajar de cerca con profesores de básica secundaria que tenían a su cargo cursos de geometría plana euclidiana. En tal contexto, nos percatamos de sus dificultades a la hora de analizar, desde un punto de vista didáctico-matemático, las tareas que pretendíamos implementar en las clases, con el objetivo de que sus estudiantes se involucraran en la resolución de problemas abiertos y la justificación de las respectivas respuestas. Este escenario nos llevó a diseñar e implementar herramientas para realizar un análisis didáctico de las tareas que se propondrían a los estudiantes. Con ese análisis, buscábamos empoderar a los maestros para una gestión idónea en la clase.

En este cursillo se quiere compartir la estructura de análisis que diseñamos y realizar, junto con los asistentes al mismo, un análisis didáctico de una secuencia de tareas que aborda objetos y relaciones de la geometría plana euclidiana. Se irán presentando las fases del análisis y las actividades que en cada una de ellas un profesor debe realizar como parte de su labor de planeación de una clase en la que pretende que sus estudiantes exploren una situación, formulen una conjetura y provean su justificación.

Plazas, T., Molina, Ó. y Samper , C. (2017). Análisis didáctico de tareas matemáticas: un ejemplo para la clase de geometría. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 87-92). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## Análisis didáctico de tareas

El *análisis didáctico* es la actividad que realiza un profesor para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, secuencias y clases (Gómez, 2002). Lupiáñez y Rico (2008) proponen que se organice esa actividad en cuatro fases: (a) análisis de contenido, (b) análisis cognitivo, (c) análisis de instrucción y (d) análisis de actuación. El análisis de contenido inicia con la determinación de los contenidos y objetivos, haciendo énfasis en los significados del objeto matemático que se abordarán. Se revisan los objetos geométricos involucrados, sus definiciones, representaciones, etc., y los preconceptos que debe tener el estudiante para abordar la tarea. En el análisis cognitivo, el profesor establece las competencias que se espera desarrollen los estudiantes, a través de las tareas que se proponen. Durante este análisis también se identifican posibles errores y dificultades asociados a las tareas y al objeto matemático correspondiente. El análisis de instrucción se realiza a partir de los dos anteriores. En este momento se diseñan nuevas tareas o se rediseñan las existentes, y se evalúa la pertinencia de las mismas en relación con los objetivos planteados. Finalmente, el análisis de actuación se hace una vez realizadas en el aula las tareas, con base en la reflexión que el profesor hace de las actuaciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas, con el fin de llegar a tener una idea detallada y consciente de la eficacia de la tarea implementada, y reconocer el proceso de aprendizaje de sus estudiantes; esto le servirá como punto de partida para iniciar un nuevo análisis didáctico.

## Tareas: Problemas abiertos de conjeturación

Aquello que aprenden los estudiantes lo determinan, en gran medida, las tareas que desarrollan; es por ello que la elección y el análisis de estas juegan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas (Hiebert y Wearne 1997, citados en Watson y Sullivan, 2008). Elegir diferentes tipos de tareas permite que los estudiantes desarrollen actividad matemática variada. Cuando el profesor elige un tipo de tarea está haciendo elecciones basadas, aunque no exclusivamente, en su concepción de la naturaleza del aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor quiere fomentar la construcción social de conocimiento, las tareas que propone seguramente van a tener en cuenta aspectos relacionados con: (i) la toma de decisiones por parte del estudiante para solucionar la tarea, lo cual está relacionado con su motivación, (ii) la comunicación que deben establecer los estudiantes entre sí al trabajar colaborativamente, y (iii) el tipo de participación que se espera de parte de los estudiantes durante el proceso de resolución de la tarea.

Una tarea es un *problema* para quien la debe resolver (un individuo o un grupo de personas) si necesita "desarrollar una forma más productiva de pensar sobre la situación dada" (Lesh y Zawojewski, 2007, p. 782). Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) conciben *problema abierto de conjeturación* como aquel en el que el enunciado no revela la solución y se solicita formular una conjetura. Una conjetura es un enunciado de carácter general, fundamentado en observaciones y exploraciones que generan en el proponente un alto grado de certeza (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013). Consideramos que los problemas de este tipo se pueden caracterizar como *investigaciones matemáticas* (Fonseca, Brunheira y Ponte, 1999) puesto que permiten que los estudiantes determinen la cuestión que van a estudiar, la pongan a prueba para refinar conjeturas, comuniquen sus resultados, y hagan argumentos de diversa índole (inductivos, abductivos o deductivos).

Abordar este tipo de problemas en un Entorno de Geometría Dinámica (EGD) favorece los procesos de conjeturación y justificación. El primero, dado que permite realizar una exploración dinámica gracias a la función de arrastre, para así identificar invariantes y dependencias entre propiedades. Ello propicia la identificación del antecedente y el consecuente que determinarán la conjetura que se formula. El antecedente de esta consta de aquellas condiciones que impone el estudiante en la construcción o en la exploración de la situación. El consecuente refiere a aquellas propiedades que resultan como consecuencia de las condiciones impuestas. El segundo, porque puede generar ideas útiles para la justificación que consiste en proveer una argumentación deductiva para la conjetura formulada, teniendo como marco un sistema teórico de referencia (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013).

## UNA MUESTRA DE LA ACTIVIDAD DEL CURSILLO

En esta sección ilustramos las actividades que se deben llevar a cabo en el marco de las cuatro fases de un análisis didáctico. Resolver la tarea puede aportarle al profesor elementos significativos para hacer el análisis didáctico, así que, en primera instancia, se les dará tiempo para que solucionen la siguiente tarea. Luego, se ilustrarán las fases del análisis correspondiente.

*Tarea*: Dado un triángulo, ¿qué relación hay entre tipo de triángulo y la propiedad “dos de sus alturas son congruentes?

a) Describa su proceso de construcción y exploración en un entorno de geometría dinámica.

b) Formule una conjetura que solucione el problema.

c) Provea una demostración que valide la conjetura.

## Análisis didáctico

A continuación se presentan algunos de los elementos que se incluirían en las primeras dos fases del análisis.

### Análisis de contenido

Los objetos geométricos que se deberían abordar previamente a la asignación de la tarea son las definiciones de: triángulo, altura, recta perpendicular, congruencia de segmentos, triángulos de distintos tipos, relación de congruencia de triángulos y de segmentos, y deberían ser conocidos los criterios de congruencia triangular. El objetivo general es que los estudiantes realicen la exploración de una situación y provean conjeturas a partir de los invariantes observados. El objetivo específico de la tarea es que los estudiantes descubran la relación entre el triángulo isósceles y la congruencia de dos de sus alturas, y la formulen como una conjetura. Podrían existir otros objetivos propios de la comunidad de la clase en la que se propone la situación. Por ejemplo, generar la necesidad de contar con un elemento teórico nuevo: supóngase que el criterio de congruencia LAA no esté disponible en el sistema teórico compartido; se desea, entonces, que los estudiantes durante el proceso de demostración de la conjetura que proponen, se percaten de la necesidad de contar con dicho criterio para poder completar la argumentación deductiva respectiva.

### Análisis cognitivo

Las competencias que queremos desarrollar con tareas como la propuesta están asociadas a dos procesos: el de solución y el de puesta en común de los resultados. Para el primer proceso, los siguientes son ejemplos de competencias: (a) Realizar representaciones simbólicas-manipulativas, en el EGD, de los objetos geométricos involucrados en la situación. (b) Realizar una exploración dinámica[1] de la situación, con miras a establecer relaciones de dependencia.. (c) Formular argumentos deductivos para justificar la conjetura formulada. Para el segundo proceso: (a) Tomar una posición crítica-reflexiva ante las ideas o comentarios de los demás. (b) Usar el lenguaje geométrico (simbólico y diagramático) apropiado como medio de comunicación.

En cuanto a las problemáticas que se pueden encontrar en el proceso de solución de la tarea, se prevén tres. (i) Los estudiantes basados en una concepción errada de altura, según la cual la altura de un triángulo debe tener puntos del interior de este, construyen segmentos que no son alturas (e. g.., medianas, bisectrices). (ii) Los estudiantes representan un tipo de triángulo (e. g., acutángulo) y proponen una generalización teniendo en cuenta solamente ese caso, o hacen un arrastre limitado y formulan conjeturas no generales. Por ejemplo, si la representación que usan para generar la conjetura es como la que muestra la Figura 1, concluirán, a partir de la visualización, que solo los triángulos equiláteros tienen dos alturas congruentes.

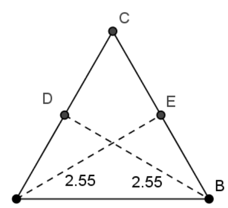



Figura 1. Triángulo que parece ser equilátero con alturas congruentes

(iii) Los estudiantes construyen las alturas del triángulo en cuestión sin considerar la definición. Específicamente, construyen el segmento con extremo un vértice del triángulo, que es perpendicular al lado opuesto y no a la recta que contiene ese lado. Si usan el arrastre para identificar la consecuencia de llegar a tener dos alturas congruentes, el proceso de exploración se verá interrumpido porque una de las alturas se desaparece. Ello incidirá en la posibilidad de formular una conjetura que generalice completamente la situación, porque no tienen en cuenta que un triángulo isósceles obtusángulo o acutángulo también puede compartir la propiedad, o conducirá a declarar que el problema no tiene solución.

---

[1] Dos aspectos cognitivos importantes de considerar en el análisis de instrucción, vinculados a la exploración dinámica, son: i) la conjetura debe resultar de un proceso de generalización a partir de un proceso de inducción empírica; y ii) la conjetura debe corresponderse con la exploración realizada.

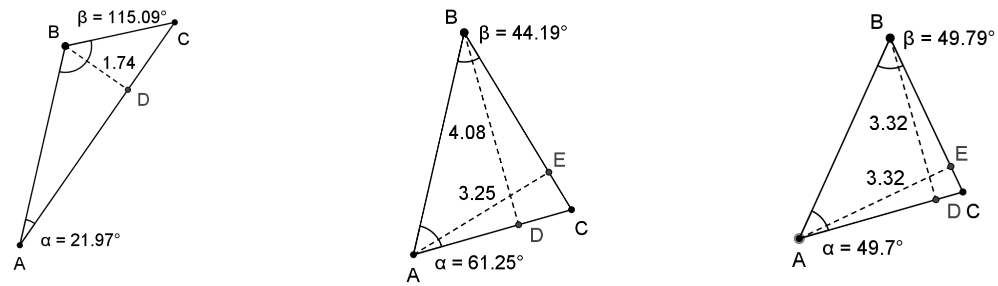



Figura 2. Tres instantes del proceso de arrastre en busca de alturas congruentes

En el cursillo revisaremos otros aspectos que usualmente no se tienen en cuenta, pero que son importantes para favorecer el aprendizaje significativo.

## REFERENCIAS

Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-293.

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, *3*(1), pp. 35-48.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 13-36). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Fonseca, H., Brunheira, L. y Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. En *Actas do ProfMat 1999* (pp. 91-101). Lisboa, Portugal: APM. Obtenido de:

http://ppgecm.ensinodeciencias.net/produtos/lydianne/pdf/14-1.pdf

Watson, A. y Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education. Tools and processes in mathematics teacher education* (vol. 2, pp. 109-134). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

# EL PROCESO MATEMÁTICO DE DEFINIR: MÁS ALLÁ DE CONOCER UNA DEFINICIÓN

**Claudia Vargas y Carmen Samper**
*Universidad Pedagógica Nacional*
cmvargasg@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

En este cursillo los asistentes realizarán actividades con geometría dinámica, con el fin de establecer posibles definiciones para un objeto geométrico específico y reconocer en qué consiste el definir como proceso matemático. Se presentará una herramienta analítica que permite evidenciar cómo promueve la argumentación y el comportamiento racional de estudiantes escolares. Se ilustrará su uso con un ejemplo de las interacciones de un grupo de estudiantes de décimo cuando realizaban esa actividad.

## JUSTIFICACIÓN

En las clases de matemáticas es habitual que el docente sea quien da las definiciones, con lo cual no hay espacio para que el estudiante participe en la construcción de las mismas y en el análisis de diferentes definiciones para un mismo objeto (Hershkowitz, 1990; Vinner, 1991). Las definiciones en las prácticas de geometría escolar son necesarias para que el estudiante pueda construir argumentos, razonar y comunicar sus ideas y que, a la vez, pueda usar la argumentación para evaluar y validar diferentes propuestas de definición de una figura geométrica (Furinghetti y Paola, 2002; Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008). Su participación les permite a los estudiantes pasar de ideas intuitivas acerca de un objeto geométrico, producto de experiencias empíricas, a definiciones formales mediante aproximaciones por refinamiento (Aya, Echeverry y Samper, 2014).

Así, las definiciones emergen como objetos de estudio en el contexto de la matemática escolar. Esto exige que el docente reflexione acerca del proceso de conformación de un concepto, el rol de la definición en este proceso y el tratamiento que se le debe dar cuando se introduce una definición. Un estudio realizado por Vargas y Betancur (2015) muestra que la participación de estudiantes de grado décimo en la construcción de definiciones promueve la formulación de diferentes tipos de argumentos y genera la preocupación por validar ideas.

Vargas, C. y Samper, C. (2017). El proceso matemático de definir: más allá de conocer una definición. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 93-97). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## MARCO DE REFERENCIA

El marco teórico que fundamenta el cursillo incluye dos aspectos. Por una parte, los referentes que precisar y explicar lo que significa definir en geometría y, en particular, en la geometría escolar. Por otra parte, los referentes que permiten analizar los discursos de los estudiantes cuando proponen y validan definiciones de un objeto geométrico.

Una *definición* en geometría es un enunciado que menciona las propiedades necesarias y suficientes para que una figura o relación pueda ser etiquetada con una expresión o una palabra. Para definir en geometría es necesario establecer las diferencias de un objeto con otros objetos similares, pues una definición agrupa figuras que cumplen un conjunto de propiedades específicas que no pueden ser ambiguas (Herbst, González y Macke, 2005). Además, estas definiciones se construyen con base en conceptos que se han definido y estudiado con anterioridad. Para un objeto o concepto matemático pueden existir muchas definiciones equivalentes (Chesler, 2012). En las matemáticas escolares, las definiciones se caracterizan por ser convencionales y no necesariamente económicas. Se eligen como respuesta a fines estéticos, didácticos u operativos (Calvo, 2001).

Cuando los estudiantes proponen definiciones, sus producciones orales se analizan según dos aspectos: (i) los argumentos proferidos (Toulmin, 1958) y (ii) el involucramiento en actividades propias del quehacer matemático, para lo cual usamos el modelo de comportamiento racional propuesto por Habermas y adaptado por Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010).

De acuerdo con Toulmin (1958), un argumento relaciona dos proposiciones, *datos* y *aserción*, por medio de una regla general denominada *garantía*. Los *datos* se refieren a hechos o propiedades que en algún momento se aceptan como verdaderos. La *aserción* menciona una propiedad que se considera como consecuencia de los datos. La *garantía* refiere a los principios o enunciados que permiten realizar inferencias que relacionan los datos con la aserción.

Por otra parte, el modelo de comportamiento racional en prácticas discursivas, propuesto por Habermas (Boero et al., 2010), distingue tres componentes: el *epistémico*, que se refiere al control de la validez de las proposiciones y a las formas válidas de razonamiento; el *teleológico*, que hace referencia a la formulación de un plan y la elección consciente de herramientas o elementos teóricos con el fin de lograr el objetivo planteado; y el *comunicativo*, que consiste en la elección adecuada de términos, aceptados por la comunidad para comunicar ideas.

La Figura 1 muestra características propias de cada aspecto del comportamiento racional en el proceso de proponer definiciones y evaluarlas.

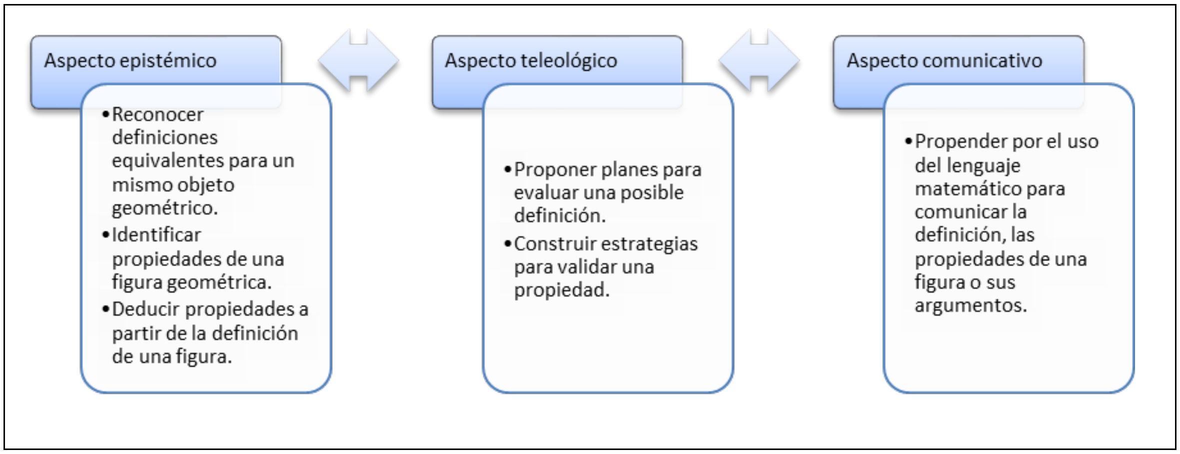



Figura 1. Características del comportamiento racional durante el proceso de demostración (Vargas y Betancur, 2015)

## DESARROLLO DEL CURSILLO

El cursillo se realizará en dos sesiones. La primera sesión tiene como objetivo que los asistentes reconozcan propiedades de una figura geométrica que podrían ser usadas para definirla, y a partir de la exploración con geometría dinámica, determinen qué conjunto de ellas conforman las condiciones suficientes y necesarias para definir la figura.

Por ejemplo, el siguiente conjunto de actividades tiene como objetivo que se propongan y evalúen posibles definiciones de cuadrado a partir de las propiedades que descubren con geometría dinámica:

1. ¿Qué es un cuadrado?

2. Construya un cuadrado en geometría dinámica y reporte los pasos de la construcción.

3. Compare la definición con los pasos que realizó para construir el cuadrado e indique si utilizó todas las propiedades reportadas en su definición del numeral 1 para construirlo.

4. Explore algunas propiedades de la figura construida y repórtelas.

A partir de conjuntos de propiedades que se descubren, se promueve un análisis para determinar qué subconjuntos de estas permiten proponer otra definición para cuadrado.

La segunda sesión tiene como propósito proveer a los participantes una herramienta analítica que les permita evaluar las prácticas discursivas de sus estudiantes cuando proponen y validan definiciones.

## REFERENCIAS


Aya, O., Echeverry, A. y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 35, 63-86.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, España.
Disponible en: http://www.tdx.cat/handle/10803/4689

Chesler, J. (2012). Pre-service secondary mathematics teachers making sense of definitions of functions. *Mathematics Teacher Education and Development*, *14*(1), 27-40.

Furinghetti, F. y Paola, D. (2002). Defining within a dynamic geometry enviroment: Notes from the classroom. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 392-399). Norwich, Reino Unido: University of East Anglia.

Herbst, P., González, G. y Macke, M. (2005). How can geometry students understand what it means to define in mathematics? *The Mathematics Educator*, *15*(2), 17-24.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge, Reino Unido: University Press.

Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. En L. Radford, G.

Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture* (pp. 195-214). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Vargas, C. y Betancur, J. (2015). *Análisis del comportamiento de los estudiantes cuando proponen una definición para una figura geométrica con el apoyo de geometría dinámica* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Disponible en: http://repository.pedagogica.edu.co/xmlui/handle/123456789/1920

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learnig of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-80). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Press.

# TAREAS QUE PROMUEVEN LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

**Jennyfer Zambrano y Carmen Samper**
*Universidad Pedagógica Nacional*
nifer86@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

Se presenta un instrumento de análisis que ayuda a identificar los objetivos y las características de una tarea propuesta y realizada en el contexto escolar. Usando el instrumento mencionado, se da un ejemplo del análisis de una tarea que propicia el uso comprensivo de elementos geométricos teóricos y de un argumento surgido cuando unos estudiantes de grado séptimo la resolvieron.

## INTRODUCCIÓN

Una de las funciones de un profesor de matemáticas es diseñar tareas para implementar en su clase con el fin de promover la construcción de conocimiento y la actividad matemática. El diseño de tareas incluye determinar, entre otras cosas, qué procesos matemáticos favorece la tarea, qué conocimientos se requieren para poder realizarla, y si promueve la argumentación en caso de que este sea uno de los objetivos.

En la primera sesión del cursillo se presentará un instrumento para analizar las tareas e identificar sus características, y se ejemplificará el análisis con una tarea específica. Además, se ilustrará cómo la tarea favoreció el objetivo propuesto. En la segunda sesión, los asistentes resolverán unas tareas para luego analizarlas, y se mostrarán ejemplos de respuestas de estudiantes.

## TAREAS MATEMÁTICAS

Para Triana y Zambrano (2016), una tarea matemática es un enunciado dentro de un contexto, relativo a situaciones de la cotidianidad o del marco disciplinar de las matemáticas, que demanda un esfuerzo cognitivo porque resolverla exige usar conceptos, algoritmos y representaciones. Las tareas se caracterizan por su estructura y por sus objetivos.

### Estructura de la tarea

Según Yeo (2007), una tarea tiene diferentes variables: la meta, el método, el andamiaje y la solución. A continuación se describen.

Zambrano, J. y Samper, C. (2017). Tareas que promueven la argumentación matemática. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 99-104). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

La *meta* está asociada a los elementos teóricos que se deben usar para resolverla, y a los procesos matemáticos que se quieren propiciar. La meta puede ser *cerrada* si es concreta (e. g., Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 7 cm, respectivamente, ¿cuánto mide la hipotenusa?), o *abierta*, si el estudiante tiene la posibilidad de escogerla (Investigue propiedades de paralelogramos).

El *método* tiene que ver con las estrategias para el proceso de solución de la tarea. Este puede ser *abierto* si existen varias estrategias para resolverla (Construya un triángulo equilátero dado el segmento $AB$), o *cerrado*, cuando hay que usar una estrategia determinada (e. g., Utilice el método de Thales para dividir un segmento en cinco partes congruentes.).

El *andamiaje* tiene que ver con la información que se incluye en la tarea. Está presente cuando en el enunciado se incluyen representaciones o esquemas que proveen ayuda al estudiante para resolverla. No está presente cuando no se plantean preguntas orientadoras o indicaciones que le permitan al estudiante saber cómo proseguir (e. g., Dividir un ángulo en cuatro partes congruentes).

La *solución* es el resultado final del desarrollo de la tarea. Esta puede ser *abierta* si hay varias respuestas correctas posibles, *no bien definida* cuando hay varias respuestas válidas y la tarea queda resuelta cuando el estudiante da una o más de ellas, *definida* cuando hay una única respuesta correcta, y *sin solución* cuando no existe una respuesta a la tarea.

Una tarea es abierta si el método lo es; de lo contrario, es una tarea cerrada.

## Objetivo de la tarea

Los objetivos están relacionados con los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar con la tarea. A continuación se presentan las características.

*Tareas de argumentación*: promueven el desarrollo de uno o más argumentos para justificar o explicar la respuesta haciendo uso de elementos teóricos (Silva, 2013).

*Tareas de justificación:* suscitan la explicación basada en experiencias apoyadas en procesos matemáticos como visualización, exploración, comprobación, comparación, estimación, etc.

*Tareas de conjeturación:* solicitan la formulación de una conjetura que exprese las relaciones que se descubren a partir de la exploración de una situación matemática.

*Tareas de investigación:* exigen escoger la meta y el método para poder establecer una conjetura, dados unos parámetros (Yeo, 2007).

*Tareas de traducción:* requieren la traducción de un enunciado, oral o escrito, en una expresión matemática. En el enunciado de la tarea se da la información necesaria para resolverla y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir. Son tareas típicas de textos; el método de solución se reduce a interpretar correctamente el enunciado, para elegir el algoritmo adecuado (da Ponte, 2004).

## ARGUMENTOS MATEMÁTICOS PROMOVIDOS EN LA TAREA

De acuerdo con Perry, Samper, Camargo y Molina (2013), un argumento está compuesto por tres elementos básicos: los datos ($p$), la aserción ($q$) se supone es consecuencia de los datos, y la garantía ($r: p \rightarrow q$) que es una proposición aceptada como válida y que relaciona los datos con la aserción. Un argumento puede ser deductivo, inductivo o abductivo, de acuerdo a cómo se estructura el argumento. Es deductivo si de $p$, usando $r$, se obtiene $q$; inductivo si de varias instancias de $p$ se evidencian como consecuencia instancias de $q$ y, de ello, se establece $r$. Es abductivo si se parte de la aserción para encontrar posibles datos ($p$), a partir de la garantía $r$ que tiene relación con la situación.

Teniendo en cuenta la forma como se estructura, el argumento puede ser *incompleto* si no se expresa explícitamente alguno de los tres elementos básicos de este (Samper y Toro, 2017). De lo contrario es *completo*. Según la naturaleza de su garantía, Krummheuer (2000) establece que un argumento es *analítico* si su estructura lógica es válida y se sustenta en un sistema teórico aceptado. Es sustancial, si la garantía incluye datos numéricos, dibujos, gráficas, etc., o si está basada en la experiencia con una representación ya sea en el computador o en papel. Este tipo de argumento no tiene el rigor lógico de la deducción formal. Samper y Toro (2017) consideran que hay argumentos sustanciales de otro tipo, que denominan *no legítimos*; corresponden a aquellos en los que se usa como garantía una afirmación que no es elemento del sistema teórico conformado en clase, la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.

## SABER USAR ELEMENTOS TEÓRICOS

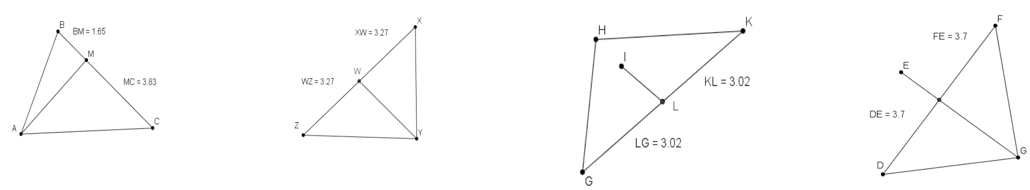
Saber usar postulados, teoremas y definiciones involucra acciones distintas. Según Samper y Plazas (2017), *saber usar un postulado o teorema* incluye principalmente dos acciones: (i) reconocer que es factible su uso en la situación que se está estudiando (ii) reconocer que su uso permite obtener lo que se busca (resolver un problema, formular una conjetura o producir una demostración). *Saber usar una definición* depende del tipo de información que se provee: cuando se menciona el término que designa al objeto, es *desencapsular* las propiedades que lo definen; cuando se ponen en juego las propiedades del objeto definido es *encapsularlas* para asignarle el término correspondiente.

## EJEMPLO: LA MEDIANA DE UN TRIÁNGULO

En la Figura 1 se presenta un ejemplo de tarea cuya resolución exitosa hace evidente el saber usar un hecho geométrico (teorema).

Considera la siguiente definición: Dado un triángulo, una *mediana* del triángulo es un segmento con un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto a ese vértice.

1. Represente en GeoGebra un triángulo con una de sus medianas.
2. Determina si lo que se afirma en cada caso es cierto. Explica tu respuesta.




(a) $\overline{AM}$ es mediana (b) $\overline{WX}$ es mediana (c) $\overline{IL}$ es mediana (d) $\overline{GE}$ es mediana

3. ¿Cuántas medianas tienen un triángulo?
4. Enumera las propiedades que hacen que un segmento sea mediana del triángulo.

Figura 1. Un nuevo contexto para usar la definición de punto medio

El objetivo de la tarea es introducir la definición de mediana para usar la definición de punto medio en un contexto nuevo. Según su estructura tiene las siguientes características:

| Variable | Característica |
|---|---|
| Meta | Cerrada. Se debe usar la definición de punto medio para representar medianas de triángulo y la definición de mediana para decidir si un segmento es o no mediana. |
| Método | Cerrado. Se debe usar la definición de mediana para representarla en GeoGebra. En la segunda parte, se deben usar las definiciones de mediana y punto medio para justificar las respuestas. |
| Andamiaje | Presente, porque al solicitar la construcción de una mediana se busca que el estudiante identifique claramente las dos condiciones requeridas para ser mediana de triángulo. |
| Solución | Definida, puesto que consiste en construir la mediana y decidir si el segmento representado es una mediana. |

Esta tarea se clasifica como no abierta porque el método es cerrado. Es de argumentación porque a partir de los datos presentados en las imágenes, usando tanto la definición de punto medio como la de mediana, se debe justificar la decisión respecto al segmento.

En el siguiente fragmento, se reporta la interacción de Mauricio y la profesora, cuando ella cuestiona la representación que él ha hecho en GeoGebra.

| | | |
|---|---|---|
| 627 | Profesora: | ¿Por qué puedo garantizar que el segmento CE es una mediana? |
| 628 | Mauricio: | La definición dice que dado un triángulo… (Lee la definición dada por la profesora de mediana de su cuaderno) |
| 631 | Profesora: | ¿Cuál condición cumple la mediana? |
| 632 | Mauricio: | Que digamos que es un segmento. |
| 633 | Profesora: | ¿Un segmento con qué característica? |
| 634 | Mauricio: | Que está en un vértice del triángulo. Del contrario, del que está al frente, cómo es que se llama… del lado opuesto (lee la definición) |
| 635 | Profesora: | ¿Cuál vértice? |
| 636 | Mauricio: | Sería el vértice $C$. Y el otro extremo está en punto medio. |

En el argumento de Mauricio se evidencia el uso de la definición de mediana como garantía. El estudiante plantea un argumento deductivo analítico en el que los datos son: segmento con extremos en $C$, vértice del triángulo, y en $E$ punto medio del lado opuesto (segmento $AB$). Encapsula las propiedades de mediana para dar como aserción que el segmento $CE$ es mediana.

## REFERENCIAS


da Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. da Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 25-34). Barcelona, España: Graó.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 22-32.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). *Innovación en el aula de geometría a nivel universitario*. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 13-66). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagogica Nacional.

Samper, C. y Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación Matemática*, *29*(1), 37-60.

Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 367-382. Recuperado de:

http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346

Silva, L. H. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Triana, J. y Zambrano, J. (2016). *Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación* (Tesis de maestría). Universidad Pedagogica Nacional, Bogotá, Colombia.

Yeo, J. B. (2007 ). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment (Reporte técnico ME2007-01). Nanyang, Singapur: Nanyang Technological University. Recuperado de:

https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/949/3/MathematicalTasks.pdf

# Comunicaciones breves

# ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL DE UNA IMAGEN MEDIANTE EL MÉTODO DEL PRISMA

**Jesús Azor**
*Universidad de Mendoza, ARGENTINA*
jesus.azor@um.edu.ar

El presente trabajo pretende lograr una perspectiva de la importancia de la Geometría general en los desarrollos científicos actuales, tal el caso de la Geometría Fractal. En el caso de tratamiento de imágenes de diverso origen como medicina, geología, biología, etc., la dimensión fractal representa una medida que permite determinar cualidades y comportamientos que no se logran identificar con otras técnicas. A través del desarrollo propuesto, se pretende fundamentalmente que docentes y alumnos del nivel universitario encuentren una herramienta de fácil uso, perfectamente replicable en su instrumentación y que promueve aprendizajes significativos a través de la vinculación.

## INTRODUCCIÓN

> "Es la gloria de la geometría que a partir de tan pocos principios, sin que lo buscara, fuera capaz de lograr tanto".
>
> Sir Isaac Newton

Históricamente, el interés en la geometría ha sido estimulado por sus aplicaciones a la naturaleza. La elipse tiene importancia por la forma de las órbitas planetarias, así como la esfera por la forma de la tierra. La geometría de la elipse y de la esfera puede ser aplicada a estas situaciones físicas.

Por supuesto, las órbitas no son perfectamente elípticas y la tierra no es exactamente esférica, pero para muchos propósitos, como la predicción del movimiento planetario o el estudio del campo gravitatorio de la tierra, estas aproximaciones pueden ser perfectamente adecuadas.

Es interesante observar cómo la Geometría ha avanzado en sus concepciones hacia nuevos estadios que presentan gran utilidad a la ciencia moderna. Por caso, la aparición de los fractales ha abierto un amplio camino a la inves-

Azor, J. (2017). Algoritmo para la determinación de la dimensión fractal de una imagen mediante el método del prisma. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 107-112). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

tigación científica en la concreción de nuevas herramientas para caracterizar los fenómenos de la naturaleza (Mandelbrot, 1983; Barnsley, 1993).

Un vistazo a la reciente literatura en física permite vislumbrar la variedad de objetos naturales que son descritos como fractales –límites de nubes, superficies topográficas, líneas costeras, turbulencia en fluidos, etc–. Ninguno de estos es realmente fractal –las características de fractal desaparecen cuando aquellos se examinan a escalas suficientemente pequeñas–. Sin embargo, sobre ciertos rangos de escala, resultan muy parecidos a fractales y a esas escalas usualmente se consideran como tales.

En las aplicaciones usuales, la *dimensión fractal* toma notable protagonismo en la caracterización de objetos, formas y superficies en algunas áreas del conocimiento. Los ejemplos típicos abarcan una amplia gama en campos tan diferentes como la medicina, el análisis de textura, la geología, biología, ingeniería de materiales, electrónica, física, histología, el análisis del suelo, análisis de polímeros, etc.

## MÉTODO DEL PRISMA (*TRIANGULAR PRISM SURFACE AREA*, TPSA)

Existe una gran variedad de métodos para determinar la dimensión fractal de formas que no son fractales puras. Uno de los más utilizados, por su simpleza y resultados aceptables, es el llamado conteo de cajas (*box-counting*), el cual se puede aplicar a curvas, superficies o volúmenes.

El método anterior, respecto al caso de imágenes, necesita que la matriz que representa la imagen sea binaria (es decir, con solo elementos 0 y 1).

Se requiere entonces "binarizar" una imagen con niveles de grises (elementos de la matriz compuestos de números entre 0 y 255) mediante algún método de umbralamiento. Esto es generalmente aplicable para la determinación de un contorno, al cual posteriormente se le determina la dimensión fractal.

Un ejemplo es el de una Región de Interés (ROI) de una imagen mamográfica en la que se sospecha una situación patológica. A partir del proceso de binarización se determina el contorno de la lesión y calculando la dimensión fractal se puede inferir si esta es maligna o no. Contornos redondeados indican benignidad, en cambio si son irregulares ("espiculados") apuntan a algún grado de malignidad.

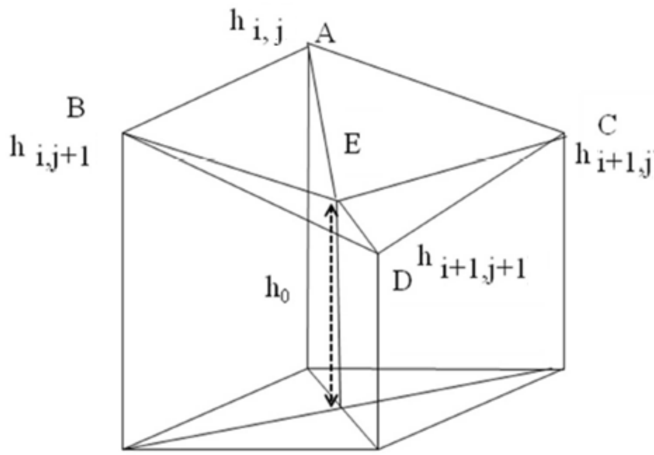



Figura 1. Esquema básico para encontrar la dimensión fractal mediante el método TPSA

En Clarke (1986) se propuso un método para hallar la dimensión fractal considerando la imagen en niveles de grises, que recibe el nombre de *método del prisma triangular, TPSA*. La representación esquemática para la medición del área de superficie prisma triangular se muestra en la Figura 1.

En este trabajo se va a seguir una variante del algoritmo de Clarke, debida a Tang y Wang (2005). La imagen original se supone que está representada por una matriz de tamaño $M \times M$ como en el método de conteo de cajas, con la diferencia de que ahora los elementos de la misma no son exclusivamente 0 y 1 sino númros enteros entre 0 y 255.

*Paso 1*: La imagen se divide en diferentes rejillas cuadradas de tamaño $r$. Considerada una de ellas, se especifican cuatro puntos del cuadrado $A$, $B$, $C$, $D$ sobre la superficie fractal. Estos puntos están representados por el valor de nivel de gris de la imagen en ese punto.

Para el caso de la Figura 1, las alturas correspondientes en valores de nivel de gris son $h_{i,j}$, $h_{i,j+1}$, $h_{i+1,j}$ y $h_{i+1,j+1}$ respectivamente.

*Paso 2*: La distancia desde el plano de planta hasta el centro de cada celda de la cuadrícula (identificada por E) de las cuatro alturas de los puntos adyacentes puede calcularse como:

$$h_0 = \frac{1}{4}(h_{i,j} + h_{i,j+1} + h_{i+1,j} + h_{i+1,j+1})$$

*Paso 3*: Se halla el área de los triángulos $ABE$, $ACE$, $CDE$ y $BDE$ y se suma ($S_{i,j}$).

*Paso 4*: Teniendo en cuenta toda la imagen, el área total de la superficie fractal es:

$S_r = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} S_{i,j}$,

donde $N_r$ es el número total de los cuadrados regulares de tamaño $r \times r$.

*Paso 5*: En la geometría fractal, el área total de la superficie fractal $S_{ij}$, la escala $r$ y la dimensión fractal $D$ están relacionadas por

$S_r \sim r^{2-D}$.

Se repiten los pasos1-5 con diferentes valores de $r$.

Entonces log $(s(r))$ y log(r) se representan gráficamente en el sistema de coordenadas log-log. Si la pendiente de la línea recta mejor ajustada a los puntos es $b$, la dimensión fractal $D$ de la imagen es:

$D = 2 - b$.

## IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO

Para la realización de un programa informático que calcule la dimensión fractal de una imagen por el método del prisma, se procede, conforme a lo visto más arriba, siguiendo el procedimiento desarrollado a continuación.

Para ilustrar los pasos seguidos y permitir la replicación del algoritmo, se habrá de considerar una imagen en niveles de grises generada en forma aleatoria, representada por una matriz de tamaño $17 \times 17$ pixeles, como se puede observar en el artículo disponible en: www.um.edu.ar/math/prisma.pdf.

Para el desarrollo computacional se utilizó el *software* Matlab, creando la función *prisma2.m*, que se detalla en el citado documento. Las instancias a cumplir fueron las siguientes:

1. Se determinó el valor de la constante *ex* según la dimensión de la matriz que representa a la imagen. Tal constante indica el número de iteraciones que realiza el procedimiento. Para el caso que se ejemplifica es 5.

2. Luego se seleccionaron cuadrados adyacentes de tamaño 2 como base, recorriendo toda la rejilla y calculando las áreas correspondientes, acumu-

ländolas en la variable $S$. En total se utilizaron 256 rejillas.

3. Posteriormente se aumentó el tamaño de los cuadrados adyacentes a 3. Calculando las áreas como en el paso anterior, se utilizaron en este caso 64. Luego, de tamaño 5, resultan 16; de tamaño 9, resultan 4, y finalmente, de tamaño 17, resulta 1.

4. Las áreas calculadas en cada paso, van siendo almacenadas (junto a su resolución) en una matriz indicada como $T$.

5. Una vez terminadas las iteraciones, los resultados se muestran en la Figura 2, a la izquierda. Tomando los logaritmos de cada una de las columnas de la matriz $T$ y volcándolos en un gráfico, el diagrama de dispersión muestra cinco puntos prácticamente alineados.

6. Mediante un ajuste por mínimos cuadrados, se halló la recta indicada por puntos que mejor se ajusta a los cinco puntos, como se muestra a la derecha de la Figura 2.

| r | Área | log(r) | log(Área) |
|---|---|---|---|
| 1 | 30568 | 0 | 4.4853 |
| 4 | 14682 | 0.6021 | 4.1668 |
| 16 | 9451 | 1.2041 | 3.9755 |
| 64 | 4637 | 1.8062 | 3.6662 |
| 256 | 2494 | 2.4082 | 3.3969 |

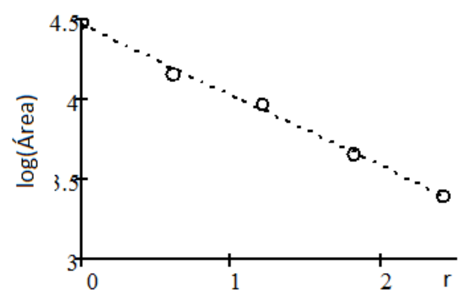



Figura 2. Derecha, tabla resultante del cómputo de áreas en función de la resolución ($r$). Izquierda, gráfico log-log con la recta de mejor ajuste por mínimos cuadrados

Como resultado del ajuste, la pendiente de la recta tiene el valor -0.445, con lo que la dimensión fractal de la imagen resulta ser $D = 2 - (-0.445) = 2.447$.

## Conclusiones

Según lo expuesto, se puede apreciar la importancia de desarrollos geométricos simples en un campo tan impactante como es el de la Geometría Fractal.

A partir de la solución computacional propuesta, que puede ser ampliada y mejorada, se cuenta con una herramienta para acceder a tareas de investigación en diferentes campos de la ciencia donde la dimensión fractal de imágenes sirva como indicador de variadas situaciones.

Estos conceptos están siendo ahora utilizados en el proyecto de investigación "Clasificación de tejidos mediante la característica fractal de la imagen mamográfica", que se lleva a cabo en la Facultad de Ciencias Médicas de la Universidad de Mendoza.

## REFERENCIAS


Barnsley, M. F. (1993). *Fractals everywhere*. San Diego, EUA: Academic Press.

Clarke, K. C. (1986). Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method. *Computers and Geosciences, 12*(5), 713-722.

Mandelbrot B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York, EUA: Freeman, New.

Tang, M. y Wang, N. (2005). Feature analysis of brain MRI images based on fractal dimension. En *IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference* (pp. 3245-3248). DOI: 10.1109/IEMBS.2005.1617168.

# Estructuras semitopológicas: construcciones y ejemplos

**Wilson Forero** y **Reinaldo Montañez**
*Universidad Nacional*
wilsonforerob@gmail.com, jrmontanezp@unal.edu.co

Los funtores topológicos surgen del estudio del funtor de olvido, de la categoría de los espacios topológicos a la categoría de los conjuntos. Una forma de generar nuevas categorías topológicas a partir de las ya existentes es a través de endofuntores, en la categoría de los denominados elevadores y coelevadores de estructura, cuyos puntos fijos constituyen una categoría topológica. Al debilitar la noción de funtor topológico surgen los funtores semitopológicos; estos permiten estudiar una mayor variedad de categorías. Surge la inquietud de formar categorías semitopológicas a partir de las ya conocidas. Un posible camino es a partir de subcategorías reflexivas.

## Funtores topológicos

Al considerar una fuente unitaria $f: X \to Y$, donde $Y$ es el conjunto subyacente del espacio topológico $(Y, \tau)$, nos preguntamos por la menor topología sobre $X$ que hace que $f$ sea continua. En tal caso, se determina el conjunto $S = \{f^{-1}(A) \mid A \text{ es abierto de } Y\}$, donde $S$ es una topología sobre $X$ y es la solución al problema planteado, y se conoce como la *topología inicial* sobre $X$ inducida por la función $f$. Esta construcción nos indica que dada una fuente unitaria estructurada en la categoría de los conjuntos, es posible levantarla a la categoría de los espacios topológicos.

Ahora, si deseamos estudiar los levantamientos de fuentes entre dos categorías, como ocurre entre los conjuntos y los espacios topológicos, surge la inquietud de estudiar funtores $F: A \to B$ para los cuales dada una fuente estructurada $(X, f_i)$ en $B$ con $f_i: X \to Y_i$, exista una fuente $(X, f_i)$ en $A$ tal que $F(f_i) = f_i$. Es por ello que en Adámek, Herrlich y Strecker (2004) se busca contestar esta duda por medio del siguiente concepto.

*Definición 1.* Un funtor $F: A \to B$ es *topológico* si para toda fuente $(X, f_i')$ en $B$ existe un único levantamiento $(\overline{X}, f_i)$. En tal caso, se dice que $A$ es una *categoría topológica fibrada* sobre $B$.

Forero, W. y Montañez, R. (2017). Estructuras semitopológicas: construcciones y ejemplos. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 113-117). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## Elevadores y coelevadores de estructura

Dado un funtor topológico es natural buscar funtores asociados a este que preserven las características propias de levantamientos de fuentes y sumideros. Esto fue estudiado por Reinaldo Montañez en su tesis doctoral (Ruiz y Montañez, 2006), por medio de elevadores y coelevadores de estructura.

*Definición 2***.** Sea $F: A \to B$ un funtor topológico. Se dirá que un funtor $E: A \to A$ es un *elevador de estructura* si:

1. $F \circ E = F$ (i. e., $E$ es un funtor concreto)

2. $X \leq E(X)$, para todo $X \in Ob(A)$.

Se dirá que $X \leq E(X)$ si existe un morfismo $f: E(X) \to X$ tal que $Ff = id_{FX}$. En la definición anterior, si se invierte la desigualdad $X \leq E(X)$, se tendrá el concepto de *coelevador*, esto es $C: A \to A$ es un coelevador de estructura, si $C$ es concreto y $C(X) \leq X$ para todo $X \in Ob(A)$.

Con los conceptos anteriores es posible formar nuevas categorías topológicas por medio de la categoría $E(A)$ formada por los puntos fijos de elevadores o $C(A)$ respecto a los coelevadores, es decir:

*Teorema 1***.** Sea $F: A \to B$ un funtor topológico y $E: A \to A$ un funtor concreto e idempotente. Entonces $E(A)$ es una categoría topológica.

Lo anterior adaptado a elevadores y coelevadores genera el siguiente resultado:

*Corolario 1***.** Sea $F: A \to B$ un funtor topológico y $E: A \to A$ un elevador (coelevador) idempotente. Entonces $E(A)$ es una categoría topológica.

### CATEGORÍAS SEMITOPOLÓGICAS

Al debilitar las nociones de levantamientos surgen los funtores topológicamente algebraicos, los cuales exigen que las fuentes tengan factorizaciones del tipo generador, fuente inicial, permitiendo así que categorías como las de los espacios de Hausdorff, los grupos, los espacios vectoriales, por mencionar algunas, cumplan este tipo de factorizaciones con respecto al funtor de olvido en la categoría de los conjuntos. Ahora, esta noción no se comporta bien respecto a la composición usual de funtores; es decir, si se componen dos funtores topológicamente algebraicos no necesaria-mente esta composición da un funtor topológicamente algebraico. Ejemplos del fenómeno anterior se pueden encontrar en Adámek, Herrlich y Strecker (2004) y Tholen (1979).

Debido al problema de la cerradura bajo la composición usual de los funtores topológicamente algebraicos, en Tholen (1979) se definen soluciones semifinales para sumideros estructurados, las cuales son una noción debilitada de las factorizaciones (Generador, Fuente inicial).

*Definición 3.* Sea $F: A \to B$ funtor y $(X, f_i)$ un sumidero estructurado, con $f_i: FA_i \to X$. La pareja $(A, g)$, donde $g: X \to FA$, se dirá *solución semifinal* si satisface:

1. $g \circ f_i = Fh_i$ con $h_i: A_i \to A$.

2. Si existe $(A', g')$ y $h_i': A_i \to A'$ tal que $g' \circ f_i = Fh_i$, entonces existe $w: A \to A'$ que satisface $Fw \circ g = g'$ y $w \circ h_i = h_i'$.

Si lo anterior se tiene para cada sumidero estructurado, se dirá que $F: A \to B$ es un *funtor semitopológico* y que $A$ es una *categoría semitopológica* relativa a $B$. La importancia de los funtores semitopológicos radica en la búsqueda de la cerradura bajo la composición usual de funtores, por lo cual se visualiza con naturalidad el siguiente hecho (Adámek, Herrlich y Strecker, 2004):

*Teorema 2.* Si $F$, $G$ son funtores semitopológicos, entonces $F \circ G$ es semitopológico.

## SEMICOELEVADORES DE ESTRUCTURA

*Definición 4***.** Sea $F: A \to B$ un funtor semitopológico y $SC: A \to A$ un funtor, se dirá que *SC* es un *semicoelevador de estructura* si para todo objeto $X$ de $A$ existe un morfismo $g_x: X \to SC(X)$ en $A$ tal que los morfismos $Fg_x$ formen una transformación natural entre los funtores $F$ y $F \circ SC$.

Un ejemplo del concepto anterior son los coelevadores de estructura, debido a que en tal caso las $g_x$ son identidades y $Fg_x = id_{FX}$, y se entenderá por *semielevador de estructura* a un funtor $SE: A \to A$ tal que para cada $X$ en $A$ existe $f_x: SE(X) \to X$ en $A$ tal que las $Ff_x$ formen una transformación natural.

Debido a que los semicoelevadores de estructura generalizan el concepto de coelevación para funtores semitopológicos es pertinente preguntarse en qué condiciones la categoría $SC(A)$ formada por los puntos fijos de $SC$ es semitopológica, lo cual motivó el siguiente enunciado:

*Teorema 3.* Sea $F: A \to B$ un funtor semitopológico y $SC: A \to A$ un semicoelevador de estructura idempotente, entonces $SC(A)$ es una categoría semitopológica relativa a $B$.

Demostración: Sean $A_i \in \mathrm{Obj}(SC(A))$ y $f_i : FA_i \to X$. Como $F$ es semitopológico, el sumidero $(f_i, X)$ posee solución semifinal $(g, A)$ en $A$. Con esto presente se construirá la solución semifinal en $SC(A)$. Debido a que $SC$ es un semicoelevador, existe un morfismo $h: A \to SC(A)$; como $SC$ es idempotente, $SC(A) \in \mathrm{Obj}\,(SC(A))$. Con $h_i = g_i \circ h$, probaremos que $(h \circ g, SC(A))$ es la solución semifinal en $SC(A)$ del sumidero $(f_i, X)$. Para ello, supongamos que existe $C \in \mathrm{Obj}\,(SC(A))$ tal que existen $l: X \to FC$ y $l_i: A_i \to C$ tal que $Fl_I = l \circ f_i$. Como $A$ es solución semifinal de $(f_i, X)$, existe un morfismo de $w: A \to C$ que satisface $l = w \circ g$ y $l_i = w \circ h_i$. Al aplicar $SC$ a $w$, se tiene que $SC(w): SC(A) \to SC(C)$. Como $C$ es punto fijo, esto implica que $SC(w): SC(A) \to C$. Aplicando $F$ se tiene que el diagrama de la Figura 1 conmuta.

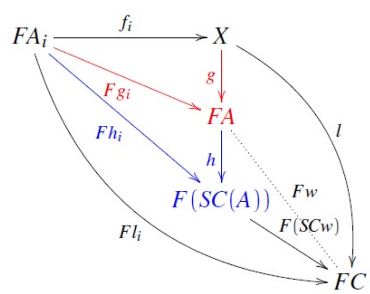



Figura 1. Semicoelevadores de estructura

Por lo tanto, $(h \circ g, SC(A))$ es la solución semifinal en $SC(A)$ del sumidero $(f_i, X)$ esto implica que $F: SC(A) \to B$ es semitopológico y $SC(A)$ es una categoría semitopológica.

Es interesante que las subcategorías reflexivas son un ejemplo de semicoelevadores de estructura. Para entender esto, sea $C$ subcategoría reflexiva de $A$. Ella induce un funtor $R_{\boldsymbol{C}}: C \to A$ tal que a todo objeto $A$ en $A$ le asigna su reflexión $C_A$ en $C$; $R_{\boldsymbol{C}}$ es idempotente. Además, por ser una subcategoría reflexiva $C$, existe un morfismo $g: A \to C_A$ lo cual conduce a que si existe un funtor semitopológico $F: A \to B$, el funtor $R_C$ es un semicoelevador de estructura, pleno e idempotente, cuyos puntos fijos corresponden a la subcategoría $C$, por lo que al adaptar el Teorema 3 a lo anterior se tiene el siguiente resultado:

*Corolario 1.* Sea $F: A \to B$ un funtor semitopológico y $C$ una subcategoría reflexiva de $A$. Entonces $C$ es una categoría semitopológica relativa a $B$.

Este corolario nos indica cómo formar nuevas categorías semitopológicas a partir de las ya conocidas. A continuación veamos algunos ejemplos.

*Ejemplos*

Sea $Ab$ la categoría de grupos abelianos, la cual es subcategoría de la categoría de grupos $Grp$. Se verá que es reflexiva. Sean $(G,*)$ un grupo y $G'$ el *grupo* generado por el conjunto $\{ab\,a^{-1}b^{-1}/a,b \in G\}$. $G'$ es un subgrupo normal de $(G,*)$, y el cociente $(G/\,G',*)$ resulta un grupo abeliano. Ahora bien, el homomorfismo canónico $q_G: (G,*) \to (G/\,G'$ es el morfismo reflexión. En el caso de que existan $(H\,,\Delta)$ en $Ab$ y $h: (G,*) \to (H\,,\Delta)$ un homomorfismo, existe de manera natural el homomorfismo $h: (G\,/\,G',*) \to (H\,,\Delta)$ definido por $h(\bar{g}) := h(g)$, tal que $h \circ q_G = h$. Por lo tanto $Ab$ es una categoría semitopológica.

La categoría de los espacios topológicos que cumplen el primer axioma de separabilidad $Top_{T_0}$ es una subcategoría de $Top$. Dado un espacio topológico $(X,\tau)$, se define la relación $a \sim b$ si y solo si $\overline{\{a\}} = \overline{\{b\}}$ (la clausura de $\{a\}$ es igual a clausura de $\{b\}$), esta relación es de equivalencia y genera el espacio $(X/\!\sim,\tau)$. Sea $q_X$ la función canónica, $q_X: (X,\tau) \to (X/\sim,\tau)$. Al asignar al espacio $(X/\!\sim,\tau)$ la topología final asociada a dicha función, esta resulta continua. Esta construcción hace que $Top_{T_0}$ sea una categoría reflexiva de $Top$ con lo cual $Top_{T_0}$ es una categoría semitopológica.

## REFERENCIAS


Adámek, J., Herrlich, H. y Strecker, G. (2004). *Abstract and concrete categories. The joy of cats*. Disponible en: http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf (primera edición en inglés, 1990).

Ruiz, C. y Montañez, R. (2006). *Elevadores de estructura*. *Boletín de Matemáticas*, XIII, 2, 111 -135.

Tholen, W. (1979). Semi-topological functors I. *Journal of Pure and Applied Algebra, 15*(1), 53-73.

# POTENCIALIDADES DEL USO DEL CUBO SOMA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

**Camilo Fuentes, Sonia Vanegas y Sandra Téllez**
*Colegio Paulo VI*
ccfuentes@unal.edu.co, soluvamar@gmail.com, sandramilenatellez@gmail.com

El propósito de este texto es comunicar una experiencia del uso del Cubo Soma como un recurso articulador de diferentes conceptos matemáticos, experiencia que se llevó a cabo en un aula de un colegio oficial de Bogotá (Colombia).

La experiencia de aula, de la que aquí se relatan algunos detalles, se apoya en Corbalán (1994), quien propone el juego como estrategia importante en el aprendizaje de las matemáticas. También se vale de experiencias previas en otras instituciones como la presentada por Rupérez y García (2010), quienes muestran el uso del Cubo Soma como material didáctico para el desarrollo de las competencias básicas y el aprendizaje de las matemáticas de una manera lúdica en escuelas españolas.

De manera breve, esta experiencia está compuesta por varios momentos: en el primero, se hace la construcción y caracterización de las piezas que constituyen el material; en el segundo, a partir de la manipulación y del ensayo y error, los estudiantes encuentran una estrategia para construir un cubo de $3\times3\times3$; y en el último momento se identifican las características geométricas y espaciales de las piezas: área, volumen, vistas de las piezas y diferentes construcciones que se pueden elaboran con este material.

Algunos elementos de reflexión sobre el uso de este material en clase giran en torno a las potencialidades del Cubo Soma en el desarrollo de la perspectiva plano-espacial, la representación de un cuerpo a través de sus diferentes figuras (frontal, perfil y lateral) y la construcción de conceptos geométricos como área y volumen a través de la manipulación de material tangible.

## EL CUBO SOMA COMO RECURSO DIDÁCTICO

El Cubo Soma es un rompecabezas en tres dimensiones, construido en 1936, por el danés Piet Hein, quien fue ingeniero, escritor, inventor, matemático y diseñador. Lo conforman 27 cubos de igual tamaño, agrupados en 7 piezas,

Fuentes, C., Vanegas, S. y Téllez, S. (2017). Potencialidades del uso del Cubo Soma en la clase de matemáticas. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 119-124). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

denominadas policubos irregulares (Figura 1). Cada pieza es un poliedro cóncavo; 6 de ellas, llamadas tetracubos, están formadas, cada una, por 4 cubos, y la otra pieza, el tricubo, está formada por 3 cubos. De este juego, es interesante conocer y experimentar todas las formas[1] de armar el cubo con las 7 piezas del rompecabezas.

Figura 1. Representación de las piezas del Cubo Soma

Con este cubo, los docentes del área de matemáticas contamos con un material que al ser explorado por los estudiantes resulta un rompecabezas que, desde un contexto real y concreto, permite concatenar aspectos vinculados con la educación matemática, tener afinidad con el área artística y manejar hechos propios de la formación social de los estudiantes.

Con respecto a las acciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, al manipular el Cubo Soma se pueden desarrollar habilidades espaciales de visualización e impulsar la formación y generalización de conceptos geométricos (e. g., poliedro, medida de superficie, medida de volumen, proyección geométrica, rotación y traslación). Este acercamiento a los conceptos geométricos mencionados se logra a partir de la construcción de figuras con las 7 piezas o menos y al hacer representaciones diversas en dos o tres dimensiones. Adicionalmente, se desarrolla la creatividad de acuerdo al nivel de complejidad de las estructuras y de las diversas formas (animales, objetos) construidas por los estudiantes.

Además, el uso del Cubo Soma en el aula como recurso didáctico les permite vivenciar a los estudiantes el trabajo cooperativo si se abren espacios para elaborar conjeturas relacionadas con los conceptos matemáticos que se están aprendiendo, para comentar las acciones realizadas durante el proceso de construcción, para discutir con sus compañeros en cada uno de los momentos

[1] David Goodger en su website “Polycubes: Puzzles & Solutions” presenta 240 formas (ver http://puzzler.sourceforge.net/docs/polycubes.html#soma-cubes)

de la actividad con el recurso. Como juego, el Cubo Soma es una actividad motivadora y se convierte en un reto a la hora de realizar las actividades en el aula de matemáticas.

## BREVE DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA

1. *Construcción*. Los estudiantes consultaron acerca del Cubo Soma, su historia, origen y uso. Trajeron a la clase: 27 cubos de madera de igual tamaño, pegante y vinilos. En la clase se construyeron las 7 piezas del Cubo Soma y cada pieza se pintó de un color diferente.

2. *Manipulación*. Se construyó el Cubo Soma de $3\times3\times3$, por lo menos de dos formas diferentes.

3. *Reconocimiento de las piezas*. Se asignó un número a cada pieza para facilitar la respectiva referencia. De cada pieza se hizo una representación tridimensional en el plano, y se dibujaron las vistas superior, lateral y frontal en dos dimensiones de cada pieza (Figura 2).

4. *Identificación de los elementos geométricos*. Se determinó el número de vértices, aristas y caras de cada pieza (Figura 2).

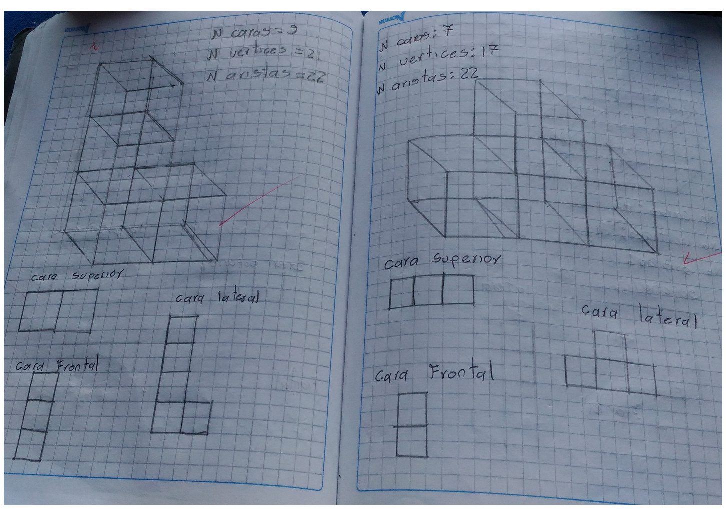



Figura 2. Representación de las caras de cada pieza y conteo de elementos

5. *Ejercitación*. Se construyeron figuras que requerían dos, tres o cuatro piezas del Cubo Soma, las cuales debían armar y dibujar su proyección sobre la silueta propuesta de cada figura (Figura 3).

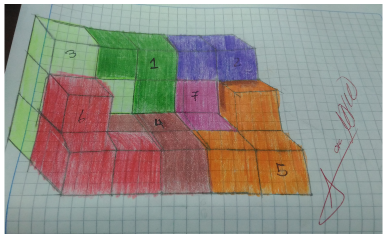


Figura 3. Composición de una figura con las 7 piezas

6. *Identificación de área y volumen*. Se tomaron como unidades de medida para la longitud, una arista, 1u de un cubo; para el área, $1u^2$; y para el volumen, $1u^3$. Con esta convención, se determinaron el área lateral, el área total y el volumen de las piezas del Cubo Soma y de diferentes figuras construidas con las piezas.

7. *Dibujo en representación tridimensional*. Se pidió a los estudiantes hacer para diferentes figuras construidas con el material, su representación tridimensional, usando un papel con trama isométrica (Figura 4).

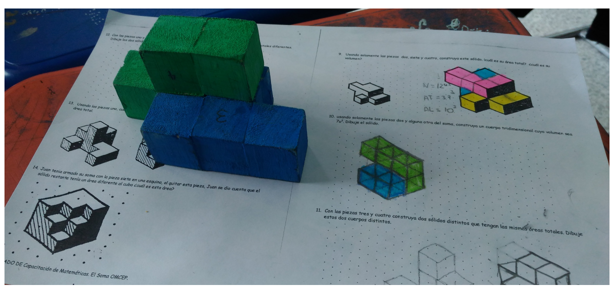


Figura 4. De la figura a la representación tridimensional en el plano

8. *Reto*. Se pidió a los estudiantes armar por los menos tres figuras con las siete piezas del Cubo Soma (Figura 5), escogidas entre un conjunto de figuras propuestas. Luego, debían hacer la representación tridimensional de una de ellas en un plano, señalando la proyección de las piezas.

Figura 5. Construcción de una figura humana

## HIPÓTESIS SUBYACENTES EN LA EXPERIENCIA DE AULA

El uso del Cubo Soma como recurso didáctico puede potenciar el aprendizaje de aspectos como la identificación y caracterización de las partes de un sólido (cara, arista y vértices), y de elementos básicos de geometría proyectiva por medio de la construcción de las vistas superior, lateral y frontal de las piezas o las figuras construidas con ellas. Además de promover estos aspectos del pensamiento espacial, se puede emplear para la construcción de conceptos como área lateral, perímetro y volumen. Por ejemplo, por medio de la búsqueda del volumen, el perímetro y el área lateral de las piezas, se puede concluir que aunque varias piezas tengan el mismo volumen, el área lateral no es la misma.

De igual forma, los movimientos en el espacio que usan los estudiantes para armar las diferentes figuras del Cubo Soma pueden familiarizarlos con los conceptos de rotación, traslación y simetría.

Con respecto al pensamiento numérico y variacional, estos se pueden potenciar al determinar las áreas lateral y total y el volumen de una pieza o una figura particular. Los valores que puede tomar el lado de una ficha pueden ir desde un número natural –cuando asignamos como unidad de medida 1u a la arista del cubo– pasando por números fraccionarios –si la unidad de medida es, por ejemplo, 1/3 u–, números decimales –si tomamos la medida exacta en cm de cada cubo elaborado por el estudiante– hasta el uso de expresiones algebraicas –cuando asignamos como unidad de medida un número generalizado, $x$. Al usar este tipo de valores se estimula las habilidades de realizar operaciones entre expresiones algebraicas, de establecer generalizaciones y de utilizar las propiedades de los diferentes conjuntos numéricos.

## PARA TERMINAR

La experiencia que hemos comunicado ilustra cómo el juego puede aportar positivamente en las dinámicas del aula, pues se asume como un reto, presenta las matemáticas desde una perspectiva activa y lúdica para el estudiante. Es necesario tener en cuenta que las actividades propuestas deben ir ajustadas a las necesidades del currículo y el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

## REFERENCIAS

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Rupérez, J. y García, D. (2010). Graduación de la dificultad en el Cubo Soma (I). *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 75*, 165-173. Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Juegos_01.pdf

# DECÁLOGO DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO

**Javier Jiménez**
*Instituto Técnico Industrial Piloto. I.E.D.*
educacionmtic@gmail.com, javier_jimenez@javeriana.edu.co

El objeto del presente escrito gira en torno a las posibilidades que hay para calcular el área de un triángulo. Cada posibilidad está sujeta a los elementos que se conozcan del triángulo en cuestión y al nivel de complejidad en el que se enmarque. Estos niveles tienen relación directa con la historia de las matemáticas. Aunque se cuenta con diversas estrategias para determinar el área, en la escuela, al parecer, se enfatiza, y por lo tanto se identifica, solo una de ellas.

## HISTORIAS Y ESTRATEGIAS PARA DETERMINAR EL ÁREA

Se procura tratar los conceptos conexos con el área del triángulo, señalando los algoritmos que se usan para calcularla; estos obedecen a las estrategias que se adopten y a los elementos geométricos y métricos con los que se cuente.

1. *Por comparación*. Retrocediendo a la antigüedad, uno de los intereses de los griegos fue, por un lado, recopilar los conocimientos de los babilonios y de los egipcios y, por el otro, emplear las matemáticas para describir la naturaleza, empresa que planteó la interpretación racional de los fenómenos naturales y se originó, al parecer, debido a su labor empírico-práctica. Cabe sugerir la lectura de *Euterpe*, el libro II de *Los nueve libros de la historia* escrito por Herodoto, donde en la sección CIX ilustra cómo nació la geometría, tras las conquistas de Sesostris y luego de trazar los fosos y canales para llevar agua a todo Egipto, y del fracasado intento de abrir vías.

Habiéndose originado ya la geometría como actividad empírico práctica, de la cual se valió Sesostris –cuyo reinado transcurrió entre 1971 y 1928 a. de C., y fue relatado por Herodoto, quien vivió aproximadamente entre 490 y 425 a. de C.– aparece Euclides con los *Elementos*, obra escrita alrededor del año 300 a. de C. En la proposición 41 del Libro I, reza: “Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo” (Euclides, 1991, p. 252).

Así, $A(P) = 2 \cdot A(T)$

Jiménez, J. (2017). Decálogo del área del triángulo. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 125-130). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Esta relación abre paso a una comparación geométrica, de la cual muy probablemente proviene la ecuación usada, por lo regular, para hallar el área.

2. *Dada la longitud de la base y de la altura correspondiente*. Contemplando la posibilidad que ofrecen las matemáticas empírico prácticas mediante las técnicas empleadas por los agrimensores y también las matemáticas enriquecidas por el razonamiento humano, se plantean una serie de problemas relacionados con la precisión de los instrumentos de medición y la exactitud del dato que proporcionan. En el siglo XI ya se advertía la diferencia entre el trabajo realizado por los agrimensores y el geómetra,

> el monje Gerberto de Aurillac… escribió el primer "artículo científico" de la historia matemática medieval: es una carta al obispo Adalboldo de Utrecht en la que compara la técnica que usan los agrimensores para el área de un triángulo equilátero, que sería equivalente a la formula $1/2 \cdot b(b+1)$, y el método geométrico, que sería equivalente a nuestra fórmula $1/2 \cdot ba$. (Vasco, 1985, p. 24)

Ahora bien, desde un punto de vista geométrico, y como se insinuó antes, se puede considerar como consecuencia de la proposición 41 del Libro I de los *Elementos*, la relación expuesta en dos libros modernos especializados:

> Dado un triángulo con base $b$ y altura correspondiente $h$, el área está dada por la fórmula $A = 1/2 \cdot bh$. (Clemens, O'Daffer y Cooney, 1998, p. 402)

y

> El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las medidas de su base y la altura correspondiente. (Cardona, Cardozo, López, Jaramillo y Ramírez, 1996, p. 224)

3. *Dadas las longitudes de los tres lados.* Transitando por el siglo I se encuentra a Herón de Alejandría, matemático, físico e inventor. Diseñó y construyó una serie de automatismos. En cuanto a las matemáticas, retomó los estudios de Arquímedes de Siracusa, quien vivió en el siglo III a. de C., de los cuales extrajo el teorema del área del triángulo en función de los lados. Por fuentes árabes se conoce que:

> […] la "formula" de Herón, procede de Arquímedes. Es la conocida expresión del área de un triángulo en función de sus lados. Como teorema geométrico, probablemente interpolado, aparece en un escrito de Herón denominado *Dioptra*… mientras que bajo la forma de un ejemplo numérico de la aplicación de la "fórmula" aparece en otro escrito denominado *Métrica*… donde utiliza otras contribuciones de Arquímedes. (Rey Pastor y Babini, 1985, p. 96)

Transcribiendo el teorema de la ecuación de Arquímedes-Herón, se tiene:

> Si $\Delta ABC$ tiene lados de longitud $a$, $b$ y $c$, entonces $\boldsymbol{A}\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. (Clemens et al., 1998, p. 402)

Detallando la demostración del teorema Arquímedes-Herón se encuentran otras cuatro relaciones geométricas y métricas para determinar el área.

4. *Dadas las dimensiones de dos lados y del ángulo comprendido.* La trigonometría renace durante el siglo XII en Europa como fundamento práctico de la astronomía, de la agrimensura y de la navegación, y quien asume la tarea de sistematizar en cinco libros los conocimientos relacionados con las reglas de los triángulos, con el propósito de facilitar la compresión del Almagesto, es el alemán Johann Müller o Regiomontanus (1436-1476) matemático y astrónomo del siglo XV. Puntualizando, en el libro segundo de los triángulos, se encuentra el teorema 26 que se traduce en términos modernos como: Dados dos lados y el ángulo que forman entre ellos en un triángulo $ABC$.

> El área del triángulo será igual a la mitad del producto de los dos lados por el seno del ángulo que forman entre ellos; esto es,
>
> $K = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$. (Ayres y Moyer, 1991, p. 159)

5. *Dadas las dimensiones de un lado y de los ángulos interiores*. Como consecuencia de la estrategia anterior y reescribiendo el área de un triángulo fundamentada en la ley de los senos, se tiene que:

> el área del triángulo será igual al producto del cuadrado de uno de los lados, por el seno de cada uno de los ángulos adyacentes a dicho lado, entre el doble producto del seno del ángulo opuesto a dicho lado; esto es,
>
> $K = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{c^2 A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$. (Ayres y Moyer, 1991, p. 159)

Regiomontanus enuncia la *ley de los senos* en el teorema I del segundo libro de su obra *De Triangulis Omnimodis*.

6. *Dadas las coordenadas de los vértices*. La geometría analítica fue introducida en 1636 por Pierre de Fermat en su obra *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge – Introducción a los lugares planos y sólidos*, quien no la publicó, y un año después, de manera independiente, fue publicada como apéndice de su

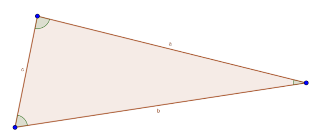
gran sistema filosófico por René Descartes, denominado *La Géométrie*. Ahora bien, "tomados en conjunto, contenido en Fermat y notación y terminología en Descartes, tenemos el texto de geometría analítica de nuestros textos de enseñanza secundaria" (Sestier, 2000, p. 92).

Desde la perspectiva de la geometría analítica se puede citar la estrategia siguiente para calcular el área de un triángulo conociendo las coordenadas de los vértices:

> Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo. El área $A$ en función de las coordenadas de los vértices viene dada por la expresión: $A = \frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3)$. (Kindle, 1981, p.3)

7. *Dadas las funciones de las tres rectas que contienen los lados*. Si los lados $a$, $b$ y $c$ están contenidos respectivamente en las rectas $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, empleando el cálculo integral, el área del triángulo se puede expresar del siguiente modo:

$$A = \int g(x)dx + \int f(x)dx - \int h(x)dx$$



Esta estrategia es resultado del cálculo infinitesimal. Aunque son numerosos los precursores, es a Isaac Newton y a Gottfried Leibnitz a quienes puede adjudicárseles la creación de las derivadas y de las integrales.

> Newton empezó a pensar en el cálculo infinitesimal en 1665, pero no publicó nada hasta 1687. Leibnitz, cuyas ideas seguían líneas bastante similares a las de Newton, había empezado a trabajar en el cálculo infinitesimal en 1673 y publicó sus primeros artículos en 1684. (Stewart, 2007, p. 130)

Este episodio originó una serie de acusaciones de plagio, desencadenando disputas entre los matemáticos ingleses y alemanes.

8. *Dada la cantidad de puntos en una retícula*. El teorema de Pick nos da una relación exacta entre el interior de un polígono sobre un reticulado (una figura que no se corta a sí misma y cuyos vértices son siempre puntos del reticulado) y el número de puntos del reticulado que pertenecen a la línea poligonal.

> Supongamos que hay $I(P)$ puntos del reticulado en el interior de $P$ y $B(P)$ puntos del reticulado sobre la frontera de $P$. Entonces, el área $A(P)$ de $P$ viene dada por: $A(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$. (Skiena y Revilla, 2012, p. 314)

Esta relación es atribuida a George Pick, como lo señala Crilly (2011):

> El matemático austríaco Georg Pick es famoso por dos cosas. Una es haber sido amigo cercano de Albert Einstein y haber contribuido a llevar al joven científico para la Universidad Alemana en Praga en 1911. La otra es haber escrito un corto artículo, publicado en 1899, sobre geometría "reticular". Entre todo el trabajo de una larga vida, cubriendo un vasto abanico de temas, es recordado por el interesante teorema de Pick – y ¡qué teorema! (p. 113)

9. *Empleando la retícula de los ejes coordenados*. Este método, empírico práctico, proporciona un valor aproximado: La medida interior es el número de cuadrados encerrados por la figura. La medida exterior es el número de cuadrados encerrados por la figura y que contienen parte de dicha figura (Cárdenas, 2000). El procedimiento para estimar el área de una figura equivale a fijar la medida interior $M_i$, la medida exterior $M_e$, y calcular el promedio de dichas medidas $A = \frac{M_i + M_e}{2}$.

10. *Empleando vectores*. El análisis vectorial inicia en 1837 con Hamilton y en 1844 con Hermann Günther Grau, luego renace a partir de 1881 con Josiah Willard Gibbs, Oliver Heaviside, Edwin Bidwell Wilson, Alfred Heinrich Bucherer, Eugen Jahnke y Siegfried Valentiener. En estos estudios se encuentra que: "El área del triángulo que tiene por lados $A$ y $B$ es igual a $\frac{1}{2}|A \times B|$" (Spiegel, 1969, p. 24).

Finalmente, recurriendo a las herramientas digitales, dentro del sinnúmero de portales Web se encuentran calculadoras en línea tales como:

1. Online calculadora. Área de un triángulo mediante 9 métodos: http://es.onlinemschool.com/math/assistance/figures_area/triangle/

2. Online calculadora. Área de triángulo construido sobre vectores: http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/triangle_area/

## PARA FINALIZAR

Invito a los docentes a recurrir a la historia de las matemáticas con el fin de contextualizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, a examinar las posibles estrategias de solución de un problema o situación, y a alcanzar competencias en Tecnologías de la Información y la Comunicación, haciendo énfasis en la argumentación en el ámbito matemático y no en el uso instrumental de este tipo de recursos. También, a acceder a la constitución o a la adhesión a redes educativas con el objeto de apoyar un trabajo colaborativo en procura de una formación permanente.

## REFERENCIAS


Ayres Jr. F. y Moyer, R. (1991). *Trigonometría* (segunda edición). México D.F., México: McGraw Hill.

Cárdenas, R. (Ed.). (2000). *Matemáticas: Aplicaciones y conexiones 7*. Bogotá, Colombia: McGraw Hill.

Cardona, O., Cardozo, C., López, G., Jaramillo, R. y Ramírez, E. (1996). *Geometría básica.* Medellín, Colombia: Universidad Pontificia Bolivariana.

Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometría* (Manuel López, Tr.). Naucalpan de Juárez, México: Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V. Pearson educación.

Crilly, T. (2011). *50 ideias de matemática que precisa mesmo de saber* (Jorge Nuno Silva, Tr.). Alfragide, Portugal: Publicações D. Quixote.

Euclides (1991-1996, trad.). *Elementos* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Herodoto, H. (2006, trad.). *Los nueve libros de la historia* (Bartolomé Pou, Tr.). eBooksBrasil. Edición elaleph.com. Obtenido de: www.gnu.org/copyleft/fdl.html (2017, enero 20).

Kindle, J. (1981). *Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio.* Atizapán de Zaragoza, México: McGraw Hill.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática: De la antigüedad a la edad media* (vol. 1 ). Barcelona, España: Gedisa.

Sestier, A. (2000). *Historia de las matemáticas.* México D.F., México: Editorial LIMUSA.

Skiena, S. y Revilla, M. (2012). *Desafíos de programación: el manual del entrenamiento para concursos de programación.* New York, EUA: Lulu Enterprises, Inc. Obtenido de: http://www.lulu.com (2017, enero 22).

Spiegel, M. (1969). *Análisis vectorial y una introducción al análisis tensorial.* Bogotá, Colombia: McGraw Hill.

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona, España: Crítica.

Vasco, C. E. (1985). *El álgebra renacentista* (segunda edición). Bogotá, Colombia: Empresa Editorial Universidad Nacional de Colombia.

# CARACTERIZACIÓN DE SÓLIDOS REDONDOS POR MEDIO DE GRAFOS Y MATRICES DE ADYACENCIA

**Lina Ombita, Nicolás Mahecha y Pablo Beltrán**
*Universidad Pedagógica Nacional*
dma_lpombitap181@pedagogica.edu.co, dma_nmahechaf898@pedagogica.edu.co, pabeltrans@pedagogica.edu.co

Uno de los problemas abordados en el Seminario de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional, es el de generar y caracterizar sólidos redondos; para ello, se proponen cortes en una esfera por medio de planos; los grafos y las matrices serán las herramientas.

## INTRODUCCIÓN

En el seminario de Álgebra desarrollado en la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), se han planteado problemas de teoría de grafos y algunas relaciones de los grafos con diferentes tipos de sólidos. En este ámbito, la representación de sólidos por medio de grafos permite establecer una matriz de adyacencia que es útil en la solución de los problemas planteados. Ya que es posible representar diferentes tipos de sólidos mediante grafos, el proyecto al que refiere este documento se centra en los sólidos redondos, específicamente en su caracterización a través de las matrices de adyacencia.

## POLIEDROS Y SÓLIDOS REDONDOS

Los poliedros son objetos que ocupan un lugar en el espacio y están conformados por polígonos (Wills, Guarín, Londoño y Gómez, 1976); ellos generan tres conjuntos disyuntos: el interior, el exterior y la frontera del poliedro (Muñoz, 2003), nociones estas necesarias para definir y construir un sólido redondo a partir de una esfera intersecada por planos.

El siguiente es un procedimiento para generar sólidos redondos haciendo uso de la esfera. El primer paso consiste en hacer intersecciones de la esfera con planos no tangentes a ella, con lo que se generan circunferencias. Ahora, si por lo menos dos de estas circunferencias se intersecan, entonces ya se tiene un sólido redondo, como se muestra en la Figura 1 (un ejemplo de una esfera y dos planos que cumplen estas condiciones):

Ombita, L., Mahecha, N. y Beltrán, P. (2017). Caracterización de sólidos redondos por medio de grafos y matrices de adyacencia. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 131-136). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

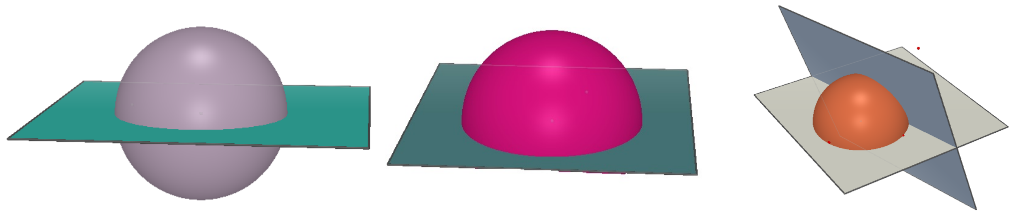


Figura 1. Representación de la manera de generar un sólido redondo a partir de una esfera

Al sólido resultante se le definen vértices y aristas:

*Definición 1.* Dada una esfera y un plano, la intersección de ellos se llama *circunferencia*.

*Definición 2*. Dadas dos circunferencias obtenidas de la intersección de una esfera y un plano, las intersecciones de aquellas, se llaman *vértices* del sólido redondo generado.

*Definición 3.* En un sólido redondo, una *arista* es el arco de circunferencia de menor longitud, unido por dos vértices; en caso de que las longitudes sean iguales, ambos arcos serán una arista.

## GRAFOS Y MATRICES DE ADYACENCIA

Los grafos son de gran utilidad en la solución de este problema (i. e., caracterización de los sólidos redondos), ya que con ellos se pueden representar los poliedros y los sólidos redondos. A continuación, se darán las definiciones:

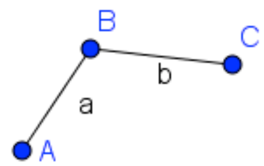
*Definición 4.* Un *grafo* $G$ es un par $(V, E)$, donde $V$ y $E$ son conjuntos, junto con una aplicación $f_G: E \to \{\{u, v\}: u, v \in V\}$, donde $V$ es el conjunto de vértices, $E$ es el conjunto de aristas y $f_G$ es la aplicación de incidencia.

Esta aplicación de incidencia tiene como finalidad relacionar las aristas con sus respectivos vértices, es decir, en un sólido redondo, una arista es un arco de circunferencia, en este caso denotado por $\widehat{AB}$, y $f_G\left(\widehat{AB}\right) = \{A, B\}$ donde $A, B$ son los puntos extremos del arco que a su vez son vértices del sólido redondo y, por lo mismo, $\widehat{AB} \in E$ y $A, B \in V$.

Las matrices de adyacencia (herramienta para representar grafos, analizarlos y abstraer información), se definen como:

*Definición 5.* Sea un grafo G con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sus vértices. Se define la *matriz de adyacencia* $A \in M_n(N)$ cuyo coeficiente $(i, j)$ es igual al número de aristas $e$ tales que $f_G(e) = \{v_i, v_j\}$.

La Figura 2 muestra la representación de un grafo y su matriz de adyacencia. $G$, grafo, con $V = \{A, B, C\}$, $E = \{a, b)$, $f_G(a) = \{A, B\}$ y $f_G(b) = \{C, B\}$, entonces:



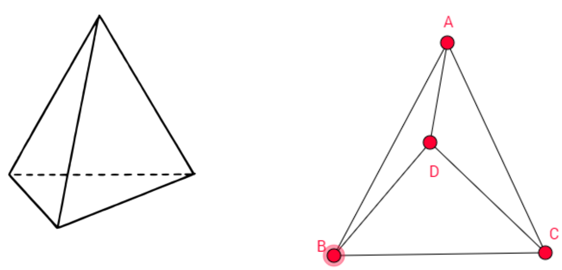

| MA | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 1 | 0 |
| **B** | 1 | 0 | 1 |
| **C** | 0 | 1 | 0 |

Figura 2. Representación de grafo y su matriz de adyacencia

## EL PROBLEMA DE LOS SÓLIDOS REDONDOS

Ya definidos los elementos que se van a utilizar, ahora se da una relación entre los sólidos redondos, los grafos y las matrices.

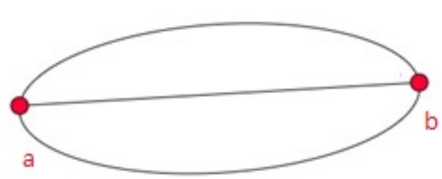
Para iniciar, se toma el tetraedro y por medio de la teoría de grafos se genera su representación y su matriz de adyacencia (Figura 3), así:




| MA | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **B** | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **C** | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **D** | 1 | 1 | 1 | 0 |

Figura 3. Tetraedro, grafo y matriz de adyacencia que lo representan

Al sólido redondo generado a partir de una esfera (Figura 1), se le asignaron grafo y matriz de adyacencia (Figura 4).




| MA | a | b |
|---|---|---|
| **a** | 0 | 3 |
| **b** | 3 | 0 |

Figura 4. Grafo y matriz de adyacencia de un sólido redondo

Este mismo procedimiento se repite, alterando la forma y cantidad de los cortes en la semiesfera.

La organización de los cortes puede darse en dos grupos: en un grupo (**G1**) (Figura 5a) se encuentran las intersecciones cuyas circunferencias generadas no son tangentes. En el otro grupo (**G2**) (Figura 5b) se encuentran las intersecciones cuyas circunferencias generadas son tangentes.

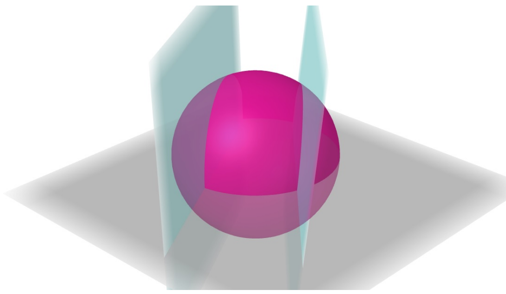


Figura 5a. Cortes no tangentes

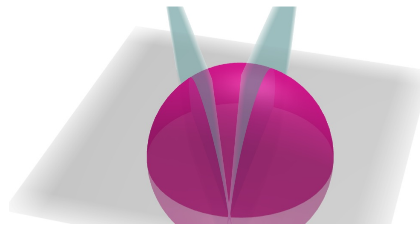
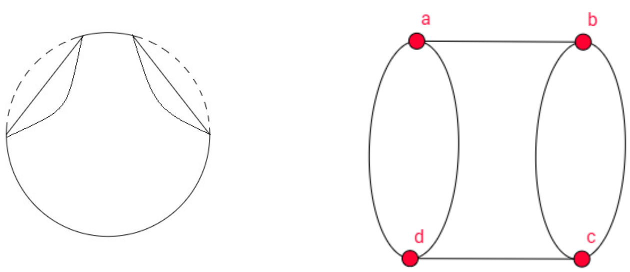


Figura 5b. Cortes tangentes

En cada grupo de cortes, se hace variar $n$, número de cortes, comenzando con $n = 2$, obteniendo:




| MA | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| **a** | 0 | 1 | 0 | 2 |
| **b** | 1 | 0 | 2 | 0 |
| **c** | 0 | 2 | 0 | 1 |
| **d** | 2 | 0 | 1 | 0 |

Figura 6. **(G1)** Corte $n = 2$ y su grafo


| MA | a | b | |
|---|---|---|---|
| **a** | 0 | 2 | 2 |
| **b** | 2 | 0 | 1 |
| **c** | 2 | 1 | 0 |

Figura 7. **(G2)** Corte $n = 2$, su grafo y su matriz de adyacencia

Si se sigue ejecutando este procedimiento para $n = 3, n = 4$, $n = 5$, …, para una cantidad considerablemente grande de cortes, gráficamente resultaría tedioso representarlo, pero con ayuda de las matrices de adyacencia se encontraron ciertas regularidades que facilitan generar los sólidos. A continuación, los resultados obtenidos:

En los objetos del **Grupo 1** se puede evidenciar que al generar su matriz $A \in M_n(\boldsymbol{N})$ de adyacencia, los coeficientes $a_{m,m+1}$ siempre serán 1 o 2. Si $a_{m,m+1} = 1$, entonces $a_{m+1,m+2} = 2$ o si $a_{m,m+1} = 2$ entonces $a_{m+1,m+2} = 1$. Además, si $a_{m+1,m+2} = 2$, entonces $a_{m+1,m} = 1$ o si $a_{m+1,m+2} = 1$, entonces $a_{m+1,m} = 2$. Es decir, podría decirse como que la diagonal sobre la diagonal principal se va alternando 1,2,1,2,… al igual que la diagonal debajo de la diagonal principal. También se evidencia que $a_{n,1} = a_{1,n} = 2$, y para las demás componentes de la matriz, su coeficiente es igual a 0. De esa manera queda caracterizada esta matriz.

Respecto al **Grupo 2**, al generar su matriz $A$, esta siempre será cuadrada; además, los coeficientes de las componentes $a_{m,m+1} = a_{m+1,m} = 2$ y $a_{1,n} = a_{n,1} = 1$ las demás componentes de $A$ tiene como coeficiente igual a 0.

Al realizar una tabla relacionando número de cortes (#C), número de vértices (#V) y números de aristas (#A), se observa que:

| # C | # V | # A |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 6 |
| 3 | 6 | 9 |
| 4 | 8 | 12 |
| 5 | 10 | 15 |
| 6 | 12 | 18 |
| 7 | 14 | 21 |

| # C | # V | # A |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 5 |
| 3 | 4 | 7 |
| 4 | 4 | 8 |
| 5 | 5 | 10 |
| 6 | 6 | 12 |
| 7 | 7 | 14 |

Figura 8. Tablas que relacionan número de cortes, vértices y aristas en los **Grupos 1** y **2**

Con estos resultados se evidencian algunas relaciones. Por ejemplo, en la tabla de la izquierda, correspondiente al **Grupo 1** (Figura 8), se puede concluir que:

para $\#C = 1$ o $\#C = 2$, se cumple $\#A = \#V + \#C$

pero

si $\#C \geq 3$, se cumple $\#V = 2\#C$ y $\#A = 3\#C$

De igual forma, en la tabla de la derecha, correspondiente al **Grupo 2** (Figura 8), se puede concluir que:

para $\#C = 1$, $\#C = 2$ y $\#C = 3$, se cumple $\#V = \#C + 1$ y $\#A = \#C + \#V$

y

para los siguientes $\#C$, se cumple $\#A = 2\#C$.

Por tanto, con las características anteriores es posible diferenciar una matriz de adyacencia que represente a un sólido redondo, y con la matriz de un corte se puede generar la del siguiente corte.

## PARA TERMINAR

Del estudio aquí referido se puede obtener como resultado el hallazgo de un método para generar grafos que representan exclusivamente sólidos redondos. Para lograrlo hicimos uso de matrices de adyacencia, las caracterizamos en dos grupos e identificamos algunas propiedades que relacionan la cantidad de aristas, la cantidad de vértices y la cantidad de de cortes. La investigación no ha concluido: falta caracterizar nuevos grupos de matrices, considerando la posibilidad de cambiar la esfera por algún otro sólido redondo como el cono, el cilindro, el toro, entre otros.

## REFERENCIAS


Muñoz, J. (2003). *Topología básica*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N. y Gómez, R. (1976). *Matemática moderna estructurada*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.

# De los sólidos platónicos a los arquimedianos: un estudio desde las matrices de adyacencia

**Fabio Rincón, Nicole Henao y Pablo Beltrán**
*Universidad Pedagógica Nacional*
dma_fnrincong715@pedagogica.edu.co, dma_nmhenaom996@pedagogica.edu.co,
pabeltrans@pedagogica.edu.co

El presente documento muestra un método para hallar sólidos arquimedianos a partir de los sólidos platónicos, haciendo uso de grafos y matrices de adyacencia. En primeria instancia, se representó un sólido platónico mediante grafos con el fin de obtener la correspondiente matriz de adyacencia. Posteriormente, se realizaron truncamientos en cada vértice (nodo para el grafo), obteniendo así nuevas matrices que permitieron hallar regularidades para llegar a la representación del grafo del sólido arquimediano.

## Introducción

El trabajo que aquí se presenta surge de un estudio adelantado en el Seminario de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), al pretender hallar sólidos arquimedianos a partir de los sólidos platónicos. Cada sólido platónico se representa mediante un grafo, a partir del cual es posible establecer una serie de relaciones entre los nodos, para así determinar una matriz de adyacencia asociada. Luego de esto, se realizan una serie de truncamientos con el fin de quitar los nodos (vértices del sólido) principales y dar inicio a la deducción de la matriz que genera el grafo del sólido arquimediano deseado.

## Matrices de adyacencia de los sólidos platónicos

Los sólidos platónicos se definen como aquellos cuyas caras son polígonos regulares congruentes. Se sabe que existen únicamente cinco sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Los sólidos arquimedianos son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos; la mayoría de estos se obtienen truncando los sólidos platónicos. Dado lo anterior, se busca realizar una deducción de los sólidos arquimedianos a partir de los sólidos platónicos y para ello se hace uso del concepto de matriz de adyacencia en grafos, cuyos elementos representan la relación entre los nodos del grafo (0: no conexión; 1: conexión).

Rincón, F., Henao, N. y Beltrán, B. (2017). De los sólidos platónicos a los arquimedianos: un estudio desde las matrices de adyacencia. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 137-142). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Para determinar las matrices de adyacencia de los sólidos platónicos es necesario realizar la representación de cada sólido por medio de grafos, con el fin de determinar las relaciones entre los nodos (vértices del sólido). En la Figura 1 se ejemplifica la representación, en grafos, del tetraedro, octaedro e icosaedro.

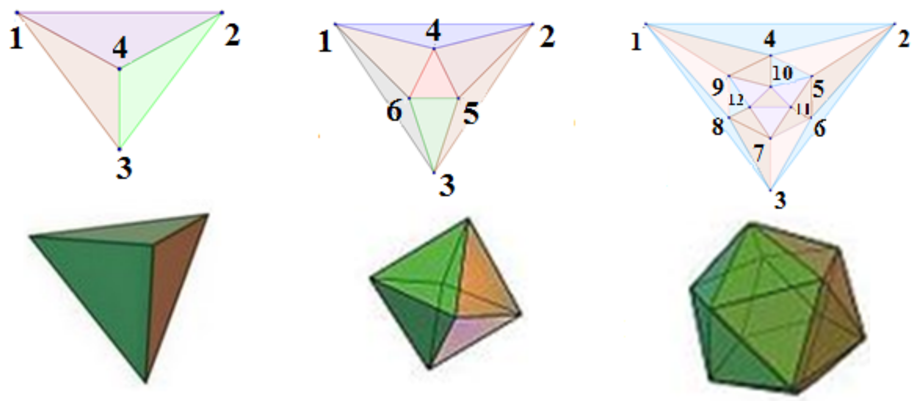



Figura 1. Algunos sólidos platónicos y sus grafos

## TETRAEDRO, CUBO Y DODECAEDRO

El primer sólido que se consideró en el estudio fue el tetraedro: se construyó su grafo[1] asociado, se nombraron sus vértices en sentido horario, de manera que cada nodo estuviera conectado con su antecesor y su consecutivo. Teniendo ya la primera relación de antecesor y consecutivo, se escribió la matriz de adyacencia del sólido representado por el grafo (Figura 2). Posteriormente, se hicieron los truncamientos, los cuales se obtuvieron a partir de la matriz original, es decir, la representación matricial del sólido platónico de interés.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 |

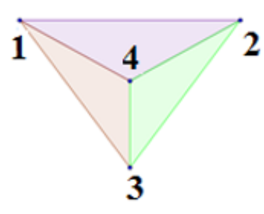



Figura 2. Matriz y grafo del tetraedro

Los cortes se pueden interpretar como un plano que interseca al sólido; así, el corte en el tetraedro genera un triángulo, es decir, se suprime un vértice y apa-

[1] El grafo es una figura plana con el mismo número de aristas y vértices. Se obtiene aplanando el sólido por una de sus caras.

recen tres nuevos vértices. Por ejemplo, se suprime el vértice 1 y se generan tres vértices, *a*, *b* y *c* (Figura 3), entonces la matriz se modifica remplazando la fila y la columna 1 por *a*, y agregando dos nuevas filas y columnas *b* y *c*; luego, se completa la matriz de manera que cada vértice esté conectado con su antecesor y su consecutivo y que, además, cada vértice se conecte únicamente con tres aristas. La matriz propuesta inicialmente para el tetraedro se mantiene, puesto que cumple con la restricción referente al antecesor y consecutivo. Así, la matriz asociada con un truncamiento es:

| | a | 2 | 3 | 4 | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| b | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| c | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

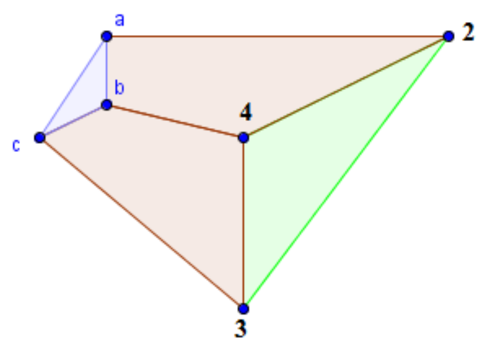



Figura 3. Matriz del tetraedro con un truncamiento y su respectivo grafo

Una vez obtenida la matriz del truncamiento, en esta se permutaron filas y columnas, lo que proporcionó grafos isomorfos que, por consiguiente, representan el mismo sólido. Luego se intercambió la posición de la primera fila y la primera columna, con la última fila y la última columna, como se muestra en la Figura 4, y teniendo cuidado de que conservaran las conexiones. Por ejemplo, la fila *a* muestra que *a* se conecta con *2*, *b* y *c*, por lo cual, al reubicarla en la última fila, estas conexiones se mantienen. Una vez reubicadas la primera fila y columna, se aplicó el mismo tratamiento descrito antes, para realizar el segundo truncamiento.

| | c | 2 | 3 | 4 | b | a |
|---|---|---|---|---|---|---|
| c | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| b | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| a | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Figura 4. Matriz del tetraedro con un truncamiento, filas y columnas permutadas

Así, se logró un método de obtención de sólidos arquimedianos, a partir de sólidos platónicos y con un tratamiento netamente matricial; sin embargo, este método solamente aplica para los sólidos cuyos truncamientos generan tres nuevos vértices, es decir, cuya intersección con el plano que corta al sólido, es un triángulo (tetraedro, cubo y dodecaedro).

## OCTAEDRO

En la exploración de los truncamientos para el octaedro y el icosaedro, el método anteriormente explicado no resultó eficaz, debido a que los truncamientos generan figuras diferentes al triángulo, se generan cuadriláteros y pentágonos. En el caso del octaedro se observa que hay unos vértices que no están relacionados entre sí, es decir no hay una arista que los una, y su truncamiento (un cuadrilátero) mantiene la misma relación. Ahora bien, si se observa la matriz de adyacencia del octaedro se puede identificar que el vértice 1 no está relacionado con el vértice 3, puesto que su valor es 0 (no conexión); puntos como estos se denominan opuestos. La deducción del sólido arquimediano a partir del octaedro se dio con base en la siguiente relación: el vértice 1 está relacionado con el vértice 2 y el 5, pero estos dos son opuestos, de lo cual se establece que $\overline{12} \approx \overline{15}$, donde "≈" significa segmentos adyacentes con puntos opuestos. Dada esta relación, en la Figura 5 se tienen los segmentos que cumplen ≈.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{12} \approx \overline{15}$ | $\overline{14} \approx \overline{16}$ | $\overline{21} \approx \overline{23}$ | $\overline{24} \approx \overline{26}$ |
| $\overline{32} \approx \overline{35}$ | $\overline{34} \approx \overline{36}$ | $\overline{41} \approx \overline{43}$ | $\overline{42} \approx \overline{45}$ |
| $\overline{51} \approx \overline{53}$ | $\overline{54} \approx \overline{56}$ | $\overline{61} \approx \overline{63}$ | $\overline{62} \approx \overline{65}$ |

Figura 5. Matriz del octaedro, con sus segmentos adyacentes

Dada la anterior relación, se realiza el primer truncamiento, en el que se elimina el nodo 1 y se genera el nodo $a_1$. Como el corte es un cuadrilátero, el nodo $a_1$ también tendrá un nodo opuesto, el cual se denotará como $c_1$. La primera relación del vértice 1 en la matriz de adyacencia era con el vértice 2, luego el nodo $a_1$ estará relacionado con el vértice 2 y el nodo $c_1$ estará relacionado con el opuesto de 2, es decir con el vértice 5, puesto que $a_1$ y $c_1$ son opuestos. De allí nace una nueva relación, esta es: "≫" (segmentos opuestos). Como la segunda relación del vértice 1 era con el vértice 4, se establece que $b_1$ está relacionado con 4, lo que se puede observar en la matriz de la Figura 6, en la que $b_1$ es el opuesto de $d_1$ y $a_1$ es el opuesto de $c_1$.

| Truncamiento 1 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | | a1 | b1 | c1 | d |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| a1 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| b1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| c1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| d1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$\overline{a_1 2} \approx \overline{c_1 5}$ $\qquad$ $\overline{b_1 4} \approx \overline{d_1 6}$

Figura 6. Matriz del octaedro con un truncamiento, con los segmentos adyacentes nuevos

Posteriormente se realizó el truncamiento 2, el cual generó la matriz de adyacencia que se observa en la Figura 7, matriz en la que $b_2$ es el opuesto de $d_2$ y $a_2$ es el opuesto de $c_2$.

| Truncamiento 2 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 5 | 6 | a1 | b1 | c1 | d1 | a2 | b2 | c2 | d2 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| a1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| b | 0 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| c1 | | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| d1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| b2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| c2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| d2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$\overline{a_2 3} \approx \overline{c_2 a_1}$ $\qquad$ $\overline{b_2 4} \approx \overline{d_2 6}$

Figura 7. Matriz del octaedro con dos truncamientos, con los segmentos adyacentes nuevos

De esta manera se obtienen las matrices de adyacencia de los truncamientos, utilizando únicamente la matriz de adyacencia de los sólidos platónicos.

## PARA CONTINUAR ESTUDIANDO

Para el caso del icosaedro, donde los truncamientos resultan ser pentágonos, se establece un orden conveniente para nombrar sus vértices, para el cual aún se está buscando alguna regularidad concreta que permita encontrar las matrices de adyacencia del icosaedro con sus respectivos truncamientos.

Se abordará este problema de forma análoga a como se hizo con el octaedro, es decir, buscando relaciones entre los vértices y las aristas para encontrar una forma de modificar la matriz de adyacencia que permita generar todos los truncamientos.

# Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría

**<u>Sergio Rubio-Pizzorno</u> y Gisela Montiel**
*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav)*
sergio.rubio@cinvestav.mx (zergiorubio.org), gmontiele@cinvestav.mx

En este trabajo pretendemos reflexionar sobre la evolución conceptual de la geometría y su impacto en el dominio denominado Didáctica de la geometría, la cual ha decantado en el surgimiento de los ambientes de geometría dinámica. La manera de desarrollar nuestro objetivo es a través de la investigación de la naturaleza de la geometría, relativa a ciertas áreas del saber humano. Específicamente, abordamos el estudio de la naturaleza epistémica, epistemológica, filosófica y digital de la geometría, para concluir que el arrastre en el contexto de la geometría dinámica representa una síntesis y convergencia de todos estos aspectos.

## Introducción

Desde un punto de vista social (relativista, situacional, flexible), en este trabajo reconocemos que los grupos sociales han concebido y conciben el espacio, las formas y la medida de una manera propia, desarrollando una conceptualización particular de estos elementos, y que les ha permitido generar una manera de relacionarse con su entorno y los objetos que lo componen. Dichos elementos pueden encontrar conexión o correspondencia en diferentes grupos sociales o ser diametralmente opuestos. En general, nos referimos a todas estas concepciones y conceptualizaciones como razonamiento visoespacial (Sinclair, 2016), como idea general que alberga todas las maneras de entender y relacionarse con el espacio, las formas y la medida.

Una de estas conceptualizaciones corresponde a la geometría, entendida como el área de conocimiento humano que estudia el espacio, las formas y la medida desde una perspectiva y tradición euclidiana. Debido a su carácter oficial, es de nuestro interés estudiar y problematizar la geometría, para, en una primera instancia, identificar sus piezas claves y constituyentes; y, como objetivo ulterior, discernir entre la geometría y otras maneras de conceptualizar el espacio, reconociendo aquello que le es propio a cada una de ellas y lo que es común entre ellas.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 143-148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

La problematización presentada en este escrito se desarrolla mediante la idea de reconocer *cuál es la naturaleza de la geometría relativa a cierta área del saber humano*, con lo cual declaramos nuestra postura al considerar que las construcciones humanas poseen distintas naturalezas, según la perspectiva con la cual se esté analizando. Por ejemplo, en el fútbol podemos identificar una naturaleza colectiva del juego llamada táctica, una naturaleza individual de preparación física llamada técnica, una naturaleza histórica del juego que ubica su nacimiento oficial en Inglaterra, entre muchas otras que se pueden identificar.

De manera específica, este trabajo considera el estudio de la naturaleza de la geometría desde las perspectivas: epistémica, epistemológica, filosófica y digital. Luego de exponer cada una de ellas, se identifican puntos en común entre distintas naturalezas, con lo cual, en un tercer nivel de análisis, se identifica y declara una manera en la cual todas ellas convergen.

## Naturaleza epistémica de la geometría

Al hablar de la naturaleza epistémica de la geometría nos referimos específicamente al conocimiento geométrico construido metodológica y racionalmente, a través de sus objetos y representaciones. En este sentido, Rubio-Pizzorno y Montiel (2017a) proponen que los objetos geométricos se elaboran siguiendo una estructura discursiva que pone en juego los aspectos teóricos y concretos (Navarro, 2005; Vega, 2013); con base en proposiciones, definiciones, postulados y comunes sentencias; empleando instrumentos que encarnan las herramientas teóricas propuestas por Euclides. A los diagramas generados de esta manera les denominan construcciones euclidianas. Estas manifiestan propiedades teóricas y gráfico-espaciales, como características esenciales (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017b).

Debido a la manera en que son elaborados, estos objetos geométricos se diferencian de otras representaciones concretas por su estatus de precisión y exactitud (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017c), el cual es relativo a la tarea de obtener un objeto geométrico declarado *a priori*, como resultado de un proceso de construcción. Este estatus es reflejo de la relación intrínseca entre los aspectos teóricos y concretos de la geometría, que se manifiestan en todos sus ámbitos y de diferentes maneras. En el caso particular de la precisión al construir los diagramas para que correspondan exactamente a lo que se quería construir, ella incide completamente en la práctica geométrica de postular verdades universales, a partir del estudio de objetos concretos.

## Naturaleza epistemológica de la geometría

La geometría es un área del conocimiento humano que, en primera instancia, se inspira en la experiencia para luego desarrollar sus elementos teóricos al respecto. Como dice Meserve (1983), la geometría es el "estudio de propiedades del espacio físico en el cual vivimos".

Por otra parte, Piaget y García (1992) reportan la noción de transformación como clave para la evolución conceptual de la geometría, ya que gracias a esta es posible formular completamente el concepto de geometría como estructuras que persisten a través de los cambios en sus aplicaciones particulares, lo cual permite establecer una jerarquización entre las distintas geometrías (euclidiana, sintética, no euclidianas, proyectiva) y lograr la reformulación más importante de esta área del saber.

## Naturaleza filosófica de la geometría

Entendemos la naturaleza filosófica de la geometría como las explicaciones racionales dadas en un nivel general, que orientan el conocimiento de la realidad y el proceder humano.

En este sentido, Cedrés (2009) ensaya una respuesta a la pregunta: "¿cómo se 'pretende' que conclusiones geométricas con un pretendido valor de necesidad y universalidad descansen en el trazado de figuras particulares?", la cual pone de manifiesto la necesidad de una facultad de contemplación de los objetos geométricos, pero, sobre todo, de generación de verdades geométricas universales, las cuales son producidas mediante un proceso de construcción de representaciones geométricas concretas, y la abstracción de esencias que estos diagramas están instanciando.

## Naturaleza digital de la geometría– Geometría dinámica (GD)

En cuanto a la naturaleza digital, nos basamos en la literatura especializada que estudia al arrastre como elemento nuclear de las investigaciones sobre fenómenos didácticos relativos a la geometría, ya que se reconoce como la característica definitoria de la GD.

Se presentan los resultados emanados del estudio de la naturaleza digital de la geometría, evidenciando su relación con aspectos de esta reportados en otras naturalezas.

*Aspecto epistémico-epistemológico.* La geometría se inspira en la experiencia concreta y los datos empíricos, para desarrollar sus elementos teóricos. De esta manera, sus objetos manifiestan tales propiedades (gráfico-espaciales y teóricas). Por tanto, para la actividad didáctica es recomendable poner atención a las experiencias cotidianas de los estudiantes y los casos concretos del trabajo geométrico.

Al respecto, el arrastre se presenta como crucial en la dialéctica entre lo perceptual y lo teórico, relación que caracteriza a todo el razonamiento geométrico (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002).

*Aspecto epistemológico-filosófico*. Cuando la noción de transformación dejó su estado embrionario fue posible caracterizar completamente las geometrías mediante estructuras algebraicas determinadas por un grupo de transformaciones, los invariantes que se identifican al aplicar las transformaciones, que en conjunto configuran el espacio y sus características. Uno de los resultados de esta forma de estructurar las geometrías es la característica dinámica de la geometría dada por el par transformación-invariante, la cual se refleja en las propiedades dinámicas de sus objetos.

El aspecto dinámico de los ambientes de GD está dado por el arrastre, que puede inducir la noción de transformación geométrica o afín (Goldenberg y Cuoco, 1998).

*Aspecto epistémico-filosófico.* Mediante el proceso de construcción de un diagrama geométrico se proporcionan ciertos invariantes, los cuales permiten representar una clase de objetos, según el grado de precisión del proceso.

El estatus de precisión y exactitud de las construcciones euclidianas se vislumbra como la característica de los objetos geométricos, que les permite representar una clase de ellos, a través de la *identificación de esencias*.

En los ambientes de GD, todos los objetos manifiestan tanto las propiedades que les son atribuidas a partir de su proceso de construcción como las propiedades teóricas que subyacen a la geometría euclidiana. Tales propiedades se pueden identificar como invariantes, cuando se aplica el arrastre (Leung, 2015).

## CONCLUSIÓN

En síntesis, el uso del arrastre conocido como "prueba del arrastre" consiste en mover un punto libre o dependiente con el fin de ver si el diagrama construido mantiene una característica inicial. Si es así, entonces el diagrama pasa la prueba, puesto que mantiene invariante la característica atribuida; de lo contrario, el diagrama no fue construido de acuerdo a las propiedades geométricas que se pretendía que tuviese. En este uso del arrastre es posible identificar aspectos epistémicos (poner en juego la relación dialéctica entre elementos teóricos y concretos, al manipular diagramas para identificar invariantes), epistemológicos (emplear el par transformación-invariante, como propiedad dinámica, en el trabajo geométrico) y filosóficos (dotar de propiedades geométricas a los diagramas, mediante un preciso proceso de construcción, y abstraer la esencia de toda la clase de objetos geométricos que el diagrama específico está representando). De esta manera, concluimos que la prueba del arrastre emerge como convergencia y síntesis de aspectos epistémicos, epistemológicos y filosóficos, en los ambientes de geometría dinámica.

## REFERENCIAS

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 34*(3), 66-72. http://doi.org/10.1007/BF02655708

Cedrés, Á. J. (2009). Construcción, necesidad e intuición de esencias en geometría. *Scientiae Studia, 7*(4), 595-617. doi: 10.1590/S1678-31662009000400004

Goldenberg, P. y Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates.

Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. En S. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451-469). Suiza: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6

Meserve, B. (1983). *Fundamental concepts of geometry*. New York, EUA: Dover Publications.

Navarro, J. (2003). Los "Elementos" de Euclides. En R. Ibáñez y M. Macho (Comps.), *Un paseo por la geometría* (pp. 51-82). Universidad del País Vasco. Recuperado de: http://www.divulgamat.net/

Piaget, J. y García, R. (1992). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI editores (primera edición en castellano, 1982).

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017a). Construcciones dinámicas. En F. J. Córdoba, J. C. Molina y L. A. Ciro (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017b). Naturaleza de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba, J. C. Molina y L. A. Ciro (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017c). Precisión y exactitud. Propuesta inicial sobre el estatus de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba, J. C. Molina y L. A. Ciro (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM, 48*(5), 691-719.

Vega, Y. (2013). *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

# Geometría dinámica: la diferencia entre percibir y discernir

**Carlos Sánchez** y **Carmen Samper**
*Universidad Pedagógica Nacional*
cdsnnchez@upn.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

En este documento se ilustra la diferencia entre percibir y discernir cuando se utiliza la geometría dinámica. Para esto se analiza una situación de aula en la que dos estudiantes de grado octavo disciernen las propiedades del punto medio de un segmento, cuando están resolviendo un problema en un Sistema de Geometría Dinámica (SGD). Del análisis de la situación se concluye que las representaciones que construyen los estudiantes les permiten percibir ciertas propiedades, que luego pueden discernir, especialmente cuando experimentan la variación. Reconocer cuándo el estudiante discierne propiedades y relaciones geométricas al explorar una situación representada en un SGD permite identificar cómo desarrollan significados de determinados conceptos.

## Planteamiento del problema

En la clase de geometría de grado octavo es usual que los estudiantes deban realizar demostraciones, en las que tienen que usar alguna definición de un objeto geométrico. Sin embargo, como lo advierten algunos investigadores (e. g., Moore, 1994, citado en Aya, Echeverry y Samper, 2014), una posible dificultad para demostrar es la comprensión deficiente de los conceptos. Además, varios estudios muestran que conocer la definición de un objeto no garantiza su comprensión, ni la conciencia de la necesidad de las propiedades que lo definen (Camargo y Samper, 2014).

La representación de objetos geométricos en un SGD permite percibir que las propiedades esenciales de estos se mantienen invariantes. Por ejemplo, si se representa el punto medio $C$ de un segmento $AB$ y se arrastran los extremos de este, es posible percibir que las relaciones de colinealidad y de equidistancia se mantienen. Sin embargo, esto no garantiza que los estudiantes disciernan que estas propiedades son necesarias en la definición de punto medio. Por ello, es importante proponer tareas en el aula que promuevan el reconocimiento de lo que es necesario en una definición (Camargo y Samper, 2014).

Sánchez, C. y Samper, C. (2017). Geometría dinámica: la diferencia entre percibir y discernir. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 149-154). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## REFERENTES TEÓRICOS

Desde un punto de vista cognitivo, una representación gráfica se puede *percibir* o también se puede *pensar* a partir de esta. Según Neisser (1989, citado en Leung, Baccaglini y Mariotti, 2013), la percepción y el pensamiento son dos actividades cognitivas diferentes. La percepción es inmediata, se realiza sin esfuerzo y de manera directa. En cambio, el pensamiento es indirecto; es decir, no depende en su totalidad de la experiencia inmediata del individuo con la representación gráfica. Teniendo en cuenta el planteamiento anterior, Leung et al. (2013) afirman que no es posible que un estudiante realice una interpretación geométrica de las propiedades de los objetos representados mediante la simple percepción; es necesario que asociado a esta se promueva cierto tipo de pensamiento que haga que el estudiante evoque aspectos conceptuales. En este caso se dice que hay *discernimiento*.

Leung et al. (2013) plantean que en un SGD los estudiantes pueden discernir propiedades y relaciones entre objetos geométricos cuando se involucran en experiencias basadas en determinados patrones que contempla la Teoría de La Variación. Dichos patrones (contraste, separación, generalización y fusión) permiten describir cómo se descubren características cruciales de un fenómeno al variar intencionalmente diferentes aspectos de este. El contraste hace referencia a la comparación de un objeto o fenómeno con otros, para comprender cuáles son los atributos que lo caracterizan. La separación permite reconocer cierta propiedad de un objeto, observando cómo varía, cuando otros elementos con los que se relaciona permanecen invariantes. La generalización permite comprender las características de un fenómeno a partir de sus propias variaciones, y la fusión consiste en experimentar la variación de varios aspectos críticos de un fenómeno para discernir su estructura parte-todo (Orgill, 2012).

Para enriquecer la diferencia que proponen Leung et al. (2013) entre percibir y discernir, es posible utilizar los conceptos de dibujo, figura y objeto geométrico propuestos por Laborde y Capponi (1994, citados en Larios, 2006). El dibujo es la representación gráfica como tal, el objeto geométrico corresponde al referente teórico, y la figura está constituida por la relación entre el objeto geométrico y uno de los dibujos que lo representan. Así, una figura geométrica se define como “el conjunto de parejas formadas por dos términos: el primer término es el referente y el segundo es uno de los dibujos que lo representan, tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente" (Laborde y Capponi, 1994, citados en Larios, 2006, p. 365).

## CONTEXTO INVESTIGATIVO Y METODOLOGÍA

Para ilustrar la diferencia entre percibir y discernir, se propone el análisis de una escena, que se obtuvo de las videograbaciones de las clases de geometría que se realizaron con dos cursos de grado octavo de un colegio oficial (cada uno con 22 estudiantes). Se buscaba promover el proceso de conjeturación en el aula implementando problemas que se debían resolver utilizando GeoGebra en tabletas. Si bien existía la posibilidad de que cada estudiante trabajara con una tableta, se organizaron las clases para que los estudiantes trabajaran en parejas o en grupos de máximo tres estudiantes. Esto con el fin de promover la interacción entre ellos. Cabe agregar, que el docente, uno de los autores, interactuó con cada grupo, para aclarar dudas de los estudiantes o para cuestionarlos acerca de las estrategias de resolución que proponían para cada problema.

La escena que es objeto del análisis se seleccionó porque las declaraciones de los estudiantes aludían a las representaciones que construyeron en GeoGebra y al uso de la herramienta de arrastre. Para el análisis de cada declaración, primero se determinó a cuál de los conceptos relacionados con la representación se hacía referencia (dibujo o figura). Luego se identificó la acción asociada a ese concepto (percibir o discernir). Finalmente, se estableció en cuáles casos hubo discernimiento a partir de la variación. En estos casos, se determinaron los correspondientes patrones de variación.

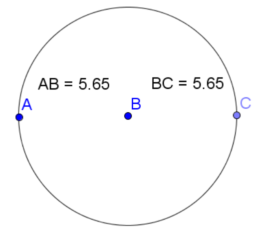
## ANÁLISIS

La escena comienza cuando se les propone a los estudiantes utilizar GeoGebra para resolver el problema: Dados dos puntos $A$ y $B$, hallen un punto $C$ para que $B$ se convierta en el punto medio del segmento $AC$. Previamente, se había realizado otra actividad en la que los estudiantes construyeron un segmento $AB$ y su punto medio $C$ y verificaron mediante el arrastre las propiedades que cumplían estos puntos. Producto de esta actividad se establece la siguiente definición de punto medio: $B$ es punto medio del segmento $AC$ si (1) $A, B$ y $C$ son colineales y (2) $B$ equidista de $A$ y $C$. A continuación se presenta la interacción entre dos estudiantes.

1. Luis: (A medida que habla construye una circunferencia con centro $B$ y radio $BA$) Ubicamos el punto $A$ y el punto $B$. Con la ayuda de [la herramienta] circunferencia damos en el punto $B$ y en el punto $A$ para colocar otro punto que sería el punto $C$ (determina un punto $C$ en la circunferencia de tal forma que $A$, $B$ y $C$ son perceptualmente colineales).

2. Santiago: Y agregamos

3. Luis: La distancia de $A$ a $B$ y de $B$ a $C$ (usa la herramienta Distancia o Longitud). Así nos damos cuenta que es la misma distancia. (En la pantalla de la tableta se observa la siguiente gráfica).




4. Santiago: Entonces ahí cumpliríamos que el punto $B$ es el punto medio.

5. Luis: Sí. Así tal como el profesor nos lo dijo. ¡Profe!

6. Profesor: (Se acerca al grupo).

7. Santiago: Profe, pusimos el punto $A$ y el punto $B$ y sacamos la circunferencia. Entonces, al sacar la circunferencia pusimos el punto $C$; y al sacar las medidas de $A$ a $B$ y de $B$ a $C$ son las mismas; entonces, en conclusión, $B$ es el punto medio de $A$ a $C$.

8. Profesor: ¿Y dónde está el segmento? ¿No es punto medio de un segmento?

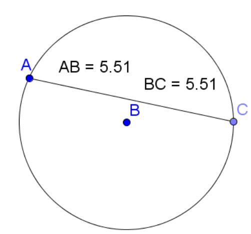
9. Luis: Entonces aquí (utiliza la herramienta Segmento y construye el segmento $AC$). ¡Listo!

10. Profesor: ¿Será que si arrastro los puntos pasa lo mismo que en la tarea anterior? Que yo arrastraba los extremos y el punto $C$ [que en esa tarea era el punto medio de un segmento $AB$] seguía siendo punto medio.

11. Luis: (Arrastra el punto $A$) Ahí se mueve.

12. Profesor: ¿Entonces $B$ es punto medio?

13. Santiago: ¡No! (Observa la siguiente representación en la que $B$ ya no pertenece al segmento $AC$).




14. Luis: ¡Ah!

15. Profesor: Porque para que sea punto medio nosotros dijimos que ¿qué debía pasar?

16. Luis: Debe estar sobre el segmento.

Puede considerarse que en sus declaraciones 1, 3, 9 y 11, Luis involucra el concepto dibujo, ya que solo menciona los elementos de la representación gráfica sin asociarlos con algún referente teórico que los dote de significado. Estos dibujos son construidos por él de manera inmediata y sin esfuerzo, por lo cual se trata de dibujos que son solo percibidos.

En las declaraciones 4, 7, 13 y 16, los estudiantes no solo se refieren a la representación gráfica, sino que le dan un significado que se relaciona con el concepto de punto medio. En este sentido, es posible afirmar que en estas declaraciones se involucra el concepto de figura y hay discernimiento. No obstante, hay una diferencia entre estas intervenciones. Las declaraciones 4 y 7 fueron hechas por Santiago sin haber variado alguno de los elementos de la representación. En cambio, las intervenciones 13 y 16 las realizaron los estudiantes cuando experimentaron, bajo el arrastre del punto $A$, la variación de la relación de colinealidad entre los puntos.

En sus declaraciones 4 y 7, Santiago relaciona la representación construida inicialmente con el concepto de punto medio, específicamente con su propiedad de equidistancia respecto a los extremos del segmento. Debido a esta relación, la representación gráfica significa algo para Santiago: es un dibujo que representa el objeto geométrico punto medio, basado en la propiedad de equidistancia. Hasta aquí, puede afirmarse que Santiago discierne que una de las propiedades del punto medio es la equidistancia.

En las declaraciones 13 y 16, los estudiantes relacionan las nuevas representaciones (las que se originan con el arrastre del punto $A$), también con el concepto de punto medio. Por esto, estas representaciones pueden considerarse como figuras. No obstante, en este caso la variación les permite a los estudiantes discernir que la relación de colinealidad, necesaria para ser punto medio, en su representación no es una propiedad invariante, ya que mediante el arrastre del punto $A$ pueden percibir infinidad de dibujos que no la cumplen. En este caso, el discernimiento depende específicamente de dos patrones de variación: contraste y separación. Hay contraste porque el arrastre les permite a los estudiantes comparar diferentes dibujos, que no representan el concepto punto medio, con el dibujo que inicialmente construyeron y que perceptualmente sí correspondía a dicho concepto. Hay separación porque los estudiantes pueden percibir cómo varía la posición del punto $A$, mientras que $B$ y $C$ se mantienen invariantes, con lo cual hay discernimiento de la no colinealidad.

## CONCLUSIONES

Como principal conclusión del análisis se tiene que las representaciones que construyeron los estudiantes de manera directa e inmediata les permitió percibir las propiedades de equidistancia y colinealidad relacionadas con el concepto de punto medio de un segmento. Luego, ellos lograron discernir estas dos propiedades, la primera sin variar los elementos de la representación que construyeron, y la segunda mediante los patrones de variación (contraste y separación) que surgen cuando los estudiantes arrastran un punto de la representación. El hecho de que hayan logrado discernir estas dos propiedades puede ser indicador de que los estudiantes reconocen la necesidad de estas en la definición de punto medio.

## REFERENCIAS


Aya, O., Echeverry, A. y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 35, 63-86.

Camargo, L. y Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 55-77). Bogotá, Colombia: Sistema de Publicaciones y Difusión del Conocimiento, UPN.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 361-382.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 439-460.

Orgill, M. (2012). Variation theory. En N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp. 3391-3393). Dordrecht, Holanda: Springer.

# TAREAS QUE PROMUEVEN EL USO EXPERTO DE UN ELEMENTO TEÓRICO EN LA ARGUMENTACIÓN

**Jennyfer Zambrano y Carmen Samper**
*Universidad Pedagógica Nacional*
nifer86@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

En este documento se ilustra, con ejemplos, el uso experto de un elemento teórico (definición, teorema o postulado) realizado por estudiantes de grado séptimo cuando argumentan. El uso experto de un elemento teórico en la geometría escolar es saber usarlo para resolver problemas o construir justificaciones. Se reconoce que el tipo de problema está relacionado con los argumentos que se generan durante el proceso de resolución, y con el papel del profesor en clase.

## INTRODUCCIÓN

Se presentan algunos resultados del estudio de Triana y Zambrano (2016), que se enfocó en identificar la relación entre el tipo de tarea y los argumentos que se generan durante su desarrollo, y en determinar si hay uso experto de elementos teóricos. El estudio se realizó en la clase de geometría de grado séptimo de un colegio oficial de la ciudad de Bogotá.

## REFERENTES TEÓRICOS

### Uso experto de elementos teóricos

El estatus teórico de postulados, teoremas y definiciones es distinto (Duval 2007); por ende, el uso experto de esos elementos teóricos en la geometría involucra acciones diferentes. Para Samper y Plazas (2017), el *uso experto de un postulado o teorema* incluye principalmente dos acciones: (i) reconocer la viabilidad de su uso para resolver un problema, formular una conjetura o producir una demostración, y (ii) reconocer que su uso, como garantía de argumentos, permite obtener lo que se busca. En cambio, el uso experto de una definición, usualmente depende del tipo de información que provee la situación: cuando se presenta el objeto con el término que lo designa, se desencapsulan las propiedades que lo definen, y cuando se ponen en juego las propiedades del objeto definido se encapsulan estas, para asignarle el término correspondiente.

Zambrano, J. y Samper, C. (2017). Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 155-160). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

## Argumentación matemática

Un argumento está compuesto por tres elementos básicos: unos *datos* que se proveen o se buscan; una *aserción*, proposición que tiene nexos con los datos; y una *garantía*, regla aceptada como válida que relaciona los datos con la aserción. Los argumentos se pueden clasificar según:

Su *estructura* (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013): un argumento puede ser deductivo, inductivo o abductivo, de acuerdo a cómo se establecen los datos $(p)$, la aserción $(q)$ y la garantía $(r: p \rightarrow q)$ en el argumento. Es deductivo si de $p$, usando $r$, se obtiene $q$; inductivo si de varias instancias de $p$ se evidencia como consecuencia instancias de $q$ y, de ello, se establece $r$. Es abductivo si se parte de $q$ para concluir la plausibilidad de $p$, a partir de una regla $r$.

La *forma como se estructura*: un argumento es *incompleto* si no se expresa alguno de los tres elementos básicos de este (Samper y Toro, 2017). De lo contrario es *completo.*

La *naturaleza de la garantía*: según Krummheuer (2000), un argumento es *analítico* si su garantía es válida y se sustenta en un sistema teórico aceptado. Es *sustancial* si la garantía incluye datos numéricos, dibujos, gráficas, etc., o si está basada en la experiencia con una representación ya sea en el computador o en papel. Samper y Toro (2017) consideran que también son argumentos sustanciales, que denominan *no legítimos*, aquellos en los que se usa como garantía una afirmación que no es elemento del sistema teórico conformado en clase, la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.

## Tareas matemáticas

Según Yeo (2007) una tarea en el ámbito escolar se puede caracterizar mediante aspectos variables como: la meta, el método, el andamiaje y su solución. La meta se refiere a los elementos teóricos y procesos matemáticos que se requieren para resolver el problema. El método tiene que ver con las estrategias de solución. Otro elemento de la tarea que permite caracterizarla es su objetivo didáctico, que puede estar relacionado con los procesos matemáticos que se quieren desarrollar mediante ella (argumentación, justificación, conjeturacion, investigación, traducción y ejercitación).

### CONTEXTO DEL ESTUDIO

En un curso de grado séptimo se les asignó a los estudiantes una secuencia de tareas cuyo objetivo era promover la conceptualización del objeto geométrico punto medio de un segmento y favorecer la argumentación. En algunas tareas se requería usar un programa de geometría dinámica. Luego de producir colectivamente la definición de punto medio, a partir de explorar en geometría dinámica algunas representaciones, se promovió su uso para resolver problemas, para relacionar el punto medio con otros objetos geométricos, y para conjeturar y justificar teoremas relacionados.

### EJEMPLOS DE USO EXPERTO DE ELEMENTOS TEÓRICOS

A continuación, se presentan evidencias del uso experto de la definición de punto medio y de un teorema relacionado, que surgieron en la solución de dos tareas de la secuencia. La definición de punto medio establecida en clase fue:

> i) es un punto que pertenece al segmento (lo que incluye colinealidad e interestancia) y ii) es equidistante de los extremos del segmento.

## Uso experto de la definición

En la siguiente tarea, el método es único (usar plegados) y el objetivo es promover la argumentación. El enunciado de la tarea es:

> En la hoja blanca encontrarás representados los puntos $A$ y $B$. Encuentra un punto $C$ para que $B$ sea el punto medio del $\overline{AC}$. Describe lo que hiciste y explica por qué procediste como lo hiciste.

A continuación se transcribe la conversación de Bayron con la profesora:

| | | |
|---|---|---|
| 221 | Bayron: | Bueno. Yo primero puse en el papel pergamino el punto $A$ y el punto $C$. **Los alineé**, o sea, la doblé para sacar el segmento. Después, para sacar el punto $B$, cogí el punto $C$ y lo alineé; le hice así (hace ademán) |
| 222 | Profesora: | Le hice así, ¿qué es? |
| 223 | Bayron: | O sea, lo doblé pues en el punto $C$, para poder sacar el $A$ y el punto $B$, **para que queden de la misma distancia.** |
| 224 | Profesora: | ¿Cómo puedes garantizar que el punto $B$ es el extremo del segmento, para que el punto $C$ sea el punto medio? |

225 Bayron: Porque $C$ **pertenece al segmento y está en la mitad.**

Bayron expresa un argumento abductivo analítico puesto que la aserción ya se tiene ($C$ debe ser punto medio de un segmento con extremo en $A$); él usa implícitamente como garantía la definición de punto medio. Como alude a la relación de pertenencia de $C$ al segmento $AB$ y a su equidistancia a los extremos, estos son los datos. Se puede afirmar que Bayron desencapsula la definición de punto medio porque sus frases, que hemos destacado en negrilla, son las propiedades del objeto.

## Uso experto de un teorema relacionado con la definición

El enunciado de la tarea asignada es:

> Sea el $\Delta ABC$, $D$ punto medio del $\overline{AB}$, $E$ punto medio del $\overline{BC}$, y $F$ punto medio del $\overline{AC}$. Observe los $\Delta BDE$ y el $\Delta DAF$. ¿Qué relación existe entre los perímetros de esos triángulos? Justifique su respuesta.

Para esta tarea hay, por lo menos, dos estrategias de solución (método). Una es representar la situación con geometría dinámica, encontrar los perímetros y compararlos. Otra es usar que el segmento con extremos los puntos medios de dos lados del triángulo miden la mitad de la longitud del tercer lado (hecho geométrico abordado en una tarea anterior) para establecer la relación entre los perímetros. La tarea es, de acuerdo con su objetivo, de conjeturación y argumentación.

A continuación se presenta la conversación de los estudiantes con la profesora.

950 Sergio: Nosotros encontramos que los perímetros del triángulo $DEF$ son la mitad de los perímetros del triángulo $ABC$.

951 Profesora: Demuéstrame que lo que acabas de encontrar es cierto.

952 Nancy: Estamos midiendo los segmentos del triángulo que son $BA$, $BC$ y $AC$. Vamos a medir los segmentos del triángulo más pequeño (le muestra a la profesora lo que hizo utilizando el *software*)

953 Sergio: No los midamos. El hecho geométrico que encontramos la clase pasada dice que esto mide la mitad (señala el segmento $DF$).

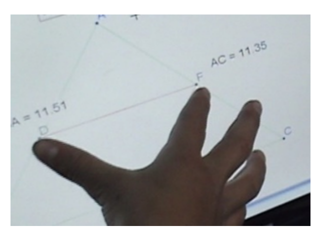



Figura 1

954 Nancy: Sería la mitad de cada segmento. Eso da.

En la intervención 950 se identifica la aserción. Los datos son $D$, $E$ y $F$ puntos medios de los lados del triángulo $ABC$. La garantía es el hecho geométrico ya mencionado, que Sergio usa al reconocer que no es necesario medir los segmentos. El uso experto de este hecho geométrico se evidencia cuando, a petición de la profesora, Sergio expresa su conjetura como proposición condicional (Figura 2):

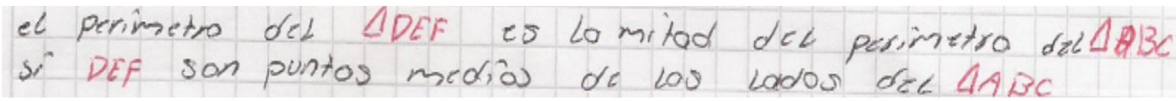

el perimetro del ΔDEF es la mitad del perimetro del ΔABC
si DEF son puntos medios de los lados del ΔABC

Figura 2. Registro escrito de Sergio

## COMENTARIOS FINALES

Durante el desarrollo de la secuencia de tareas, la participación de los estudiantes se caracterizó por el uso de los elementos teóricos establecidos en clase. El proceso de conformar conjuntamente un sistema teórico local permitió que los estudiantes fueran adquiriendo elementos que podían usar como garantías en sus argumentos. Además, se evidenció que los estudiantes incorporaban el lenguaje geométrico en sus comunicaciones. Estas ganancias permitieron que en las últimas tareas, los estudiantes se remitieran de manera explícita a las definiciones para desencapsular las propiedades de punto medio y con ella justificar sus soluciones. A raíz de la exigencia de la profesora de explicar cómo obtuvieron la relación entre los perímetros, los estudiantes expusieron sus ideas y recurrieron al hecho geométrico para validarlas.

Las intervenciones del profesor juegan un papel importante en la construcción de significado de los elementos teóricos para ser usados como garantías (Samper y Plazas, 2017). Al diseñar una tarea, el profesor debe tener claro cuál es el objetivo de esta, que debe estar directamente relacionado tanto con la conceptualización de un objeto o relación matemática como con los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar, como la generalización, la visualización, la justificación, la argumentación. El profesor debe propiciar la exploración de diversas representaciones de la imagen del concepto, y el uso de la definición del concepto en diferentes contextos, para favorecer el proceso de conceptualización y el uso experto de dicho elemento teórico.

Para que los elementos teóricos vayan adquiriendo significado para los estudiantes y, por ende, que estos puedan idear estrategias de solución y utilizar garantías legítimas en sus argumentos, y además aprendan a manejar con destreza los recursos utilizados en las clase de geometría (e. g., regla, compás, *software* de geometría dinámica), es recomendable proponer tareas en las que sea claro para los estudiantes qué elementos teóricos están involucrados en la solución (meta).

## REFERENCIAS

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 22-32.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en el aula de geometria a nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometria plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 13-66). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagogica Nacional.

Samper, C. y Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación Matemática*, *29*(1), 37-60.

Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentacıón en un ambıente de geometría dınámıca. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 367-382. Recuperado de:

http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346

Triana, J. y Zambrano, J. (2016). *Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación* (Tesis de maestría). Universidad Pedagogica Nacional, Bogotá, Colombia.

Yeo, J. B. (2007 ). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment* (Reporte técnico ME2007-01). Nanyang, Singapur: Nanyang Technological University. Recuperado de:

https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/949/3/MathematicalTasks.pdf

# Póster

# LA GEOMETRÍA DE LA DANZA

**Yanira Salinas**
*Colegio Antonio Baraya I.E.D.*
yamasalinass@gmail.com

Se presentan algunas experiencias pedagógicas de aula relacionadas con los aportes cognitivos que el cuerpo en movimiento (danza) ofrece a la construcción de conceptos geométricos.

Es rasgo característico de las clases tradicionales de matemáticas, la idea de que estas se aprenden en silencio y soledad. Como lo señala Vega (2010), podría decirse que en las dinámicas de la clase de matemáticas, el cuerpo es "excluido", o que se observa una especie de inmovilidad concertada. Ahora bien, en la actualidad existen posturas pedagógicas que resaltan la importancia del cuerpo incluso en el aprendizaje de ciencias exactas como las matemáticas. Ejemplo de ello, es la teoría de las inteligencias múltiples en la que Howard Gardner (1998) plantea como uno de los principales interrogantes la posibilidad de transferir un conocimiento de una capacidad a otra. Para el caso particular, se explora tal transferencia entre la capacidad del matemático y la del bailarín, quienes a partir de la construcción de sistemas de signos y símbolos, y la definición de unas estructuras propias, diseñan una visión de la realidad.

## EXPERIENCIAS EN EL AULA

El proceso en el aula se desarrolla a partir de una exploración de posibles lazos teóricos, seguida de un trabajo de tipo coreográfico, la construcción de planimetrías[1] y su representación geométrica en el plano cartesiano. Cada actividad y su respectiva aplicación se evalúan esperando ahondar en las búsquedas teóricas, monitorear su pertinencia en atención al cumplimiento del objetivo de clase, y plantear reflexiones frente a la inclusión de la danza en la clase de geometría y del cuerpo como herramienta de aprendizaje.

En la Figura 1 se presentan algunos lazos teóricos trabajados en clase y su representación gráfica.

---

[1] La planimetría es el trazado que se hace en papel del ejercicio coreográfico.

Salinas, Y. (2017). La geometría de la danza. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 163-164). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

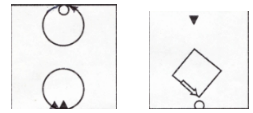
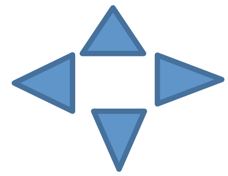
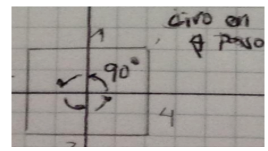
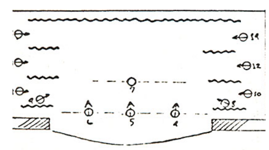
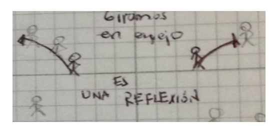
| | |
|---|---|
| Ubicaciones del cuerpo de bailarines, asociadas a figuras geométricas básicas. |  |
| Cambios de frente, proceso mental que se asocia, en el plano cartesiano, con las diferentes transformaciones geométricas, cuando se diseña la planimetría en un contexto geométrico. |  |
| Giros en 2, 4 y 8 tiempos que permiten una asociación directa con la circunferencia y su división en zonas de 180°, 90° y 45°, a partir del concepto de rotación como trasformación geométrica. |   |
| División del escenario en tercios, que da a los estudiantes una distribución coreográfica en el primero, segundo y tercer tercios del espacio escénico. |  |
| Figuras en espejo que se asocian al concepto de reflexión en el plano cartesiano como trasformación geométrica. |   |

Figura 1. Lazos teóricos trabajados en clase y su representación gráfica

## CONCLUSIÓN

Involucrar el cuerpo en la clase de geometría contribuye en la recuperación del sentido espacial intuitivo y en la exploración activa del espacio, aporta en la modificación de redes conceptuales y agrega al aprendizaje dinamismos fortaleciendo el desarrollo de la creatividad y la imaginación.

## REFERENCIAS


Gardner, H. (2001). *La inteligencia reformulada: las inteligencias múltiples en el siglo XXI* (Genís Sánchez Barberán, Tr.). Barcelona, España: Paidós (primera edición en inglés, 1999).

Vega, V. (2010). *Cuerpo, diálogo y educación. Una aproximación desde la fenomenología* Bogotá, Colombia: CINDE.