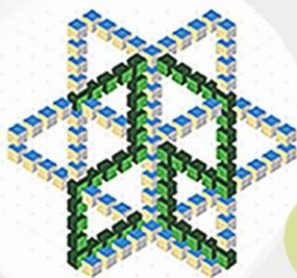


MEMORIAS

del Encuentro
de **GEOMETRÍA**
y SUS
APLICACIONES



junio de 2015

Patricia Perry
Editora



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

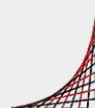


CONSTRUIMOS FUTURO



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores



ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO



UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA

Publicado por la Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas

MEMORIAS

del Encuentro de GEOMETRÍA
y sus APLICACIONES

Patricia Perry
Editora



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

MEMORIAS DEL ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES

Editora

Patricia Perry

Diseño de logo

Benjamín Sarmiento, Carmen Samper

Diseño y diagramación de portada y portadillas

Camilo Sua

ISSN: 2346-0539

© 2015 Universidad Pedagógica Nacional

© 2015 Autores

Se autoriza la reproducción total o parcial de algún artículo, previa cita a la fuente:

Perry, P. (Ed.) (2015). *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.



Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Calle 72 No. 11 86
Bogotá, Colombia

PRESENTACIÓN

El *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* es un evento académico de carácter internacional que tradicionalmente ha organizado la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) con el apoyo de otras instituciones. El propósito ha sido convocar a matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Con el *Encuentro* se espera contribuir a: la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y docentes de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones; el fomento del estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

El 22° *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* ha sido organizado por la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad Sergio Arboleda, la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, la Universidad Industrial de Santander y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. El grupo de invitados a participar cuenta con cinco personas de reconocida trayectoria académica a nivel internacional: Nadia Douek, de la Universidad de Niza (Francia); Manuel Morón, de la Universidad Complutense de Madrid (España); Yves Martin, de la Universidad de la Réunion (Francia); María Aravena, de la Universidad Católica del Maule (Chile); y Claudia Acuña, del CINVESTAV (México). A nivel nacional, están invitados a participar profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas: Colombia Aprendiendo, Pontificia Universidad Javeriana, Universidad Antonio Nariño, Universidad de los Andes, Universidad de Pamplona, Universidad del Atlántico, Universidad del Rosario, Universidad del Valle, Universidad Nacional de Colombia, y de las entidades organizadoras. Para esta versión del *Encuentro*, las actividades académicas se relacionan con alguna de las siguientes temáticas: geometría en la educación matemática, geometría e historia, geometría y otras ramas de la matemática, geometría y artes, geometría y tecnología, y temas de geometría.

Las ponencias sometidas a consideración del Comité Académico del *Encuentro* fueron evaluadas por pares académicos. Este libro digital, que no es

una compilación de documentos sino una obra editada, incluye solo los documentos que además de haber sido aceptados por los evaluadores pasaron por un proceso adicional de evaluación y de edición académica, este último con la participación de los autores.

Comité Organizador
Bogotá, junio de 2015

ORGANIZACIÓN DEL ENCUENTRO

COMITÉ ORGANIZADOR

Universidad Pedagógica Nacional

Carmen Samper, Tania Plazas, Leonor Camargo, Camilo Sua

Universidad Sergio Arboleda

Julia Rojas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Carlos Álvarez, Alicia Guzmán

Universidad Industrial de Santander

Jorge Fiallo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Martín Acosta

COMITÉ DE REVISIÓN ACADÉMICA

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Bernarda Aldana, Carlos Álvarez, Édgar O'bonaga

Fundación AprendEs

Miriam Ortiz

Universidad de Campinas

Jenny Acevedo

Universidad de Pamplona

Élgar Gualdrón

Universidad del Atlántico

Armando Aroca

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Martín Acosta, Olga León

Universidad Industrial de Santander

Jorge Fiallo

Universidad Nacional de Colombia

Iván Castro

Universidad Pedagógica Nacional

Juan Carlos Ávila, Mauricio Bautista, Leonor Camargo, Alberto Donado, Felipe Fernández, Édgar Guacaneme, Luis Guayambuco, William Jiménez, Óscar Molina, Johanna Montejo, Lyda Mora, Jorge Páez, Patricia Perry, Tania Plazas, Sandra Rojas, Carmen Samper, Yeison Sánchez, Benjamín Sarmiento, Camilo Sua

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Miguel Díaz, Clara Rojas

Universidad Sergio Arboleda

José Luis Ramírez

Universidad del Valle

Luis Carlos Arboleda

ENTIDAD DE APOYO ADMINISTRATIVO

Fundación Francisca Radke

ENTIDADES AUSPICIADORAS

Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería, Belpapel Ltda., Centro Cultural del Gimnasio Moderno, DINISSAN, Districalc, Grupo Editorial Norma, ICETEX, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Universidad de Medellín

TABLA DE CONTENIDO

CONFERENCIAS DE INVITADOS

Aspectos cognitivos del aprendizaje de la geometría <i>Acuña, C.</i>	3
---	---

Obituario Alexander Grothendieck (Berlín, 28/03/1928 – Saint-Girons, 13/11/ 2014 <i>Zalamea, F.</i>	7
---	---

CURSILLOS DE INVITADOS

Gestión del profesor en pro de la evolución de significados en el aula de geometría <i>Camargo, L., Plazas, T., Samper, C. y Sua, C.</i>	21
--	----

Enunciado de un teorema: ¿único componente de su significado? <i>Molina, Ó., Samper, C. y Perry, P.</i>	25
--	----

Retroacciones didácticas con Cabri LM como medio <i>Pérez, L., Fiallo, J. y Acosta, M.</i>	29
---	----

CONFERENCIAS

El producto vectorial: esbozo histórico y aplicaciones <i>Álvarez, Y. y Moreno, A.</i>	35
---	----

Geometría, compañera de grandes matemáticos <i>Gómez, Ó.</i>	43
---	----

El Club de Matemáticas UPN – IPN: un espacio para el desarrollo de habilidades matemáticas de la niñez <i>Lima, I. y Rodríguez, T.</i>	51
--	----

CURSILLOS

Actividades para la comprensión de la ecuación de la recta utilizando el software CaRMetal <i>Cárdenas, Y., Hernández, H. y Pinzón, K.</i>	59
--	----

Construcciones geométricas con el uso del portasegmentos <i>Gen, A. y Sequeira, R.</i>	63
Probabilidades geométricas: ejemplos y reflexiones didácticas <i>Net, G.</i>	67
Superficies cuadradas que se transforman en nudos <i>Panqueva, J.</i>	71
Geometrotermodinámica y sus aplicaciones <i>Quevedo, H. y Quevedo, M.</i>	75
Ideas interesantes sobre geometría en la escuela media <i>Sángari, A. y Egüez, C.</i>	79
COMUNICACIONES BREVES	
Argumentación de estudiantes del ciclo IV, apoyada en un software de geometría dinámica <i>Bacares, J. y Cruz, M.</i>	85
La relación de Euler: una conexión entre la geometría y la topología <i>Bello, A. y Peña, C.</i>	93
El elipsógrafo de Van Schooten: consideraciones para la enseñanza de la elipse <i>Beltrán, J.</i>	95
Comprensión del concepto de simetría a través del doblado de papel en el marco de la Enseñanza para la Comprensión <i>Cardona, A., Gómez, J. y Santa, Z.</i>	103
Consideraciones sobre cuadrados mágicos <i>Domínguez, L. y Medina, I.</i>	111
Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café <i>González, D., Santa, Z. y Londoño, R.</i>	119
Reconstrucción de curvas cerradas a partir de la función angular en el plano <i>Loaiza, C. y Lesmes, M.</i>	127

La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes <i>Martínez, D.</i>	133
Aplicación geométrica en el análisis formal de una obra arquitectónica. Caso: Catedral Metropolitana de Medellín <i>Merchán, D. y Echeverri, M.</i>	141
Operadores morfológicos difusos <i>Ochoa, C. y Forero, W. (2015). Operadores morfológicos difusos</i>	149
Tratamiento de los teoremas de existencia en un curso de geometría plana <i>Ortiz, A., Cardozo, S. y Molina, Ó.</i>	155
Análisis del desempeño en resolución de problemas en estudiantes que hacen parte de un Club de Geometría <i>Parada, I., Rivera, T. y Urbina, J.</i>	163
Ambiente indagativo y argumentación en un contexto de geometría dinámica: una experiencia en grado séptimo <i>Puentes, J.</i>	171
Enseñanza y aprendizaje de la simetría axial a través de situaciones didácticas, utilizando Cabri como medio <i>Ramón, B.</i>	179
La actividad demostrativa de estudiantes de grado octavo del Colegio Paulo VI - IED <i>Rodríguez, A. y Camargo, L.</i>	187
PÓSTERS	
Construcción de secciones cónicas apoyada por geometría del doblado de papel y geometría dinámica <i>Gómez, S. y Cárdenas, W.</i>	197
Una representación geométrica de S_n^m <i>Hurtado, M.</i>	199
Aplicación de la geometría en arquitectura. Caso: Catedral Metropolitana de Medellín <i>Merchán, D. y Echeverri, M.</i>	201

Estudio de superficies con curvatura media $H = 0$ y $H \neq 0$: un análisis matemático y físico	203
<i>Pacheco, D. y Suárez, L.</i>	
Flexogramas	205
<i>Ramírez, L., Acosta, A. y Angarita, R.</i>	
Enseñanza de la geometría en superficies mínimas elaboradas con películas de jabón	207
<i>Suárez, L. y Pacheco, D.</i>	
ANEXO	
Resúmenes de conferencias y cursillos de invitados que no presentaron artículo	211



Conferencias de invitados



ASPECTOS COGNITIVOS DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Claudia Acuña

Cinvestav-IPN, México

claudiamargarita_as@hotmail.com

Los aspectos cognitivos a los que haremos mención en esta plática se refieren a la intuición y la visualización en geometría; estos dos aspectos del proceso de aprendizaje son escasamente tratados entre investigadores y docentes, pese a que la geometría se distingue por sus representaciones pictóricas que o bien hacen labor de ilustración de proposiciones particulares o son ellas mismas objeto de estudio. Delinearemos actividades cognitivas que se deben tomar en cuenta, así como ejemplos que nos permitan diferenciar visualización e intuición en ejemplos de la clase de matemáticas.

LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Si la matemática es una actividad esencialmente simbólica, desde el punto de vista de Radford (2006) con quien coincidimos, la geometría, además, está ligada a símbolos o *figuras*¹ que para su uso e interpretación no se regulan sintácticamente como en el álgebra o en la aritmética, sino que estos deben ser generalmente interpretados. En esta rama de la matemática es posible activar el pensamiento geométrico en cualquiera de las figuras usadas para este fin, ya sean exactas o solamente sugeridas, de manera que la figura juega no solo uno sino distintos papeles en el aprendizaje de la geometría.

De manera que, una actividad que se impone en el estudio de la geometría es aquella que va de lo ostensivo a lo no ostensivo, como afirman Godino, Batanero y Font (2009), del trabajo con las representaciones a los objetos abstractos asociados, de la visión a la visualización según Duval (2003).

LAS ACTIVIDADES COGNITIVAS EN LA GEOMETRÍA

La enseñanza de la geometría, tradicionalmente, ha usado las figuras para ilustrar proposiciones matemáticas o como apoyo de la investigación de propiedades y relaciones. Una de las contribuciones de la Resolución de Problemas ha

¹ Usamos el término *figura* en el sentido de Mesquita (1998).

sido indicar el valor epistemológico del uso heurístico de la figura para el aprendizaje de la geometría; sin embargo, poco se ha estudiado sobre las actividades cognitivas asociadas a la interpretación de las figuras.

Consideramos en esta plática la importancia de establecer una base clara sobre lo que, desde el punto de vista de la matemática, deberíamos tener en cuenta en actividades como la visualización y la intuición.

La visualización como actividad matemática

Consideramos que cuando el sentido de la vista se pone en funcionamiento y observamos una figura geométrica con el propósito de interactuar con la información que se muestra en ella, se pueden activar dos tipos distintos de procesos: (i) la visión y (ii) la visualización (Duval, 2003). Estas actividades cognitivas, pese a compartir características de aprehensión simultánea, difieren esencialmente en la construcción que hace el individuo de lo que se denomina representación semiótica, la cual no solo integra la información visual de la figura, sino que incorpora las propiedades que hacen de la figura un símbolo matemático.

Al mismo tiempo, hemos de considerar el carácter dual de las figuras que se usan en el aprendizaje de la geometría; este carácter se expresa de forma simple considerando que los objetos matemáticos pueden ser pensados como *objetos* y como *conceptos* (Fischbein, 1993). Es frecuente que nuestros estudiantes usen las figuras como objetos; así, un triángulo es el dibujo que permite rememorar el visto previamente en el aula, tanto en su forma como en su posición, y se confunde, entonces, la representación con lo representado; pero, también, en este uso de la figura como objeto se ponen en funcionamiento ciertos procesos cognitivos detectables a los que nos referiremos en adelante.

Para comprender el proceso de visualización es necesario considerar cierto tipo de tratamientos cognitivos sobre las figuras mismas, desde la óptica de la psicología como son: la relación Gestalt entre fondo y forma de una figura (Duval, 2003). Nosotros hemos detectado que también tienen una importante connotación:

1. El uso de ciertos prototipos figúrales de índole personal, estructuras que actualmente se tratan con la idea de marcos (*frames*).

2. Una explicación ontológica ingenua y personal de la existencia de las figuras y sus atributos ostensivos.

Estos tipos de tratamiento los podemos encontrar principalmente entre estudiantes novicios, aunque los mayores no están exentos de usarlos.

La intuición en matemáticas

El otro aspecto cognitivo que nos interesa comentar es el que se refiere a la llamada intuición en matemáticas. Lo abordaremos desde la óptica de Fischbein (1987), indicando lo que podría considerarse la intuición que es relevante para el trabajo en matemáticas y cómo esta postura llega a concretarse en las reglas intuitivas propuestas por Stavy y Tirosh (1996), así como presentando algunas de las consideraciones polémicas sobre este trabajo.

Más adelante veremos la idea de la imaginación matemática de Nemirovsky y Ferrara (2009) para arribar, desde la Teoría Ontosemiótica, a la propuesta del trabajo de Font y Malaspina (2009) que nos permite observar esta actividad a través de sus componentes organizadas en un vector metafórico.

Finalmente, nos gustaría tratar distintos ejemplos a lo largo de esta plática para interpretar tanto la visualización como la intuición de las que se ha venido haciendo mención aquí.

REFERENCIAS

- Duval, R. (2003). "Voir" en Mathématiques. En E. Filloy (Coord.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-77). México D.F., México: Fondo de Cultura Económica.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holanda: Reidel.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Depto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm#sintesis
- Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.

Nemirovsky, R. y Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 159-174.

Disponible en: <http://www.sci.sdsu.edu/tlcm/all-articles/nemirovsky-2008-mathematical-imagination.pdf>

Radford, L., (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (número especial), 7-21.

Stavy, R. y Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: The case of ‘more of A – more of B’. *International Journal of Science Education*, 18(6), 653-667.

OBITUARIO¹
ALEXANDER GROTHENDIECK
(BERLÍN, 28/03/1928 – SAINT-GIRONS, 13/11/ 2014)

Fernando Zalamea
Universidad Nacional de Colombia
www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

La persona y la obra de Alexander Grothendieck han entrado ya en el aura mitológica de los grandes matemáticos de todos los tiempos. La potencia indomable de su personalidad y las características de su inagotable productividad –vaivén de extraordinaria finura técnica y originalísima profundidad conceptual– le sitúan como el mayor matemático del siglo XX, fuente de preguntas y desarrollos cruciales para la matemática de los siglos venideros. Mente dotada de una rapidez inusual y capaz de adentrarse directamente en el corazón de los cuestionamientos esenciales de su disciplina, cambió en solo dos décadas (1950-1970) el panorama entero de las matemáticas, al introducir nuevas nociones de número (*esquemas*), espacio (*topos*) e invariantes de la forma (*motivos*), cuya herencia ha ido esclareciendo una impresionante sucesión de Medallistas Fields (Atiyah, Mumford, Deligne, Connes, Drinfeld, Kontsevich, Voevodsky, entre otros).

La vida de Grothendieck [6, 7, 8] posee todos los ingredientes de una trágica narración novelesca. Hijo de Alexander (Sascha) Schapiro y Johanna (Hanka) Grothendieck, fotógrafo y escritora anarquistas, vive hasta los cinco años con ellos y con su hermana Maidi, nacida en matrimonio previo de Hanka, en un periodo pleno de armonía y riqueza emocional, tal como lo recordará cincuenta años después en *Cosechas y siembras* [1985-86]. Sascha y Hanka deciden anteponer luego sus tareas revolucionarias a la crianza de los hijos, y parten en apoyo de la República en la Guerra Civil española, dejando a Alexander cerca de Hamburgo con la familia de un pastor protestante. Son años en los que el niño demuestra ya la característica *pasión* que gobernará todas sus acciones: se entusiasma con la rima y durante largos periodos habla

¹ Tomado de *Lecturas Matemáticas*, 36(1), 93-102, con la debida autorización de sus editores. Aunque este documento no corresponde al contenido de la conferencia inaugural, está estrechamente relacionado con ella. [N.E.]

solo en versos, resuelve e inventa crucigramas, escribe y exhibe, según uno de sus profesores, “un notable talento novelístico” [6, p. 110]. En 1939, después de la derrota de la República en la Guerra Civil, se reúne con sus padres en el sur de Francia, antes de que se desmiembre de nuevo la familia: el padre es internado en el campo de concentración Le Vernet y luego deportado a Auschwitz (asesinado en 1942), mientras Hanka y Alexander son enviados como “indeseables” al campo de Rieucros. Al disolverse Rieucros en 1942, Alexander termina sus estudios secundarios en el Liceo Cévénol en Le Chambon, donde confirma su temperamento rebelde y donde se apasiona por el latín y por el piano –signo de un temperamento musical que consumirá sus años doctorales en Nancy y que reaparecerá constantemente en su producción técnica y en su reflexión conceptual–. Entre 1945 y 1948 vive en Mairargues, un pequeño pueblo en medio de los viñedos, cerca de Montpellier donde realiza su Carrera de Matemáticas, en condiciones económicas difíciles, mientras ejerce de labriego en los campos. Autodidacta, afianza su independencia, y redescubre por sí solo la teoría de la medida de Lebesgue. No nota a sus profesores, ni es notado por ellos, hasta que un inspector del gobierno, André Magnier, detecta la genialidad del joven (a la sazón con veinte años) y le otorga una beca de estudios para París.

La vida matemática de Grothendieck cambia radicalmente con su llegada, en 1949, al Seminario Cartan en la *École normale supérieure*. Como el mismo Grothendieck señala [1985-86, parte 1, pp. 18-19], no había oído hablar hasta entonces (!) de espacios topológicos, grupos, anillos, módulos, homología, etc. La fenomenal capacidad de Grothendieck se revela en el gigantesco salto matemático realizado entre su inocente ignorancia de 1949 (París) y su espectacular acumen técnico de 1953 (Nancy), cuando al terminar su Tesis Doctoral sobre **espacios nucleares** [1953a] se ve convertido, en palabras de Schwartz, en “el primer especialista mundial” [8, cap. 3, p. 12] en la teoría de los **espacios vectoriales topológicos**, y, según Dieudonné, en el autor de una obra “solo comparable con Banach” [4, p. 2]. Son famosas las anécdotas, corroboradas en años y lugares distintos por sus dos directores de tesis, de cómo Dieudonné, con su característico ímpetu, habría botado a la basura la larga reconstrucción de Lebesgue realizada por Grothendieck en Montpellier, para proponerle en cambio “problemas difíciles” [6, p. 182]: una serie de catorce preguntas abiertas (alrededor de las cuales Schwartz estaría recibiendo en 1950 la Medalla Fields, buen indicador de la profundidad del tema), mitad de las cuales el joven resuelve en pocas semanas y todas ellas en un par de años

más, dando lugar a “seis memorias, cada una de las cuales habría conformado una buena tesis” [4, p. 2]. El periodo “analítico” de Nancy continúa en la Universidad de Sao Paulo, donde el apátrida Grothendieck consigue un trabajo postdoctoral entre 1953 y 1955. Realiza allí su monografía sobre espacios vectoriales topológicos [1953b] y escribe su fenomenal *Résumé* [1953c], un verdadero *tour de force* donde, a partir de un meticuloso estudio reticular-topológico-algebraico-categorico de (¡las únicas!) 14 normas naturales sobre **productos tensoriales de espacios de Banach**, resuelve el problema de Banach-Mazur (caracterización de los espacios de Hilbert como L-subespacios y C-cocientes), propone el problema de aproximación (resuelto por Enflo en 1972), y presenta la famosa **desigualdad de Grothendieck**, cuyas enormes consecuencias (en los campos más disímiles: C^* -álgebras, geometría no conmutativa, mecánica cuántica, teoría de grafos, problema $P=NP$) renovarán cincuenta años después el estudio fino local de los espacios de Banach.

El año 1955 “marca un giro crucial” en su trabajo matemático: “el paso del «análisis» a la «geometría»” [1985-86, parte 0, p. 26]. De hecho, en menos de un semestre, en la Universidad de Kansas, a los 27 años, Grothendieck escribe las ideas principales de su extenso tratado sobre las **categorías abelianas** [1957a, el denominado *Tôhoku*], donde según MacLane aparece entonces la “noción de teoría de categorías como un tema propio de estudio” bajo la influencia de Grothendieck [5, p. 158]. Allí *unifica* la cohomología a coeficientes en un **haz** y la serie de **funtores derivados** de funtores de módulos, y resuelve en abstracto la existencia de suficientes **proyectivos e inyectivos** (procedentes de su Tesis y del *Résumé*) mediante la primera aparición de **axiomas infinitarios** en la teoría de categorías. Por otro lado, empieza a trabajar en su versión generalizada del teorema de **Riemann-Roch** [1957b, 1958a], una labor profunda de enlace entre lo lineal (dimensión vectorial de espacios de funciones meromorfas) y lo geométrico (género de curvas) que da lugar a la **K-teoría**, base del teorema del índice de Atiyah-Singer, uno de los resultados centrales de la matemática del siglo XX. Si tuviésemos tal vez que sintetizar la obra de Grothendieck, esta debería explicarse como una *suavización abstracta general del entronque entre Galois y Riemann* [10]. En efecto, aunque Betti y Poincaré realizaron las primeras unificaciones de los dos grandes Maestros del XIX, estas se quedan cortas con respecto a la amplitud del programa grothendickiano (nítidamente expresado en su conferencia plenaria del Congreso Internacional de Matemáticas [1958b]), cuya nueva fundamentación del número (esquemas) y del espacio

(topos) procederá de sus trabajos iniciales en teoría de categorías y geometría algebraica. Es también la época de su intensa conexión con Jean-Pierre Serre [2], su *alter ego* y “educador” matemático, de quien diría “todo lo que aprendí en «geometría» (en un sentido muy amplio, que engloba la geometría algebraica o analítica [i. e. de la variable compleja, ver 1960], la topología y la aritmética), lo aprendí de Serre, cuando no lo estudié por mí mismo” [1985-6, parte 3, pp. 555-556].

Grothendieck emprende entonces su titánica tarea de reconstrucción de la geometría algebraica *a la manera categórica*, con una **inversión metodológica** de hondas consecuencias para el desarrollo posterior del pensamiento matemático: no definir *un* objeto y explorar *una* estructura interna sobre el objeto, sino definir la categoría de *todos* los objetos similares y explorar (axiomáticamente) la estructura *interna* de la categoría; no entender un objeto *en sí*, sino un objeto *en múltiple* (a través de su **functor representable** asociado). Este es el sentido de la famosa metáfora de la “marea subiente”, donde se sumerge una nuez en un líquido que la cubra enteramente, para poder así disolver *naturalmente* su cáscara (sin destrozarla con un “martillo”) y dejar emerger *suavemente* su fruto interior [1985-86, parte 3, p. 553]. De la obra de Grothendieck –desde sus altos lineamientos generales, hasta sus concreciones técnicas más particulares– se desprende un paradigma fundamental, que podríamos denominar la práctica de una **matemática relativa** (asociada al “lenguaje módulo C” de Serre y a las categorías cociente [1957a, p. 137]). Las estrategias de Grothendieck pueden entenderse, de hecho, en un sentido conceptual, como cercanas a las modulaciones relativas introducidas por Einstein en la física. Tanto Einstein como Grothendieck manejan, de manera técnica, el marco del observador y las dinámicas parciales del agente en el conocimiento. En particular, en el hacer de Grothendieck, puede observarse, primero, una introducción de una red de incesantes *traslados*, *traslaciones*, *traducciones* de conceptos y objetos (“tipos”) entre regiones aparentemente distantes de la matemática, y, segundo, una búsqueda igualmente incesante de *invariantes*, *proto-conceptos* y *proto-objetos* (“arquetipos”) detrás de esa red de movimientos. En particular, los haces (objetos paradigmáticos para Grothendieck, desde su Tesis Complementaria para el Doctorado) permiten encarnar, en sus definiciones técnicas, asociadas a la continuación analítica y al **paso de lo local a lo global**, tanto el flujo, como el reposo.

Después de la notable década de los cincuenta, se abren los famosos seminarios que tornarán al *Institut des Hautes Études Scientifiques* (IHES) en

el primer centro mundial de la investigación matemática, y que terminarán de asegurar la **Medalla Fields** (1966) para Grothendieck (ver el recuento de su obra por Dieudonné [4], en Moscú, adonde Grothendieck no viajó en protesta por la barbarie soviética). El IHES, abierto para Dieudonné, quien, con su enorme generosidad, había condicionado su contratación a la de Grothendieck, se convierte de hecho en el lugar soñado para la década mayor de la invención grothendickiana. Gracias a su colaboración con Dieudonné emerge el gigantesco *Elementos de Geometría Algebraica* (EGA) [1960-67], y gracias a la colaboración con alumnos y colegas brillantes (Demazure, Artin, Verdier, Deligne, etc.) se construye el aún más monumental *Seminario de Geometría Algebraica* (SGA) [1960-69]. Situándose dentro de lo que luego llamaría Thom la “aporía fundadora de las matemáticas” [9] —es decir, dentro de la *irresoluble dialéctica contradictoria* discreto/continuo—, Grothendieck inventa sus **esquemas** (aparición en 1960) como una herramienta muy potente para intentar resolver las **conjeturas de Weil** (1949). Por un lado, las conjeturas —lazos precisos entre lo discreto y lo continuo— intentan contar el número de puntos en ciertas variedades algebraicas sobre campos finitos, mediante funciones generadoras del tipo de las funciones zeta, provenientes de la intuición continua complejo-topológica de Riemann. Por otro lado, los esquemas, definidos como haces de anillos locales sobre el espectro topológico (ideales primos con topología de Zariski) de un anillo conmutativo arbitrario, entroncan la visión de Riemann (anillos de meromorfos) y aquella de Galois-Dedekind (anillos de números algebraicos). Dwork (1960) demuestra la racionalidad de las funciones zeta, Grothendieck (1966) la ecuación funcional que las gobierna y Deligne (1974), el mayor alumno de Grothendieck [3], la adecuada distribución de sus ceros (lo que da lugar al conteo combinatorio de los puntos en la variedad). El resultado de Deligne es un verdadero *tour de force* técnico que le valdrá la Medalla Fields. La *matemática moderna*, en la primera mitad del siglo XX, culminaba con la sorprendente prospección de Weil; impulsado por una muy fina intuición concreta y por una inusual capacidad para develar analogías en el cruce entre variedades algebraicas y topología, Weil había logrado *enunciar* con gran precisión sus conjeturas. La *matemática contemporánea*, en la segunda mitad del siglo XX, emerge en la obra de Grothendieck, y crea todo el aparataje de geometría algebraica que permite en cambio *resolver* esas conjeturas. Mientras que las topologías de Zariski sirven de mediaciones en el cruce (variedades algebraicas / topologías), y permiten enunciar las conjeturas, las **cohomologías** (“*étale*”, *l-ádica*) de Grothendieck y de su escuela sirven de mediaciones en el cruce

(esquemas / topos), permitiendo ahora resolverlas. Al extender las variedades algebraicas al ámbito de los esquemas, la riqueza de la *invención genérica* grothendickiana no procede gratuitamente. De hecho, la generalización nunca se realiza sin adecuadas particularizaciones en mente (algo que se le ha criticado a Grothendieck, con total desconocimiento de causa), y se trata en realidad de un complejo proceso de *ascenso y descenso* que resulta estar siempre gobernado por consecuencias concretas del más alto valor matemático (son testigos los numerosos **ejemplos** de la década del 50, en análisis funcional, álgebra y variable compleja).

Más allá de los haces como objetos singulares, la *proto-topología* que subyace a ciertas *categorías* de haces da lugar a los **topos de Grothendieck** (aparición en 1962, ver [1]). En categorías con buenas propiedades de composicionalidad y cubrimiento, una topología abstracta (**topología de Grothendieck**) puede definirse mediante (sub)colecciones de morfismos que “empaten” bien las unas con las otras. Las categorías de **prehaces** (categorías de funtores a valores en la categoría de conjuntos) verifican esas buenas propiedades de composicionalidad y cubrimiento, y pueden definirse allí topologías de Grothendieck. Los topos proceden entonces de categorías de prehaces que se “sitúan” alrededor de una topología de Grothendieck (entornos categóricos llamados **sitios** – una simplificación posterior de los topos de Grothendieck son los *topos elementales* de Lawvere (1970), donde las topologías abstractas pueden ser descritas, mediante el lema de Yoneda, gracias a *un solo* endomorfismo del clasificador de subobjetos, que calca las propiedades algebraicas de un operador de clausura). Suerte de *universos paralelos* para el desarrollo de las matemáticas, los topos son nuevos espacios categóricos, lo suficientemente amplios para poder desarrollar toda una tecnología sofisticada de lo relativo. Generalizando la acción de ciertos grupoides sobre las fibras de un haz, Grothendieck *mueve los topos* (ya no solo entornos conjuntistas, sino topológicos, algebraicos, diferenciales, combinatorios, etc.) y estudia en forma genérica las acciones de variados funtores sobre clases muy amplias de topos. Los resultados no se dejan esperar, y *en el ámbito geométrico genérico de los topos es donde ciertas obstrucciones cohomológicas desaparecen*: donde Grothendieck y su escuela pueden desarrollar la cohomología apropiada del sitio “étale” –de “liso”, plano, sin ramificaciones, acercando una vez más la separabilidad de la teoría de Galois y la uniformización de las superficies de Riemann– que le permitirá a Deligne resolver las conjeturas de Weil.

La atención grothendickiana al movimiento de los conceptos y objetos matemáticos va acompañada de una búsqueda oscilante de **arquetipos** para la razón y la imaginación matemática. Entre lo *uno* (la forma) y lo *múltiple* (las estructuras: esquemas, topos, etc.), Grothendieck descubre e inventa –dualidad fundamental de la filosofía matemática, magníficamente explorada en *Cosechas y siembras* [1985-86]– nuevas cohomologías como apropiados invariantes de la forma. Aunque los grupos de homología y cohomología para la topología algebraica tienden a verificar ciertas condiciones de univocidad, al pasar a la geometría algebraica las posibilidades de invarianzas cohomológicas se multiplican (Hodge, de Rham, cristalina, “étale”, *l*-ádica, etc.), y Grothendieck propone entonces sus **motivos** [1965-70] como hondas estructuras genéricas subyacentes a las distintas cohomologías: el tema de los motivos

es como el *corazón* o el alma, la parte más escondida, la que se sustrae más a la mirada, dentro del tema de los esquemas, que se encuentra a su vez en el corazón mismo de mi nueva visión (...) Con el término de *motivo*, entiendo sugerir que se trata del «motivo común» (o de la «razón común») subyacente a esa multitud de invariantes cohomológicos diferentes (...) [que] serían como suertes de desarrollos temáticos diferentes –cada uno en el «tempo», en la «llave» y en el «modo» («mayor» o «menor») que le fuese propio– de un mismo «motivo de base» [1985-86, parte 0, pp. 45-46]

(obsérvense el fondo propio del Romanticismo, la musicalidad omnipresente y el uso consistente de la matemática relativa). Considerada por un tiempo como dudosamente especulativa, la **teoría motivica** de Grothendieck ha adquirido sin embargo una firme base teoremática en las manos de Voevodsky, otro más de los Medallistas Fields descendientes de Grothendieck, quien ha propuesto (1990-2000) nuevas formas de *cirugía en una variedad algebraica*, asociadas a nuevas estructuras topológicas para los objetos algebraicos (topologías finas de Grothendieck sobre sitios de esquemas) [10], y quien se erige en estos momentos como fundamentador alternativo de las matemáticas, con su *teoría homotópica de tipos* (HoTT, 2005-2015), inspirada en gran parte en ideas iniciales de Grothendieck. Debe aquí observarse la espectacular influencia de Grothendieck en la *escuela rusa* (Gelfand, Manin, Drinfeld, Bloch, Kontsevich, Voevodsky, etc.), que –como el Panorama Fields demuestra y a la par de la escuela francesa derivada también en buena medida de Grothendieck– merece considerarse como máxima expresión de la matemática en los últimos cuarenta años.

El Mayo 68 francés revivió en Grothendieck las ansias libertarias de sus padres, pero, curiosamente, la situación se había invertido para entonces, y el enorme matemático, en su reducto del IHES, llegó a ser considerado como un “mandarín” reaccionario por parte de los estudiantes y fue duramente criticado en algunos debates de la época. Los cuestionamientos de la comunidad confluyeron sin duda con los suyos propios, y la sensibilidad de Grothendieck debió alcanzar un límite difícil de manejar. Después de *veinte años ininterrumpidos de trabajo insensato* (dentro de los mitos de la época, se aseguraba que Grothendieck manejaba un ciclo vital de 27 horas sin dormir), Grothendieck tuvo que haber llegado a una saturación física y emocional que le desequilibró. Su renuncia al IHES en 1970 y su disparatada intervención en el Congreso Internacional de Matemáticas de Niza en el mismo año (organizado por un frustrado Dieudonné) le alejaron de la comunidad matemática. El hecho de que el IHES hubiese recibido apoyos económicos por parte del Ministerio de Defensa, comprometiendo la integridad y la libertad de sus profesores, parece haber sido solo la excusa final para la ruptura que el cuerpo y la mente le exigían a Grothendieck (para un análisis extenso de la situación véase [7, pp. 934-936]). La década 1970-1980 constituye entonces un *nuevo renacer*, donde Grothendieck se abre a los movimientos ecologistas (cofundador de *Survivre et vivre*, 1970-1975), a modos de existencia alternativos (vida en una comuna, donde tiene un hijo con su última compañera – en la época del IHES ya había tenido tres hijos con su esposa Mireille Dufour), a la acción humanitaria (viajes a Vietnam), a la filosofía oriental (conversión al Budismo). El mismo Grothendieck llama a estos años su periodo de “madurez”, “un reencuentro con el «estado de infancia»”, “una armonía del «yin» y del «yang» en mi ser” [1985-86, parte 3, p. 466]. Desde entonces, Grothendieck realza la importancia de un profundo vaivén **yin-yang** en el quehacer matemático, donde se combinan, en los momentos de emergencia creativa, una componente femenina *yin* (ligada al descubrimiento y al *corazón* de las cosas), y, en los momentos de construcción arquitectónica, una componente masculina *yang* (más ligada a la invención y a la *razón*) [1985-86, parte 3, pp. 470-471].

Después del “gran giro” de 1970, y después de algunos intentos fracasados por trabajar en el CNRS y en el *Collège de France* (donde se le ofrece una cátedra de matemáticas, que debe sin embargo abandonar al dedicarla a consideraciones ecologistas), Grothendieck regresa a la Universidad de Montpellier y ejerce allí una opaca e inconstante labor de profesor entre 1973 y 1988.

Vendrán cuarenta años de trabajos en reclusión, en pequeños pueblos de los Pirineos, antes de su muerte. Dada la ingente actividad de Grothendieck (que no disminuye en su alejamiento de la comunidad) y dado el enorme lapso de tiempo transcurrido (¡cuarenta años son muchos para cualquiera y son *muchísimos* para Grothendieck!), es de esperarse que las cajas de manuscritos encontradas en su residencia constituyan un *verdadero tesoro* para las generaciones futuras (bajo la coordinación de Leila Schneps, la página www.grothendieckcircle.org sigue atentamente la herencia del matemático). Varios de esos manuscritos alcanzaron a ser circulados y conforman notables aportes tanto a la matemática [1981, 1983a, 1983b], como a la *reflexión* (de y sobre la) matemática [1985-86, 1987]. Entre esos trabajos, *Cosechas y siembras* deberá sin duda ser considerado como una de las más profundas disquisiciones que un matemático de estirpe nos haya jamás regalado sobre la constitución de su obra, en particular, y sobre la constitución de las matemáticas, en general. La **topología moderada** (eliminación de artificiales obstrucciones conjuntistas y suavización de contraejemplos en topología), los **dibujos de niños** (descripciones combinatorias de superficies de Riemann), los ∞ -**campos** y los **derivadores** (formas de una nueva álgebra topológica), el **grupo de Grothendieck-Teichmüller** (descripción combinatoria del grupo de Galois de la clausura algebraica de los racionales), frutos de la inventividad de Grothendieck en los años 80, recelan aún muchos misterios para el siglo XXI.

En la inusual *combinación de lo más abstracto y lo más concreto* radica la excepcionalidad de Grothendieck. Cinco de las fuerzas transversales y pendulares mayores en su obra (*multiplicación, abstracción, naturalización, transición, suavización*) recorren el vasto mundo de los campos matemáticos donde Grothendieck renovó completamente nuestra visión: espacios vectoriales topológicos y espacios de Banach, variable compleja y teoría de Riemann-Roch, teoría de categorías y álgebra homológica, esquemas y geometría algebraica, topos y herramientas finas de cohomología, motivos y operadores derivados, grupos de Galois y superficies de Riemann, formas combinatorias y torres de espacios de funciones meromorfas, etc. La *unidad y la multiplicidad* del pensamiento de Grothendieck han generado, en lo más alto, (1) una verdadera acción dialéctica que recorre toda la amplitud de las matemáticas, y, en lo más concreto, (2) algunas de las invenciones más originales de la segunda mitad del siglo XX. Grothendieck nos acerca así a la creatividad matemática en sus más áureas cimas y renueva una vez más el lema de Jacobi, “en honor del espíritu humano”.

BIBLIOGRAFÍA

Primaria

- [1953a] Alexander Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, American Mathematical Society Memoirs 16, 1955 (Tesis Doctoral, Nancy, 1953).
- [1953b] Alexander Grothendieck, *Topological Vector Spaces*, New York: Gordon and Breach, 1973 (Seminario, Sao Paulo, 1953).
- [1953c] Alexander Grothendieck, “Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques”, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* 8 (1956): 1-79 (escrito en 1953).
- [1957a] Alexander Grothendieck, “Sur quelques points d’algèbre homologique”, *Tohoku Math. Journal* 9 (1957): 119-221 (comenzado a escribir en 1955).
- [1957b] Alexander Grothendieck, “Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch” (escrito en 1957, publicado en [1960-1969, vol. 6, pp. 20-71]).
- [1958a] Armand Borel y Jean-Pierre Serre, “Le théorème de Riemann-Roch (d’après des résultats inédits de A. Grothendieck)”, *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958): 97-136.
- [1958b] Alexander Grothendieck, “The cohomology theory of abstract algebraic varieties”, en: *Proceedings International Congress of Mathematics Edinburgh 1958*, Cambridge: Cambridge University Press, 1960, pp. 103-118.
- [1960] Alexander Grothendieck, “Techniques de construction en géométrie analytique I-X”, *Séminaire Henri Cartan*, tomo 13, París: Secrétariat Mathématique, 1960-61.
- [1960-67] Alexander Grothendieck (con Jean Dieudonné), *Éléments de Géométrie Algébrique*, IV volúmenes (8 partes), París: IHES, 1960-1967.
- [1960-69] Alexander Grothendieck (con diversos autores), *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, VII volúmenes (12 partes), Berlín: Springer, 1970-1973 (fascículos originales multicopiados, 1960-1969).
- [1965-70] Alexander Grothendieck, *Motifs* (“Motivos”), manuscrito, 24 pp.
- [1981] Alexander Grothendieck, *La Longue Marche à travers la Théorie de Galois* (“La larga marcha a través de la Teoría de Galois”), manuscrito, 1600 pp.
- [1983a] Alexander Grothendieck, *Esquisse d’un programme* (“Esbozo de un programa”), manuscrito, 57 pp.

- [1983b] Alexander Grothendieck, *Pursuing stacks* (“Persiguiendo campos”), manuscrito, 629 pp.
- [1985-86] Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles* (“Cosechas y siembras”), manuscrito, 1252 pp.
- [1987] Alexander Grothendieck, *La Clef des Songes* (“La llave de los sueños”), manuscrito, 315 pp.

Secundaria

- [1] Mathieu Bélanger, *Grothendieck et les topos: rupture et continuité dans les modes d'analyse du concept d'espace topologique*, Ph. D. Thesis, Université de Montreal, 2010.
- [2] Pierre Colmez y Jean-Pierre Serre, *Correspondance Grothendieck-Serre*, París: Société Mathématique de France, 2011.
- [3] Pierre Deligne, “Quelques idées maîtresses de l'oeuvre de A. Grothendieck”, en: *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle*, París: Société Mathématique de France, 1998, pp. 11-19.
- [4] Jean Dieudonné, “De l’analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique” (presentación de la Medalla Fields 1966 a Grothendieck), en: P. Cartier et al. *The Grothendieck Festschrift*, Boston: Birkäuser, 1990, vol. 1, pp. 1-14.
- [5] Ralf Krömer, *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory*, Basel: Birkäuser, 2007.
- [6] Winfried Scharlau, *Who is Alexander Grothendieck? A Biography. Part 1: Anarchy*, 2011.
- [7] Winfried Scharlau, “Who is Alexander Grothendieck?”, *Notices AMS* 55 (2008): 930-941.
- [8] Leila Schneps, *Grothendieck: a Biography, Part 2: Mathematics*, 4 capítulos disponibles, www.grothendieckcircle.org.
- [9] René Thom, “L’aporia fondatrice delle matematiche”, *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1982, pp. 1133-1146.
- [10] Fernando Zalamea, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2009.



Cursillos de invitados



GESTIÓN DEL PROFESOR EN PRO DE LA EVOLUCIÓN DE SIGNIFICADOS EN EL AULA DE GEOMETRÍA

Leonor Camargo, Tania Plazas, Carmen Samper y Camilo Sua

Universidad Pedagógica Nacional

lcamargo@pedagogica.edu.co, tplazas@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co,
jcsuaf@pedagogica.edu.co

El cursillo busca sensibilizar a los profesores de matemáticas sobre la atención que se debe prestar a las intervenciones de los estudiantes en una clase que propende por la construcción social del conocimiento. La interpretación que el profesor puede hacer de las intervenciones debe generar acciones para promover la evolución de significados de los estudiantes acerca de los objetos y procesos involucrados en la clase. A través de ejemplos de interacciones en una clase de geometría euclidiana plana, de nivel universitario, ilustramos la gestión del profesor para impulsar la construcción de significado, a partir de lo que comunican los estudiantes.

ASPECTOS CENTRALES DEL MARCO DE REFERENCIA

Las principales ideas que se discutirán con los asistentes al cursillo son las siguientes:

La construcción de significado la entienden diversos autores (Godino y Llinares, 2000; Radford, 2000; Robles, Del Castillo y Font, 2010) como la búsqueda de compatibilidad de las ideas de un individuo acerca de un objeto o proceso matemático con las ideas que tiene la comunidad cultural de referencia. ¿A qué se refiere tal compatibilidad y cómo lograrla?

El proceso de construcción de significado de un objeto puede conceptualizarse como una actividad comunicativa en la que se crean o se usan signos, usando la noción de signo triádico de Charles S. Peirce. En un signo se ponen en relación tres componentes: *objeto*, a lo que se alude en la comunicación; *representación* o *signo vehículo*, con la que se alude al objeto (e. g., palabras, gestos, gráficos, combinación de estos tres elementos, etc.); e *interpretante* (lo que produce el signo vehículo en la mente de quien lo recibe, lo percibe y lo interpreta).

En un intercambio comunicativo en el aula de matemáticas, es posible distinguir tres tipos de objetos coexistentes: el *Objeto Real (OR) matemático* es el objeto aceptado por la comunidad matemática de referencia, hacia el cual debe tender el proceso de construcción de significado; el *objeto inmediato del emisor* es el constituido por el aspecto específico del OR que el emisor interpreta y representa; y el *objeto dinámico del receptor* que se refiere a un aspecto de lo interpretado por aquel a quien se dirige la comunicación, receptor, a partir de la representación. La meta de la enseñanza es lograr la convergencia de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia el OR, vía un acercamiento al objeto inmediato pretendido del profesor.

La interpretación que hagan los estudiantes, la impulsa el profesor con su gestión cuyo propósito es la construcción de significado del objeto de enseñanza. Por ello, en la comunicación en el aula, el profesor atiende a la interpretación del OR desde dos perspectivas: una, la matemática (entendiendo que el objeto matemático del profesor está cerca del objeto que acepta la comunidad del discurso) y otra, la del objeto en construcción, en la cual el foco de mayor interés es la enseñanza y el aprendizaje (perspectiva didáctica del objeto matemático en construcción).

La noción de mediación semiótica del profesor (Salinas, 2010; Mariotti, 2012; Samper, Camargo, Molina y Perry, 2013) es un constructo útil para describir el proceso de gestión comunicativa del aprendizaje por parte del profesor. En ese sentido, conviene considerar la mediación como una gestión, y la semiótica como la actividad en la que se producen e interpretan signos.

Llamamos *mediación semiótica del profesor* a las acciones interpretativas y deliberadas que realiza con el propósito de lograr la evolución en las interpretaciones que hacen los estudiantes. En el intercambio comunicativo, el profesor ajusta sus objetos inmediatos, a aquellos aspectos interpretados por él, cuando actúa como receptor, que considera útiles en la evolución que pretende. Así, se produce la integración, en un objeto dinámico del profesor, de los aspectos más relevantes que considera necesarios en la evolución. Por esta razón, en el aula de clase, la mayoría de los objetos dinámicos del profesor no son objetos dinámicos matemáticos “genuinos”. Los hemos denominado *objetos dinámicos didácticos del profesor* (odd) (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014). El calificativo didáctico alude a que son el resultado de decisiones tomadas para facilitar la evolución de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia el objeto inmediato pretendido.

EJEMPLO DE GESTIÓN EN PRO DE LA EVOLUCIÓN DE SIGNIFICADOS

En el cursillo presentamos ejemplos de la gestión de un profesor alrededor de la evolución del significado del objeto rayo, de la relación bisecar, del Postulado puntos de recta – números reales y del uso del Teorema localización de puntos. Con ellos, esperamos promover una discusión sobre la complejidad inherente a la mediación semiótica del profesor.

Como ilustración de los asuntos que se van a discutir, presentamos a continuación una situación frecuente en nuestros cursos de geometría plana:

Se pide, a los estudiantes, demostrar la existencia del punto medio de un segmento. Para ello, se parte de un segmento AB . El profesor pide a los estudiantes comenzar la demostración. Uno de ellos propone “tomar un punto en medio de A y B ”.

La gestión del profesor busca promover la evolución de significado del punto medio de un segmento (OR), y particularmente, el uso de su definición en la demostración. El objeto inmediato al que alude el estudiante en su intervención es la propiedad “estar en medio de A y B ” ¿Qué puede interpretar el profesor ante esa respuesta? Veamos dos opciones de interpretación:

Opción 1: El profesor interpreta que el estudiante se refiere a escoger el punto en la mitad del segmento AB . En ese caso, probablemente el odd que influirá en su gestión tiene que ver con la intención de apoyar al estudiante para que identifique qué postulado o teorema le sirve para encontrar un punto M tal que $AM = BM$. Una de las acciones que podría emprender es preguntar si el postulado que relaciona puntos de la recta (en este caso del segmento como subconjunto de esta) con números reales es útil, con lo cual los estudiantes podrían reconocer la necesidad de escoger a M como el punto que le corresponde a una coordenada específica.

Opción 2: El profesor interpreta que el estudiante, al expresar “en medio de”, se refiere a escoger un punto cualquiera, M , entre A y B y luego de escogerlo, declarar la equidistancia de M a cada extremo del segmento. En este caso, probablemente el odd que influirá en la gestión del profesor tiene que ver con la intención de evitar que se incurra en el error de suponer que el punto tiene una propiedad que no necesariamente tiene, porque el proceso constructivo no la generó. Por eso, buscaría llamar la atención hacia las propiedades que debería tener el punto M antes de escogerlo. Una de las acciones que podría

llevar a cabo el profesor es interrogar al estudiante con preguntas como: “¿Escoges el punto con una propiedad especial?”. Otra acción, podría consistir en dibujar en el tablero un segmento con extremos A y B . Luego, preguntar “¿Dónde se puede tomar el punto?” “¿Acá?” (señalando un punto cerca a cualquiera de los extremos), “¿O acá?” (señalando un punto perceptiblemente en la mitad del segmento).

REFERENCIAS

- Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*, 12(1), 70-92.
- Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. En T. Y. Tso (Ed.), *Proc. 36rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 25-40). Taipei, Taiwan: PME.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proc. 38th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conf. of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME.
- Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática*, 12(1), 51-69.
- Robles, M. G., Del Castillo, A. G., Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida, España: SEIEM.
- Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida, España: SEIEM.
- Samper, C., Camargo, L., Molina, Ó. y Perry, P. (2013). Instrumented activity and semiotic mediation: Two frames to describe the conjecture construction process as curricular organizer. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.

ENUNCIADO DE UN TEOREMA: ¿ÚNICO COMPONENTE DE SU SIGNIFICADO?

Óscar Molina, Carmen Samper y Patricia Perry

Universidad Pedagógica Nacional

ojmolina@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co, pperry@yahoo.com.mx

La comunidad de educación matemática sugiere que la práctica de demostrar teoremas se favorece si las reglas lógicas y los enunciados de los elementos del sistema teórico (postulados, definiciones y teoremas) tienen significado para los estudiantes, pues así podrán hacerlos operables en la demostración. Pero, ¿qué significa entender un teorema? Se podría pensar que tal expresión se refiere a entender el enunciado y, quizá, también su demostración. Como resultado de nuestra más reciente investigación, tenemos una propuesta que amplía el mencionado significado. En este cursillo pretendemos poner a consideración un significado amplio de la expresión *entender un teorema* e ilustrarlo en relación con un par de teoremas de la geometría euclidiana plana.

ASPECTOS CENTRALES DEL MARCO DE REFERENCIA

Entre 2011 y 2014, el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{A}\cdot\mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) adelantó una investigación en la que analizamos la actividad semiótica que tuvo lugar en un aula universitaria, relativa a la construcción del significado de un teorema específico de la geometría euclidiana plana. Para realizar el análisis, nos fundamentamos en la propuesta de Signo triádico de Charles S. Peirce (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012). Bajo esa perspectiva, se precisó lo que entendemos por construcción de significado. Como resultado del análisis, identificamos los elementos que, desde nuestro punto de vista, integran un significado amplio, que puede considerarse significado de referencia, de la expresión *entender un teorema*. Nuestra propuesta requiere precisar primero qué entendemos aquí por teorema y por construcción de significado.

¿Qué es *teorema*?

Haciendo eco a Mariotti et al. (1997), *teorema* es el sistema ternario conformado por un *enunciado*, la *demostración* de la relación de dependencia formulada en el enunciado, y el *sistema teórico* que la soporta. Nótese cómo

esta definición de teorema va más allá de un enunciado y tiene en cuenta otros dos elementos. Naturalmente, nuestro significado de *entender un teorema* deberá darse en términos de los tres elementos. En el cursillo ilustraremos, por ejemplo, cómo para un teorema particular, el sistema teórico no solo sustenta la respectiva demostración, sino también cómo le da sentido (matemático) al enunciado, específicamente en lo que respecta al antecedente de la proposición condicional a través de la cual se expresa la relación de dependencia que se demuestra. Este es un asunto que rara vez se profundiza en las clases usuales de matemáticas, quizá por razones didácticas, pero cuyo tratamiento es de total pertinencia en un curso formal que aborde la demostración, su aprendizaje y enseñanza.

¿Qué es construir un significado?

En el ámbito educativo, es el proceso mediante el cual se producen y refinan interpretaciones sobre aspectos de un objeto matemático, generadas en la mente del estudiante cuando interpreta un signo vehículo (e. g., gesto, palabra, gráfico, imagen mental) en el que el profesor u otro estudiante pretende comunicar algo sobre el objeto; el propósito del proceso es que las interpretaciones, a mediano o largo plazo, sean consonantes con el significado matemático pretendido (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

¿Qué es entender un teorema?

Los aspectos que, según nuestra propuesta, determinan a qué nos referimos con la expresión *entender un teorema* son los siguientes:

1. Identificar la estructura del enunciado, estructura desde el punto de vista de la lógica matemática.
2. Determinar el contenido geométrico del enunciado: identificar objetos y relaciones involucrados y atribuirles significado cercano al de referencia y útil en la interpretación del enunciado. Este aspecto permite establecer los contextos en los cuales es pertinente usar el teorema.
3. Realizar y/o entender la demostración de la relación de dependencia expresada en el enunciado. En este aspecto, se incluyen tres ítemes:

- a) Método de la demostración: determinar si es directa, indirecta haciendo uso del principio de reducción ya sea negando la tesis del enunciado o descartando posibles casos, por inducción, etc.
 - b) Estructura de la demostración: determinar los pilares de la demostración. Estos son: i) los elementos teóricos centrales que la soportan (definiciones, postulados y teoremas), ii) el propósito de usarlos en su desarrollo, y iii) la manera en que están involucrados en la demostración (e. g., por medio de una construcción auxiliar).
 - c) Prospectiva de la demostración: hacer un análisis con el fin de explorar o de predecir el comportamiento de un paso hipotético en la demostración, y tomar decisiones con base en el análisis realizado, i. e., decidir si dicho paso finalmente hace parte o no de la demostración.
4. Comparar con otros teoremas: la comparación se hace entre enunciados y entre demostraciones. La primera, consiste en determinar si los enunciados se refieren a asuntos semejantes (e. g., existencia de objetos, comportamiento similar de los objetos involucrados como en el caso del punto medio y la bisectriz de un ángulo). La segunda, que puede darse entre demostraciones de una misma relación de dependencia o de dos distintas, consiste en determinar si las demostraciones tienen una misma estructura o no. Específicamente, se trata de determinar si las demostraciones emplean elementos homólogos y, en caso de que así sea, si el propósito de hacerlo es análogo.
 5. Usar de manera experta el teorema en diversos contextos: uno de los propósitos de determinar el contenido geométrico del enunciado de un teorema es develar y caracterizar las situaciones o contextos donde se puede utilizar. Reconocemos dos contextos en los que se puede usar un teorema: i) en la justificación teórica de un procedimiento de construcción de un objeto geométrico con alguna propiedad especial, cuando se emplea como garantía de un paso en tal procedimiento; ii) en la demostración de otro teorema, cuando se usa como garantía de una afirmación en un paso de la demostración. Ahora bien, develar y caracterizar los contextos donde es pertinente usar un teorema no es

suficiente; también hay que saber usarlo. Pero...

¿Qué significa saber usar un teorema?

Durante el cursillo, pretendemos ilustrar esto con dos ejemplos concretos y, con ello, describir lo que Selden (2012) denomina uso operable del teorema. Los teoremas que se estudiarán en el cursillo y sobre los cuales se ilustrarán cada uno de los elementos antes descritos son los siguientes:

El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un segmento del mismo plano es la recta mediatriz del segmento en dicho plano.

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo dado y que pertenecen a su interior es el rayo bisector del ángulo.

REFERENCIAS

- Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semi-otic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. IV, pp. 409-416). Vancouver, Canadá: PME.
- Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En Pre-proceedings of the 12th ICME. Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.

RETROACCIONES DIDÁCTICAS CON CABRI LM COMO MEDIO

Luis Pérez*, Jorge Fiallo* y Martín Acosta**

**Universidad Industrial de Santander, **Universidad Francisco José de Caldas*

luchoangel07@hotmail.com, jfiallo@uis.edu.co, maedu@hotmail.com

Se exponen situaciones adidácticas que aprovechan las posibilidades de programar retroacciones didácticas ofrecidas por Cabri LM, cuya intención es producir aprendizaje, por adaptación, del concepto de homotecia. El funcionamiento geométrico de los objetos de Cabri LM garantiza que los fenómenos visuales corresponden a propiedades teóricas, y las posibilidades que ofrece el programa para controlar las interacciones permiten introducir restricciones para bloquear estrategias no matemáticas de resolución de los problemas, a las que llamamos retroacciones didácticas.

PRESENTACIÓN

Con el cursillo pretendemos aportar ideas a dos cuestiones generales: por un lado, la influencia de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Cornu y Ralston, 1992; Hoyles, 2009), y, por otro, la enseñanza de la homotecia en la educación media (Lemonidis, 1990, 1991; Bautista y Peralta, 2011). La homotecia es un concepto complejo, que ha recibido poca atención en los libros de texto, y que tiende a desaparecer del currículo de geometría. Sin embargo, es una herramienta importante para la solución de problemas, y condensa las propiedades de semejanza y proporcionalidad. Es una transformación no isométrica, la única que, supuestamente, se enseña en el nivel de secundaria. Por eso, consideramos importante desarrollar situaciones adidácticas que contribuyan al aprendizaje de este importante concepto geométrico.

TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD)

Una de las preocupaciones fundamentales de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) es la construcción del sentido del saber matemático. Según esta teoría, el intento de transmitir de manera directa el saber produce su pérdida de sentido para los alumnos; así, aprenderán un discurso, o unos gestos que intentan imitar, pero sobre los cuales no tienen ningún control (Margolinas, 2008). Para construir el sentido del saber

matemático, según la TSD, es necesario anclarlo en las experiencias personales de los alumnos, es decir en su “conocimiento”. Para la TSD, conocimiento y saber no son dos términos equivalentes: el conocimiento es personal y contextualizado (fruto de una experiencia), mientras que el saber es impersonal y descontextualizado. Las situaciones adidácticas buscan propiciar una experiencia en los alumnos, por medio de la interacción con un medio didáctico para resolver un problema, con el fin de que los alumnos construyan conocimientos (personales y contextualizados) que puedan ser utilizados como claves de interpretación del saber (impersonal y descontextualizado). El profesor, entonces, no intenta transmitir de manera directa el saber (problema de comunicación de un mensaje), sino de manera indirecta, propiciando primero la construcción de conocimientos en los alumnos, para después, durante el llamado proceso de institucionalización, explicitar las relaciones entre el saber institucional y los conocimientos construidos en el contexto de la situación adidáctica.

CABRI LM COMO MEDIO ADIDÁCTICO

Usaremos Cabri LM como un medio material con el cual interactúen los asistentes, con el fin de lograr aprendizaje por adaptación. Cabri LM es un software nuevo, que además de las características de geometría dinámica, incluye herramientas didácticas que permiten enriquecer y diversificar la interacción entre el alumno y el software.

En Cabri LM definimos dos tipos de retroacciones, producto de la interacción adidáctica del alumno con el software: las retroacciones matemáticas y las retroacciones didácticas. Las primeras corresponden a respuestas naturales del software que obedecen a la teoría matemática, pero sin ningún tipo de intención didáctica, asociadas principalmente al proceso de validación (Margolinas, 2008), mientras que las retroacciones didácticas son aquellas que permite programar el software, para favorecer el proceso de devolución sin que haya contradicción alguna con la teoría matemática. Las retroacciones matemáticas se manifiestan en la pantalla como fenómenos visuales; por ejemplo, al arrastrar un triángulo, otro se mueve de manera que conserva la relación de homotecia con el anterior y, por tanto, se mantienen también las propiedades que esta relación implica (característica principal de la geometría dinámica). Por su parte, las retroacciones didácticas pueden manifestarse por la imposibilidad o restricción de acciones, también por una respuesta programada en función de las acciones del alumno; por ejemplo, mostrar un

texto; resaltar, mostrar, ocultar o impedir el arrastre de uno o más objetos; enviar a otra tarea; controlar las herramientas de las que dispone el alumno durante el desarrollo de una tarea.

METODOLOGÍA DEL CURSILLO

En el cursillo se propondrán situaciones adidácticas que incorporan retroacciones didácticas, cuyo propósito es que los alumnos identifiquen y utilicen propiedades de la homotecia para la resolución de problemas. Todas las actividades están diseñadas con la versión Cabri LM. Se realizarán las actividades con los participantes, en una sala de computadores, y luego se analizarán utilizando la Teoría de las Situaciones Didácticas.

CONCLUSIONES

Al finalizar el cursillo se espera que los asistentes queden con argumentos teóricos de cómo la tecnología puede influir de manera positiva en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sin pretender argumentar que el desarrollo de las actividades diseñadas garantiza el aprendizaje del concepto de homotecia. También pretendemos mostrar una posible forma de lograr la conceptualización de la homotecia, a partir del reconocimiento de fenómenos visuales asociados al concepto, sin que *a priori* se conozcan sus propiedades.

REFERENCIAS

- Bautista, L y Peralta, M. (2011). *Conceptualización de la homotecia en estudiantes de sexto grado* (trabajo de grado de especialización). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Cornu, B. y Ralston, A. (Eds.) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching* (ED-92/WS/17). París, Francia: Unesco.
- Hoyle, C. (Ed.) (2009). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Nueva York, EUA: Springer.
- Lemonidis, C. (1990). Une analyse de la complexité cognitive de la notion d'homothétie. *Pedagogies. Cahiers du Laboratoire de Pédagogie Expérimentale de l'Université de Louvain*, 1, 71-79.
- Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 11(23), 295-324.

Margolinas, C. (2008). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas* (M. Acosta y J. Fiallo, Trs.). Bucaramanga, Colombia: Publicaciones de la Universidad Industrial de Santander.



Conferencias



EL PRODUCTO VECTORIAL: ESBOZO HISTÓRICO Y APLICACIONES

Yolima Álvarez y Asdrúbal Moreno

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

yalvarezp@udistrital.edu.co, asmorenomosquera@gmail.com

En este artículo se presenta un esbozo histórico de la operación producto vectorial, estudiando en particular su relación con los cuaternios de Hamilton. En este marco se comentan algunas de sus generalizaciones, en particular la evolución hacia su desarrollo en dimensiones superiores, propuesto por Grassmann y Clifford. Además, se pone en contexto la pugna entre las corrientes cuaternionista y vectorialista, y la resolución de la misma en favor de los vectores (cuaternios imaginarios). Por otro lado, se plantea la conveniencia de estudiar el producto vectorial con un enfoque algebraico dado el hecho de que este producto es un derivado algebraico de los cuaternios. Finalmente, se presentan algunas aplicaciones del producto vectorial en matemáticas y física.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos de la matemática ha sido expresar las relaciones geométricas mediante ecuaciones algebraicas. Así, los griegos en la antigüedad pudieron construir leyes geométricas para describir las relaciones métricas del espacio tal cual sus sentidos las percibían. El descubrimiento de geometrías con propiedades algebraicas que diferían de las propiedades algebraicas de la geometría euclídea dio lugar a que los matemáticos del siglo XIX concentraran su atención en expresar estas nuevas geometrías en términos de una estructura algebraica unificada. Es bien sabido que el álgebra lineal se ha convertido en piedra angular para la realización de este programa, ya que ha permitido expresar de forma simple y elegante la estructura del espacio euclídeo tridimensional y del espacio-tiempo de Minkowski, entre otros. Una parte significativamente importante de este programa está relacionada con la invención, en 1843, de los números cuaternios, por parte de William Rowan Hamilton (1805-1865). Podemos decir que la evolución misma de la teoría de números está íntimamente ligada con la aparición del álgebra; como veremos más adelante, un caso paradigmático lo constituye justamente el producto vectorial.

ESBOZO HISTÓRICO

La aparición de los sistemas hipercomplejos está inspirada, como su nombre lo indica, en la búsqueda de la ampliación del campo de los números complejos. En este proceso, Hamilton optó por varias alternativas, una de ellas, quizá la más natural, fue considerar el caso tridimensional y tratar de construir una multiplicación de triplas de números reales que sirviera también en la representación aritmética de los puntos del espacio.

En la segunda parte del trabajo de Hamilton, titulado *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time* (1837), se describen los puntos del plano aritméticamente y de forma rigurosa.

Años más tarde, el estudio del caso $n = 3$ lo condujo a formular un producto de cuádruplas, cuya multiplicación goza de las propiedades aritméticas de los números reales exceptuando la conmutatividad. Surge, así, el sistema de los números cuaternios, que es una extensión de los números complejos. Este avance da lugar a un gran número de publicaciones¹ de Hamilton entre 1844 y 1850, bajo el título *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra*.

Hamilton (1843, noviembre) escribe un cuaternio q , como la suma de una parte escalar $s(q)$ y una parte imaginaria o vectorial $v(q)$, en la forma:

$$q = s(q) + v(q) = w + xi + yj + zk \text{ donde } w, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Así pues el sistema de los números cuaternios Q está dado por:

$$Q = \{q | q = w + xi + yj + zk; w, x, y, z \in \mathbb{R}; i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

Ahora bien, dados $q_1 = w_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ y $q_2 = w_2 + x_2i + y_2j + z_2k$ se define la suma y el producto como sigue:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (w_1 + w_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k, \\ q_1 q_2 &= q_3 = w_3 + x_3i + y_3j + z_3k, \end{aligned}$$

donde

¹ 18 entregas en los volúmenes XXV-XXXVI de *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine*.

$$\begin{aligned}
w_3 &= w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2, & x_3 &= w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2, \\
y_3 &= w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2, & z_3 &= w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2.
\end{aligned}$$

Para el caso de los números cuaternios imaginarios o “vectores” dados por $q_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ y $q_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, con parte real nula, se tiene que:

$$q_1 q_2 = (-x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (y_1 z_2 - z_1 y_2)i + (z_1 x_2 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)k.$$

Conviene resaltar que la parte imaginaria de los cuaternios se adapta perfectamente a la descripción matemática de las coordenadas de un punto en el espacio euclídeo de tres dimensiones. La última igualdad se escribe en notación moderna según la forma:

$$q_1 q_2 = -x \cdot y + x \times y.$$

El primer término corresponde al producto escalar mientras que el segundo término corresponde al producto vectorial. Es pues importante enfatizar en que el producto vectorial o producto cruz aparece como un derivado de los cuaternios y toma identidad propia solo hasta cuando O. Heaviside (1850-1925) y J. W. Gibbs (1839-1903) desarrollan el cálculo vectorial a finales del siglo XIX.

Paralelo al trabajo de Hamilton, pero sin la misma acogida, H. G. Grassmann (1809-1877) desarrolla su obra y, en 1844, se publica su libro *Die lineale Ausdehnungslehre; ein neuer Zweig der Mathematik* (Teoría de la extensión lineal, una nueva rama de la matemática) en el que presenta un sistema de números complejos con varias unidades, denominados cantidades extensivas. El libro consta de dos secciones, precedidas de una introducción. La primera sección comprende cinco capítulos dedicados a la cantidad extensiva y la segunda consta de cuatro capítulos en los que trata la cantidad elemental. Cada capítulo está dividido en dos partes, la primera dedicada al desarrollo teórico y la segunda a las aplicaciones, esto es, la geometría, la estática, la mecánica, el magnetismo y la cristalografía, tal como lo anuncia en la contraportada del libro.

W. K. Clifford (1845-1879) en su artículo *Applications of Grassmann's extensive algebra* (1878) reconoce que él ha conocido del tema por los trabajos de Grassmann publicados en el *Journal de Crelle* y por el documento *Theorie der complexen Zahlensysteme* (Lecciones sobre números complejos) de H. Hankel, publicado en 1867. Su trabajo consiste en generalizar los

sistemas de cuaternios y bicuaternios a cualquier número de dimensiones. Clifford realiza la conexión entre los trabajos de Hamilton y Grassmann, publicados ambos en 1844, y logra además describir las propiedades geométricas de vectores, planos y en general objetos en dimensiones superiores.

La teoría de los cuaternios tuvo gran difusión inicialmente debido al esfuerzo del físico y matemático inglés P. G. Tait (1831-1901), quien impulsó vigorosamente a los físicos de la época a escribir sus trabajos en términos de cuaternios. A pesar de los decididos esfuerzos de Tait, la comunidad científica se inclinó finalmente hacia la corriente vectorialista, materializada en los trabajos de Heaviside y Gibbs quienes tuvieron éxito al conseguir incorporar en la física y la ingeniería una pequeña parte de las ideas de Hamilton, Grassmann y Clifford bajo el nombre de cálculo vectorial.

Una posible explicación de este hecho se sugiere en el debate acerca de la interpretación geométrica de los cuaternios, ya que permitirían sumar puntos y triplas, algo que pareció en aquella época como estrambótico. Fueron los trabajos de Clifford, los que permitieron establecer la profunda estructura lógica que implica la interpretación de los cuaternios. Lastimosamente la temprana muerte de Clifford condujo al anonimato de tal comprensión.

En relación a la maquinaria matemática del cálculo vectorial es importante anotar que históricamente el primero en utilizar el operador nabla fue Hamilton, quien al aplicarlo a una función vectorial F obtuvo el cuaternio:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) k$$

Posteriormente, J. C. Maxwell en su célebre obra *A treatise on electricity and magnetism*, publicada en 1873, llama convergencia a la parte escalar y rotación o rotacional a la parte vectorial de este cuaternio.

Es precisamente en el trabajo de Maxwell donde se puede rastrear el germen de las ideas de Heaviside en relación con el análisis vectorial. Dada la sofisticación del aparato matemático utilizado por Maxwell en términos de cuaternios, Heaviside se propuso presentar la teoría en un lenguaje matemático más asequible a los ingenieros y físicos de la época. Para ello aisló las partes escalar e imaginaria de los cuaternios, presentándolas en forma independiente e incluyó las operaciones producto escalar y producto vectorial. Contribuyó al análisis realizando un estudio exhaustivo del gradiente, la

divergencia, el rotacional y el laplaciano. Desde un punto de vista más teórico y riguroso Gibbs entre 1881 y 1884 hizo un trabajo paralelo, constituyéndose así el cuerpo de doctrina que hoy llamamos Análisis Vectorial.

APLICACIONES

Tanto en las matemáticas como fuera de ellas encontramos gran cantidad de aplicaciones del producto vectorial. En esta sección destacamos, en particular, la ventaja de su uso en la escritura de algunas expresiones en la matemática misma y en la física.

En las matemáticas, una de las aplicaciones más conocidas es el cálculo del área de un paralelogramo generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Esta área suele calcularse mediante $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$, donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Es fácil mostrar que $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

El rotacional de un campo vectorial también puede expresarse en términos de un producto vectorial:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}, \text{ donde } \vec{F} \text{ es una función vectorial y } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}.$$

En consecuencia, aparece en la formulación del teorema de Stokes:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde S es una superficie orientada suave a trozos y C es una curva simple cerrada que limita a S .

El producto vectorial tiene gran variedad de aplicaciones en mecánica clásica, electrodinámica clásica, mecánica cuántica, etc. En el marco de la electrodinámica clásica podemos citar la ley de Biot-Savart, las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz para dar algunos ejemplos.

La ley de Biot-Savart se emplea cuando se desea conocer el campo magnético $d\vec{B}$ en un punto P debido a un elemento de corriente $I d\vec{l}$ que conduce una intensidad de corriente I .

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

donde r denota la distancia entre el punto y el elemento de corriente, y μ es la permeabilidad magnética del vacío.

En medios no dispersivos e isótropos las ecuaciones de Maxwell están dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

donde el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ y la intensidad magnética $\vec{H}$ están relacionadas con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ mediante las ecuaciones $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Estas ecuaciones contienen en su totalidad toda la física del campo electromagnético clásico y predicen la existencia de ondas electromagnéticas cuya velocidad de propagación corresponde a la velocidad de la luz. Inicialmente fueron escritas por J. C. Maxwell en términos de cuaternios, y reescritas por O. Heaviside mediante el uso del análisis vectorial.

En el marco de la electrodinámica de Maxwell-Lorentz la fuerza que actúa sobre una partícula con carga eléctrica q moviéndose con velocidad $\vec{v}$ bajo la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$ y una inducción magnética $\vec{B}$ se puede escribir en la forma:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

donde el primer término corresponde a la fuerza eléctrica y el segundo a la fuerza magnética. Es claro que la fuerza magnética solo actúa sobre una partícula con una velocidad no nula, y su línea de acción es perpendicular al plano formado por el vector de velocidad y el vector de inducción magnética.

REFERENCIAS

Clifford, W. K. (1878). Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, 1(4), 350-358.

Hamilton, W. R (1837). Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. En *The Transactions of the Royal Irish Academy* (vol. XVII, pp. 293-422). Dublín, Irlanda: P. Dixon Hardy. Disponible en:

<http://www.biodiversitylibrary.org/item/47866#page/472/mode/1up>;
<http://www.emis.de/elibm/classics/index.html>

Hamilton, W. R. (1843, noviembre). On a new species of imaginary quantities, connected with a theory of quaternions. En *Proceedings of the Royal Irish Academy, for the year 1841-2* (vol. 2, parte VI, pp. 424-434). Dublín, Irlanda: M. H. Gill. Disponible en: <http://www.biodiversitylibrary.org/item/108469#page/1/mode/1up>; <http://www.emis.de/elibm/classics/index.html>

GEOMETRÍA, COMPAÑERA DE GRANDES MATEMÁTICOS

Óscar Gómez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

ogrojas@yahoo.com

Debido a un error de interpretación, una frase de Dieudonné ocasionó que se estigmatizara la enseñanza de la geometría en el nivel preuniversitario. La frase daba a entender que no valía la pena el estudio de la geometría euclidiana y, en consecuencia, el contenido de esta materia fue desapareciendo de los planes de estudio. Sin embargo, la historia de las matemáticas nos muestra que grandes matemáticos han dado su aprobación a la geometría de manera tácita e incuestionable: dedicándose ellos mismos a su estudio y haciendo valiosos aportes.

INTRODUCCIÓN

Entre los numerosos encuentros organizados alrededor de los años 1960 para planificar la reforma de la enseñanza de las matemáticas se cuenta el famoso seminario de Royaumont; este se llevó a cabo en noviembre de 1959, organizado por la Organización de Cooperación Económica Europea, y su consecuencia fue la introducción, en la enseñanza preuniversitaria, de lo que se dio en llamar *matemáticas modernas*. En este evento el famoso matemático francés, miembro del grupo Bourbaki, Jean Dieudonné profirió su lapidaria sentencia: “¡Abajo Euclides, basta de triángulos!”, la cual, sacada de contexto y asumida como dogma, hizo que se fortaleciera una de las reformas adoptadas por el movimiento renovador: la erradicación de la geometría euclidiana de los planes de estudio. Esta reforma también contemplaba la introducción de la teoría de conjuntos y de estructuras algebraicas, entre otros.

La confusión surge de mezclar de forma inconsciente dos niveles de la matemática: el nivel de la enseñanza y el de la investigación profesional. La frase de Dieudonné se circunscribe a este último. En efecto, la geometría euclidiana no es moderna, no está en la dirección a la que apunta la investigación actual. Pero juega un papel capital a la hora de construir los hábitos mentales que necesita poseer cualquier matemático. Como son, por ejemplo, entender el concepto de demostración como un mecanismo de validación de resultados, sean estos evidentes a la intuición o totalmente contrarios a ella, como es el caso del Teorema de Pitágoras. Aprender,

además, los diferentes tipos de demostración y ver, a la vez, que generalmente es necesaria una buena dosis de ingenio para alcanzar el éxito.

En la misma línea aparece otra característica de la geometría euclidiana: sirve como ejercicio mental de apoyo a la actividad principal del científico. En este documento se exponen algunos resultados de la geometría debidos a grandes matemáticos o científicos reconocidos en otras áreas.

ARQUÍMEDES

Considero muy apropiado recordar a este gran físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático griego con una cita de Eric Temple Bell (1937, cap. 2):

Arquímedes, la inteligencia más grande de la antigüedad, es moderno hasta el tuétano. Él y Newton podían haberse comprendido perfectamente, y es muy posible que Arquímedes, si hubiera podido vivir hasta seguir un curso de posgrado en Matemática y Física, hubiera comprendido a Einstein, Bohr, Heisenberg y Dirac mejor de lo que estos se han comprendido entre sí. De todos los antiguos, Arquímedes es el único cuyo pensamiento gozó de la libertad que los matemáticos más grandes se permiten actualmente después de que 25 siglos han alisado su camino. Arquímedes es el único entre los griegos que tuvo suficiente altura y vigor para ver claro a través de los obstáculos colocados en la senda del progreso matemático por los aterrorizados geómetras que habían escuchado a los filósofos.

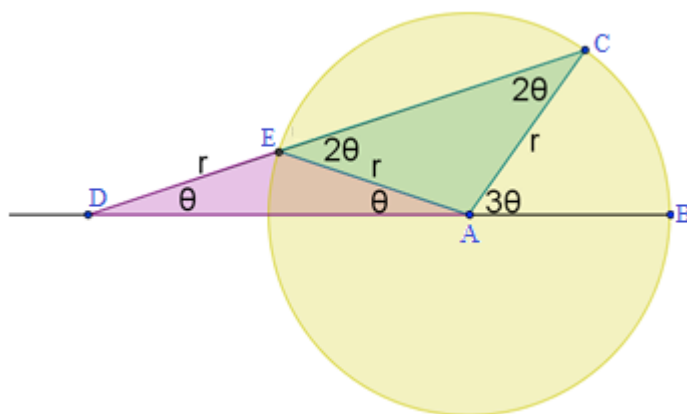


Figura 1. Solución de Arquímedes al problema de la trisección del ángulo

La última afirmación de la cita, sin duda, se refiere al hecho de que Arquímedes resolvió el famoso problema de la trisección del ángulo (Figura

1) empleando una regla a la cual se le podían hacer marcas, contraviniendo con ello la restricción impuesta por Platón de que la regla podía usarse exclusivamente para trazar el segmento entre dos puntos o para prolongar un segmento dado.

PIERRE DE FERMAT

Matemático aficionado, creó, junto con Descartes, la geometría analítica; con Pascal fue de los primeros en trabajar en el cálculo de probabilidades. Enunció su famoso “último teorema de Fermat” que ocupó a los matemáticos durante 300 años. Propuso el siguiente problema: dado un triángulo arbitrario, encontrar en él un punto tal que la suma de las distancias de este punto a los tres vértices sea mínima.

Cuando sobre los lados de un triángulo se dibujan triángulos equiláteros externos y se dibuja el circuncírculo de cada uno de ellos, el punto de intersección de los tres círculos es la solución del problema (Figura 2). Este se llama primer punto de Fermat.

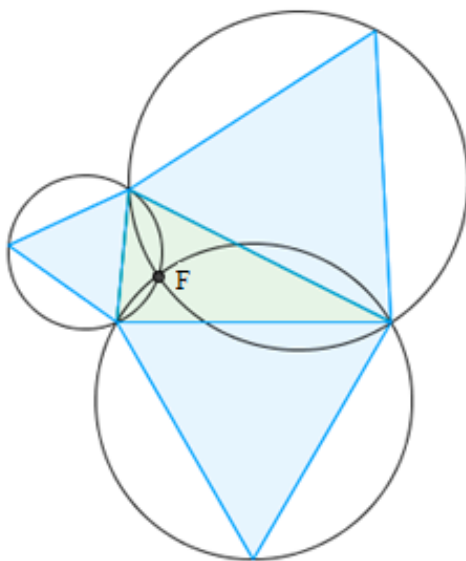


Figura 2. Punto de Fermat obtenido como la intersección de los circuncírculos de los triángulos equiláteros exteriores

EVANGELISTA TORRICELLI

Famoso físico italiano. Estudió el fenómeno de la presión atmosférica. Resolvió el problema propuesto por Fermat (Figura 3). Su solución es particularmente elegante.

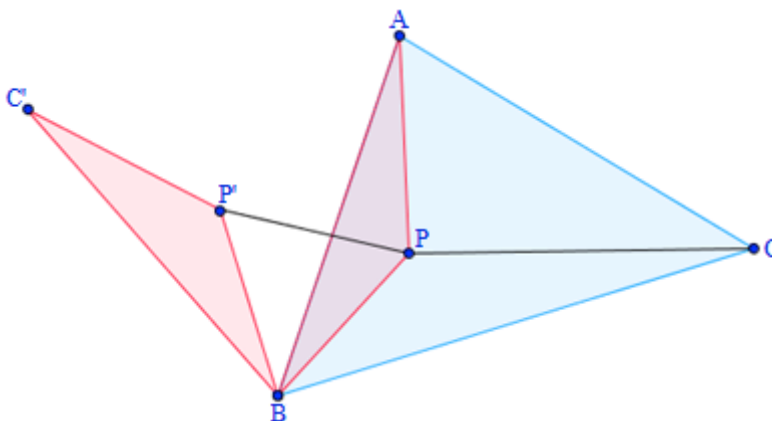


Figura 3. Solución de Torricelli al problema de Fermat

ISAAC NEWTON

Carl Sagan (1994/1982), en su libro *Cosmos* cuenta la siguiente anécdota:

Al igual que Kepler [Newton], no fue inmune a las supersticiones de su época y tuvo muchos contactos con el misticismo. De hecho, gran parte del desarrollo intelectual de Newton se puede atribuir a esta tensión entre racionalismo y misticismo. En la feria de Stourbridge, en 1663, a los veinte años, adquirió un libro de astrología, sólo por la curiosidad de ver qué contenía. Lo leyó hasta llegar a una ilustración que no pudo entender, porque desconocía la trigonometría. Compró entonces un libro de trigonometría pero pronto vio que no podía seguir los argumentos geométricos. Encontró pues un ejemplar de los *Elementos de Geometría* de Euclides y empezó a leerlo. Dos años después inventaba el cálculo diferencial. (p. 68)

A pesar de haber obtenido sus resultados empleando el cálculo, creación suya, Newton los presentó en los *Principia* a la manera de Euclides.

LEONHARD EULER

Euler es el más prolífico matemático de todos los tiempos, su obra equivale a unos 75 libros de texto. Introdujo el número e como base de los logaritmos naturales, demostró la irracionalidad de e y de e^2 . Descubrió la igualdad

$e^{i\pi} - 1 = 0$, que relaciona las cinco constantes más importantes de la matemática. Su memoria formidable le permitió continuar trabajando durante los últimos 17 años de su vida en los que quedó ciego. Sabía de memoria las fórmulas de la trigonometría y el análisis así como *La Eneida* de Virgilio, de la cual además podía decir cuál era la primera y la última línea de cada página del ejemplar que poseía. Hacía cálculos mentales con números de hasta 50 cifras decimales. En geometría es muy famoso su descubrimiento de la recta que lleva su nombre: en cualquier triángulo, no equilátero, esta recta contiene el ortocentro, el circuncentro, el baricentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos (Figura 4).

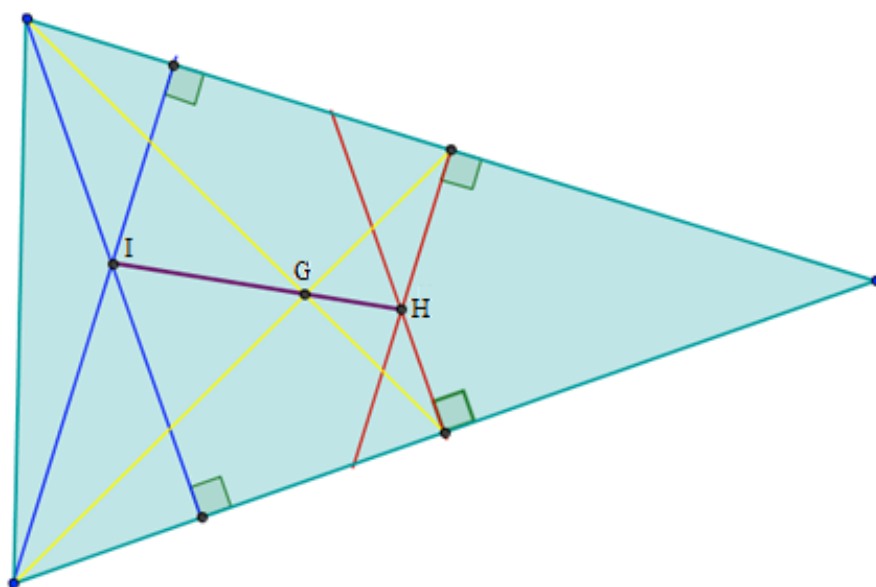


Figura 4. Recta de Euler (IGH)

KARL FRIEDRICH GAUSS

Junto con Arquímedes y Newton, Gauss es considerado uno de los tres grandes matemáticos de la historia, anteriores al siglo XX. De él dice Bell (1937, cap. 14):

La verdadera esencia del Análisis es el uso correcto de los procesos infinitos. ... Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, todos los grandes analistas de su tiempo, no tenían prácticamente un concepto claro de lo que se acepta ahora como una prueba que abarca los procesos infinitos. Fue Gauss el primero en ver claramente que una “demostración” que puede llevar a absurdos como el de que $-1 = \infty$ no prueba nada. Aún en algunos casos en que una fórmula da resultados

consecuentes, no debe ocupar un lugar en la Matemática hasta que se determinan las condiciones precisas en que continúa siendo coherente.

El rigor que Gauss impuso al análisis se proyectó sobre toda la Matemática, tanto en sus propias costumbres como en las de sus contemporáneos, Abel, Cauchy y sus sucesores, Weierstrass, Dedekind. La Matemática después de Gauss fue algo diferente de lo que había sido la de Newton, Euler y Lagrange.

En el sentido constructivo, Gauss fue un revolucionario. Antes de que terminara su enseñanza secundaria, el mismo espíritu crítico que le impidió quedar satisfecho con el teorema del binomio le llevó a discutir las demostraciones de la Geometría elemental. A la edad de 12 años ya miraba con recelo los fundamentos de la Geometría euclidiana, y teniendo dieciséis, ya tuvo la primera intuición de una geometría diferente de la de Euclides.

Como sabemos, esta intuición lo llevó a ser uno de los fundadores de las geometrías no euclidianas.

JUNE LESTER

Matemática con un doctorado en el área de enseñanza de las matemáticas. Su área de estudio es el impacto de las nuevas tecnologías en la enseñanza. Descubrió uno de los últimos teoremas de la geometría euclidiana en 1996. Se conoce como Teorema de Lester. Afirma que, dado cualquier triángulo, los dos puntos de Fermat (el segundo punto de Fermat se encuentra considerando los triángulos equiláteros interiores), el centro del círculo de los nueve puntos y el circuncentro están todos sobre la misma circunferencia.

JOHN CONWAY

Matemático británico. Trabaja en las áreas de teoría de conjuntos, teoría de nudos, teoría de números, teoría de juegos y teoría de códigos. En 1970 creó el autómatas celular conocido como *juego de la vida* (Figura 5). Teóricamente es interesante, ya que equivale a una máquina universal de Turing. Esto es, todo lo que es algorítmicamente computable también lo es mediante el juego de la vida. Su interés también reside en que ilustra cómo la aparición de patrones complejos pueden surgir a partir de reglas muy sencillas.

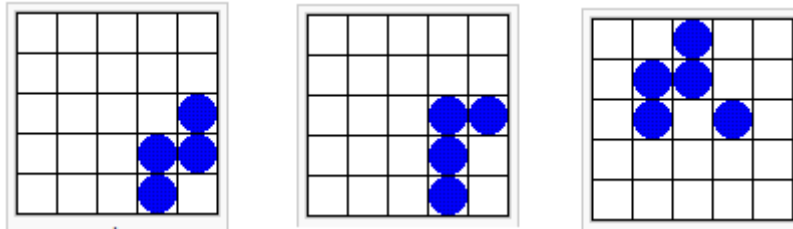


Figura 5. Animación del juego de la vida

Conway aportó a la geometría la que es considerada la más corta prueba del Teorema de Morley. Este teorema, también reciente, es exactamente 100 años más viejo que el de Lester. Afirma que dado cualquier triángulo, si se trazan las trisectrices de sus ángulos, los puntos de intersección de los pares de trisectrices más cercanos a cada uno de los lados determinan siempre un triángulo equilátero (Figura 6).

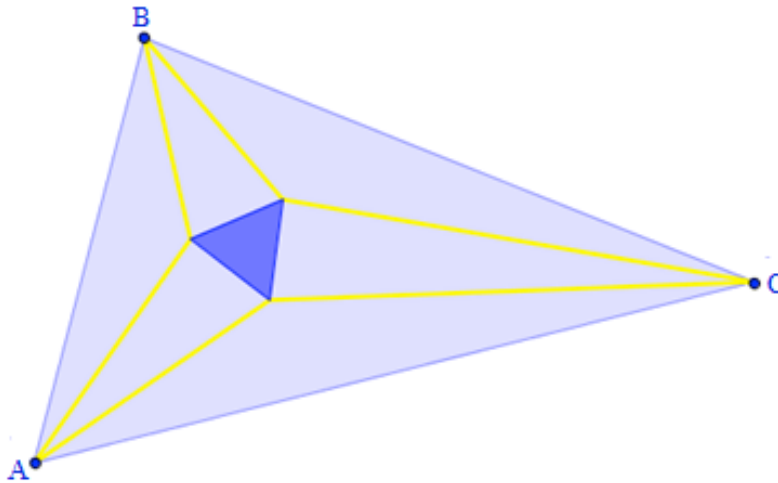


Figura 6. Ilustración del Teorema de Morley

REFERENCIAS

- Bell, E. T. (1937). Los grandes matemáticos. Disponible en:
<http://www.librosmaravillosos.com/grandesmaticos/>
- Sagan, C. (1994/1982). *Cosmos* (M. Muntaner Pascual y M. Moya Tasis, Trads.; 1ª reimpresión). Barcelona, España: Editorial Planeta. [Edición original, 1980].

EL CLUB DE MATEMÁTICAS UPN – IPN: UN ESPACIO PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS DE LA NIÑEZ

Isaac Lima y Tatiana Rodríguez

Instituto Pedagógico Nacional

ilimad@pedagogica.edu.co

Se presenta una reseña histórica del Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia): las temáticas que se abordaron y la manera como, en su momento de auge, se convirtió en un espacio para el desarrollo del pensamiento matemático de niños y niñas de todas las edades escolares provenientes de escuelas y colegios de la ciudad de Bogotá y sus alrededores. También, se muestra cómo ahora, desplazado al Instituto Pedagógico Nacional y relegado a su mínima expresión, sigue siendo un espacio para el fomento del estudio de las matemáticas desde una perspectiva no necesariamente escolar.

EL CLUB DE MATEMÁTICAS EN LA UPN

El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) fue un espacio para apoyar el interés por el estudio de las matemáticas, que demuestran algunos(as) niños y niñas¹ de colegios distritales. Funcionó entre el segundo semestre de 2005 y el primer semestre de 2010 en las instalaciones de la UPN, con el apoyo de por lo menos un profesor del Departamento de Matemáticas (DMA) y la puesta en marcha de proyectos elaborados por profesores en formación inicial.

Liderados por la profesora Claudia Salazar, tres estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del DMA dieron origen al Club de Matemáticas, de manera voluntaria, y lograron que, durante la segunda mitad de 2005, algunos niños de colegios distritales tuvieran un espacio distinto al de las clases oficiales para aprender matemáticas diferentes a las establecidas en los currículos de sus instituciones, haciendo del Club un espacio constituido y reconocido por la comunidad académica de la Universidad (Ángel y Mora, 2006). En esa oportunidad, el trabajo se fundamentó en el reconocimiento de los procesos matemáticos generales de contar y localizar, a partir de algunas nociones

¹ En adelante, se usará la expresión “niños” en el sentido genérico que ese sustantivo tiene en castellano, con el fin de no hacer pesada la lectura del texto. [N.E.]

geométricas básicas presentadas en el curso Elementos de Geometría del plan de estudios del proyecto curricular Licenciatura en Matemáticas de la UPN.

En el año 2006, se incorporó al Club de Matemáticas el profesor Carlos Luque, quien presentó un proyecto de práctica al Consejo del Departamento. Con la correspondiente aprobación, oficialmente se nombró a un profesor del DMA para que coordinara el Club y a un monitor para el apoyo de actividades logísticas y administrativas. En ese mismo año se continuó con el trabajo realizado por la profesora Salazar y se desarrolló una propuesta en torno a actividades aritméticas elementales. El resultado de ese trabajo se presentó en el marco del XVII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones.

En el segundo semestre de 2006, se llevó a cabo el proyecto de facultad: El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para fortalecer el estudio de las matemáticas, dirigido a niños de colegios distritales entre 10 y 16 años (Ángel y Mora, 2006). El proyecto fue coordinado por la profesora Lyda Mora y el profesor Leonardo Ángel. El Club de Matemáticas pasó de tener 20 participantes en 2005 a un total de 80 niños que se distribuyeron uniformemente en cuatro grupos para llevar a cabo estudios de teselados (dos grupos), teoría de números (un grupo) y matemática discreta (un grupo). También, fue en este periodo académico en el que se consolidó el Club como un espacio propio del DMA y se empezó a proyectar como un programa de extensión (Campos, González y Mora, 2007). Las labores realizadas por los coordinadores del Club y el apoyo de un estudiante monitor permitieron que se inscribieran entre 13 y 15 instituciones educativas tanto del Distrito Capital como de Cundinamarca y se estableciera la participación de 200 niños en las actividades sabatinas del Club de Matemáticas para el primer semestre de 2007.

Para los años 2008 y 2009, el Club se consolidó como el espacio para el cual fue pensado, proponiendo a los profesores en formación espacios de práctica relacionados con innovación curricular y la experimentación de innovaciones alrededor de la idea de talento matemático. En el primer semestre de 2010, con la aplicación de tres talleres, el Club de Matemáticas se ofreció por última vez en las instalaciones de la Universidad Pedagógica Nacional.

Entre las actividades que se desarrollaron en el Club de Matemáticas durante los años 2005 a 2010, se destacan:

1. Elementos de geometría: visualización, generalización, conceptualización.
2. Elementos de aritmética y álgebra: conteo, medición y localización, diseño.
3. Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir, poliminós y patrones de números a partir de dibujos basados en poliminós.
4. Iniciación a teselados: teselados regulares, semirregulares, demirregulares, notaciones para tipos de teselados, teselados con polígonos irregulares, técnicas para teselar.
5. Matemática y arte: estudio de estructuras algebraicas clásicas (por ejemplo, grupos cíclicos y diédricos) a partir de diseños artísticos (por ejemplo, rosetones, frisos y tapices) y, principalmente, de los movimientos rígidos del plano.
6. De los poliminós a la divisibilidad –Poliminós–: caracterización y reglas de formación de los poliminós, familiarización y desarrollo de actividades encaminadas a algunos aspectos de la teoría de números, estudio de polyamantes e identificación de sólidos que se forman con estos.
7. Particiones de números –A contar sin contar I–: representación de números a partir de sumas de otros, diagramas de Ferrer, técnicas de conteo, grafos garbosos; técnicas de conteo en matemáticas discretas (variaciones, combinaciones y permutaciones) y su aplicación en el juego del kakuro a través de las particiones numéricas.
8. Contar sin contar II: técnicas de conteo en matemática discreta, con énfasis en el establecimiento de nexos entre los números de Stirling de clases I y II con el conteo del número de subconjuntos de un conjunto y el número de particiones, Triángulo de Pascal.
9. Geometría dinámica del trillado: creación de una geometría dinámica a partir del software Cabri.
10. Redes: acercamiento a la teoría de grafos: características, tipos de grafos, Teorema de Euler, construcción de grafos, eulerización de redes, optimización.
11. Criptografía: estudio elemental de la estenografía, criptografía y el criptoanálisis a partir de técnicas clásicas como la sustitución, la clave César, módulos y matrices, entre otras.
12. Geometría plana: conceptualización de algunos temas básicos de la geometría como área de algunas figuras geométricas, triángulos y sus rectas notables, tipos de polígonos, criterios de congruencia entre triángulos.
13. Sucesiones y arte: tratamiento de algunas sucesiones básicas relacionadas con el arte como lo son las sucesiones de Fibonacci y su relación con el número áureo, las espirales, las fracciones continuas, algunas sucesiones geométricas y aritméticas relacionadas con pinturas famosas como las Omar Rayo.

14. Geometría 3D: establecimiento de nociones de geometría plana y del espacio; se construyen, caracterizan y establecen diferencias entre los sólidos platónicos, de Arquímedes, Kepler y Poincaré, elaborados con material concreto (origami), y otros modelados con el software educativo Cabri 3D. Estudio de la característica de Euler y algunas nociones propias de los sólidos como caras, vértices, aristas y volumen.
15. Fractales: estudio de algunas características de los fractales, como: la autosimilitud y la dimensión; construcción y reconocimiento de fractales clásicos como la curva de Koch, el conjunto de Cantor, la alfombra de Sierpinski, y el triángulo de Sierpinski.
16. Introducción a la teoría de juegos: acercamiento al estudio de la teoría de juegos; a partir de juegos usuales como ajedrez, triqui y nim, los estudiantes encuentran estrategias ganadoras que se discuten y se establecen como tales, para con ello determinar qué es una estrategia, desde la teoría misma; se presentan otros juegos, menos usuales, con el ánimo de ampliar la idea intuitiva de juego y llegar a una más teórica; también se estudian clases de juegos y algunos términos importantes de la teoría: juegos simétricos y asimétricos, juegos de suma cero, punto de equilibrio, maximin y minimax, entre otros.
17. Matemáticas y astronomía.
18. El problema de la proporcionalidad.
19. Factorización desde el álgebra y la geometría.

EL CLUB DE MATEMÁTICAS EN EL IPN

En la actualidad, el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se ha trasladado al Instituto Pedagógico Nacional, donde funciona los sábados de 8 a 10 de la mañana. En él están realizando su práctica docente dos estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del DMA, quienes para el primer semestre de 2015 han propuesto trabajar la relación de las matemáticas con la música y la introducción a las estructuras algebraicas a partir de los movimientos rígidos.

Respecto a la relación de las matemáticas y la música, se ha propuesto el siguiente esquema de trabajo:

Música y matemáticas: reflexión.

Música y matemáticas: serie de Fibonacci.

Ejemplos históricos de la música y las matemáticas.

La razón áurea.

Respecto a la introducción a las estructuras algebraicas, la propuesta es la siguiente:

Movimientos rígidos: isometrías.

Movimientos rígidos: traslaciones, rotaciones, reflexiones.

Rosetones.

Rosetones: diedros.

Patrones de cinta.

Grupos cristalográficos.

A pesar de las limitantes con relación al tiempo disponible para trabajar y a la cantidad de niños participantes, el Club de Matemáticas sigue siendo un espacio para el desarrollo y descubrimiento de ideas matemáticas por parte de los niños que disfrutan de esta rama del conocimiento, y es por ello que se ha invitado a la niña Tatiana Rodríguez Mora, de cuarto de primaria, a comentar lo que a lo largo del semestre ha podido elaborar y concluir, remembrando las épocas en las que los niños participantes del Club tenían un espacio fijo en las comunicaciones breves de las diferentes versiones del Encuentro de Geometría.

PARA TERMINAR: UNA INVITACIÓN

La idea de esta conferencia es hacer un llamado de atención a la comunidad académica acerca de la importancia que tiene el Club en un momento de coyuntura en el que se cuestiona acerca del papel de los profesores de matemáticas en la sociedad, de la intención de importar un modelo para la enseñanza de las matemáticas que poco o nada tiene que ver con el contexto nacional y de la importancia que estos factores tienen para el Departamento de Matemáticas de la UPN. Aquí queremos invitar a profesores, estudiantes, niños a que el Club retome la fuerza con la que nació.

El Club de Matemáticas de la UPN fue un espacio que motivó a niños de la ciudad de Bogotá a acercarse al estudio de las matemáticas, a acercarse a la Universidad. Niños que participaron en esas versiones son profesionales que crecieron con un amor hacia las matemáticas, incluso son profesores de matemáticas. En palabras de Tatiana “si el Club de Matemáticas fuera en la Universidad, entonces uno iría a la Universidad desde pequeño y eso debe ser

muy chévere, porque en la Universidad se aprenden cosas que sirven para la vida”.

El Club de Matemáticas de la UPN fue un espacio que motivó a profesores en formación a presentar y aplicar proyectos relacionados con la innovación curricular y el desarrollo de talento en matemáticas, documentos que pueden servir como apoyo docente a profesores de diferentes escuelas y colegios donde se tiene la idea de desarrollar un Club de Matemáticas y no se cuenta con el apoyo bibliográfico ni institucional para el desarrollo de las propuestas. La continuidad de esta idea va en coherencia con la idea fundacional de la Universidad como educadora de educadores y como principal institución de la nación en la formación de profesores.

REFERENCIAS

- Ángel, L. y Mora, L. (2006). *El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para fortalecer el estudio de las matemáticas, dirigido a niños y niñas de colegios distritales entre 10 y 16 años* (Informe Proyecto de Facultad). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.
- Campos, Y., González, M. y Mora, L. (2007). *El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para el estudio de las matemáticas con niños y niñas de colegios distritales entre 10 y 15 años* (Informe Proyecto de Facultad). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.



Cursillos



ACTIVIDADES PARA LA COMPRESIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA UTILIZANDO EL SOFTWARE CARMETAL

Yuri Cárdenas, Harold Hernández y Katherin Pinzón

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

estudiantenrpao@gmail.com, cardenal-1995@hotmail.com, kathe9992@gmail.com

En este cursillo se quiere dar a conocer una serie de actividades desarrolladas en el semillero de investigación Edumat de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en las que se utiliza el software CaRMetal para trabajar las relaciones entre la gráfica y la ecuación de la recta, de tal forma que los participantes puedan evidenciar cómo aprovechar el potencial de este software para la enseñanza de diferentes saberes, que serán aprendidos por adaptación.

JUSTIFICACIÓN

Actualmente existe una presión social para implementar y usar tecnologías informáticas en la enseñanza. Sin embargo, los profesores de matemáticas experimentan muchas dificultades para el uso de las mismas, por su falta de experiencia en el uso didáctico. Es por ello que uno de los mayores retos de “los educadores matemáticos es el de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje” (Arcavi y Hadas, 2000, citado en Gamboa, 2007, p. 15). Teniendo en cuenta lo anterior, nos surge el interés de plantear una propuesta en la que se involucren las Tecnologías de la Información y la Comunicación. Una estrategia para desarrollarla es el trabajo con un software de geometría dinámica que esté al alcance de todos, con el fin de propiciar la creación de diversas actividades para trabajar las relaciones entre la gráfica y la ecuación de la recta y, así, mostrar una propuesta de enseñanza y una forma en la que se puede hacer un tránsito entre registros de representación.

Según diversos estudios, como el de Torregrosa, Haro, Penalva y Llinares (2010), los softwares de geometría dinámica permiten la creación de espacios de interacción donde la experimentación y la investigación juegan uno de los papeles más importantes para potenciar la construcción y adquisición de un saber; en consecuencia, tales softwares pueden ser entendidos como recursos valiosos para la educación matemática.

Cárdenas, Y., Hernández, H. y Pinzón, K. (2015). Actividades para la comprensión de la ecuación de la recta utilizando el software CaRMetal. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 59-62.

Por esta razón, en este cursillo presentamos actividades para dos sesiones, con un diseño didáctico para lograr un aprendizaje sobre la relación entre ecuación y gráfica de una recta, saber básico en la educación colombiana. Así, tratamos de mostrar un ejemplo de lo que puede lograrse con la tecnología, y también introducimos algunas herramientas didácticas del software CaRMetal. Por tanto, mediante este cursillo se pretende:

- Proponer actividades de clase que pueden promover el aprendizaje por adaptación del concepto de ecuación de una recta, aprovechando el potencial del software.
- Proporcionar a los profesores participantes una experiencia de aprendizaje utilizando el software.
- Reflexionar sobre el concepto de aprendizaje por adaptación cuando se promueve la interacción de los estudiantes con el software.

REFERENTES TEÓRICOS BÁSICOS

Siguiendo las orientaciones de Duval (2006), se intenta trabajar la conversión entre registros de representación: el registro algebraico (ecuación) y el registro geométrico (gráfica), para lograr un aprendizaje del concepto de recta.

La conversión de registros semióticos es una transformación de un registro a uno nuevo; así, si en nuestro registro 1 está la recta vista desde una expresión algebraica (ecuación), pasamos de este al registro 2, en el que veremos el tratamiento de la gráfica de la recta. Básicamente, se propondrán, entonces, problemas en los que los alumnos tengan que transitar por dichos registros: observar la gráfica de una recta para poder determinar su ecuación, o examinar su ecuación para poder modificar su gráfica, puesto que “el cambio de forma semiótica de representación constituye una operación cognitiva básica” (San Martín, 2007, p. 3).

Haciendo referencia al trabajo de Duval, San Martín (2007, p. 4) señala que Duval establece la importancia fundamental de asuntos como:

- La importancia de la coordinación de diversos registros de representación semiótica. Establece que muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación.

- El considerar al conocimiento conceptual (la comprensión) como el invariante de múltiples representaciones semióticas.
- En base a diferentes registros de representación, definir variables independientes específicas para contenidos cognitivos y organizar propuestas didácticas para desarrollar la coordinación de registros de representación.

Esto fundamenta la importancia de considerar el tratamiento de dos registros semióticos para el diseño y creación de estas actividades en CaRMetal.

Por otra parte, intentamos plantear situaciones que propicien el aprendizaje por adaptación. De acuerdo con la teoría de Brousseau (1986) se busca que los alumnos interactúen con el software para intentar resolver un problema, y en esa interacción reciban retroacciones del software que les permitan validar o invalidar sus estrategias y, así, construyan su propio conocimiento.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES

El desarrollo del cursillo se hará en una sala de sistemas, en la que los asistentes asuman el rol de alumnos. Cabe aclarar que quienes tenemos a cargo el cursillo no intervenimos directamente en ninguna de las actividades, dado que estas cuentan con enunciados y mensajes automáticos que guían al participante, de tal modo que la interacción que se genera es entre el sujeto (asistente) y el medio (software), aprendizaje por adaptación.

Inicialmente se hará una breve introducción sobre el manejo básico del software. Posterior a ello, los participantes procederán a interactuar con las actividades preparadas, con el fin de resolver las situaciones propuestas en ellas. En las actividades planeadas para la primera sesión se trabajará el cambio de registro gráfico al algebraico y en las de la segunda sesión se trabajará el cambio inverso, del algebraico al gráfico.

Una vez se haya dado el espacio de interacción con las actividades en cada sesión, se realizará una discusión abierta sobre el diseño de las mismas y las posibilidades de aprendizaje que propician o no en los alumnos, considerando, cómo mediante el software es posible realizar un diseño didáctico que tenga en cuenta teorías como las de Brousseau, para permitir la construcción de un objeto matemático.

Un ejemplo del tipo de actividades que se presentarán se muestra en la Figura 1. En esta actividad se pretende estudiar la relación entre la variable b de la ecuación $y = ax + b$ y la ordenada del corte de la recta con el eje Y, en la gráfica. Se pide que el participante mueva el cursor de tal forma que la recta azul quede sobrepuesta a la recta roja; el movimiento de esta recta azul es paralelo a la recta roja, puesto que ambas rectas tienen la misma pendiente. Así, lo que se busca es que la movilidad de la recta azul denote el corte con el eje de ordenadas, denotado en la ecuación de la recta como la variable b .

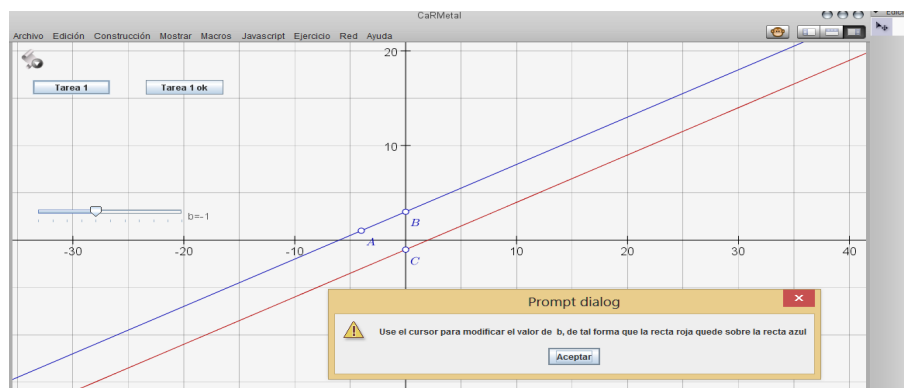


Figura 1. Corte de una recta con el eje de ordenadas, en relación con la variación de b

REFERENCIAS

- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas* (J. Centeno, B. Melendo y J. Murillo, Trs.). Recuperado el 16 de mayo de 2015, de: https://www.dropbox.com/s/flb8wspqu17e91n/Brousseau_Fondements.pdf?dl=0
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2(3), 11-44. Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno3/cuaderno3_c1.pdf
- San Martín, O. (2007). Un registro de representación semiótica de naturaleza geométrica para la trigonometría. En *Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Recuperado el 16 de mayo de 2015, de <http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/aplicacion/dat05.htm>
- Torregrosa, G., Haro, M., Penalva, M. y Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Educación*, 352, 379-404.

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON EL USO DEL PORTASEGMENTOS

Allan Gen y Rónald Sequeira

Universidad Estatal a Distancia (UNED), Costa Rica

agen@uned.ac.cr, rsequeira@uned.ac.cr

Empleando el portasegmentos, como instrumento de dibujo, en el cursillo se realizarán construcciones de diversos objetos geométricos: mediatriz de un segmento, perpendicular a un segmento de recta en un punto dado, bisectriz de un ángulo dado, triángulo equilátero, circuncentro de un triángulo, centro de una circunferencia dada, polígonos regulares y elipse dados sus semiejes. El cursillo está dirigido a docentes de cualquier nivel educativo.

EL PORTASEGMENTOS COMO RECURSO DIDÁCTICO

Los únicos instrumentos que admite la geometría clásica en las construcciones geométricas son la regla y el compás; sin embargo, existen una serie de recursos didácticos que cumplen las mismas funciones. El portasegmentos es uno de ellos, y es una buena opción para que los estudiantes interactúen con el objeto geométrico realizando construcciones geométricas que ayuden a la comprensión de los conceptos geométricos y sus propiedades.

El portasegmentos (Figura 1), también llamado regla de bandas paralelas, es una tira de papel, cartulina, madera, metal o plástico de forma rectangular de 1,5 cm de ancho por 15 cm de largo, aunque estas medidas pueden variar. Esta herramienta permite emplear las propiedades de dos rectas paralelas que al traslaparse con otras dos rectas paralelas con la misma separación determinan ángulos congruentes, cuya bisectriz es eje de simetría de un par de estos ángulos tal y como se muestra en la Figura 2. También con este instrumento se facilita el traslado de segmentos y, de ahí, el nombre que se le ha asignado.



Figura 1. Portasegmentos

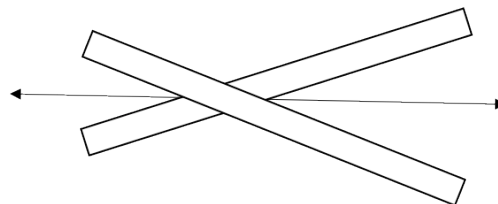


Figura 2. Propiedades del portasegmento

Además, con esta herramienta se pueden mostrar aquellas heurísticas que se encuentran implícitas en las construcciones geométricas, y así propiciar el análisis de los distintos componentes que intervienen en su proceso, esto con el propósito de favorecer la enseñanza explícita de métodos de construcción de los distintos elementos geométricos. Es conveniente su uso para contrarrestar los procesos memorísticos de ciertas construcciones realizadas con regla y compás.

Se considera que el portasegmentos es un buen recurso didáctico. Su implementación en los cursos de geometría del Programa de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica (UNED), nos permite recomendarlo tanto para los primeros cursos de geometría donde se inicia con las construcciones geométricas de elementos básicos de la geometría euclídea, como para la gran mayoría de las construcciones geométricas que se realizan en los otros niveles educativos.

Rojas y Sequeira (2013, p. 42) señalan algunas ventajas de su uso:

- Es muy fácil de construir y no representa costo alguno.
- Se puede construir con material reciclable.
- En la mayoría de las veces se pueden hacer las mismas construcciones que con la regla y el compás.
- Permite al estudiante interactuar con el objeto geométrico.
- Este recurso no representa ningún peligro para el estudiante, como sí lo podría ser un compás.

Además de las ventajas señaladas, también puede ser utilizado con distintas poblaciones (e. g., privadas de libertad, estudiantes del nivel básico y medio, estudiantes con necesidades educativas especiales), puesto que su uso estimula la motricidad fina.

También Rojas y Sequeira (2013, p. 43) señalan algunas desventajas:

- Si el portasegmentos no está bien construido, el grado de error sistémico aumenta el grado de error causal en la construcción.
- Su uso excesivo lo deteriora considerablemente, por lo que se recomienda construirlo con algún material duradero como plástico.
- No es recomendable para los estudiantes en la construcción de circunferencias, ya que se requiere tener cierta destreza en su uso.

CONSTRUCCIONES CON EL PORTASEGMENTOS

En el cursillo se harán algunas construcciones geométricas (e. g., mediatriz de un segmento, recta perpendicular a un segmento de recta en un punto dado, bisectriz de un ángulo, polígonos regulares, triángulo equilátero, determinación del circuncentro de un triángulo y del centro de una circunferencia de centro desconocido, polígonos regulares y elipse dados sus semiejes) de manera tan nítida y clara como si se utilizara la regla y el compás.

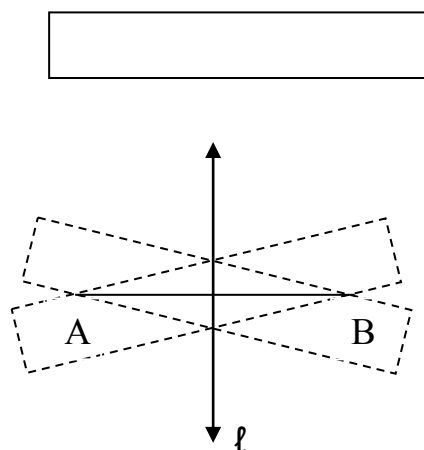
A continuación, a manera de ejemplo, se expone la construcción de la perpendicular a un segmento de recta en un punto dado.

Trazar un segmento de recta de extremos A y B .

Colocar el portasegmentos de forma que los puntos A y B queden, cada uno, sobre uno de los bordes del instrumento, y trazar las respectivas marcas en el papel y en el instrumento sobre una perpendicular imaginaria a los bordes del mismo.

Repetir el procedimiento, intercambiando la colocación de los bordes del portasegmentos con respecto a los puntos A y B .

Por último, trazar la recta ℓ que contenga los puntos de intersección de las marcas y dicha recta es la mediatriz del segmento de recta.



REFERENCIAS

Rojas, E. y Sequeira, R. (2013). *Geometría euclídea I*. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica (UNED).

PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS: EJEMPLOS Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

Gabriela Net

Universidad de Buenos Aires, Argentina

gabriela_net@hotmail.com, gnet@cnba.uba.ar

Se trata de un cursillo destinado a docentes de matemática interesados en revisar o adquirir conocimientos acerca de probabilidades geométricas. Se propondrá a los participantes una revisión teórica inicial, donde se definirán los conceptos básicos de la probabilidad dentro de un marco geométrico, y luego la realización de actividades prácticas, con empleo de herramientas informáticas, que les permitan familiarizarse con esta temática, así como reconocer la importancia didáctica del establecimiento de relaciones significativas entre problemas geométricos y procesos aleatorios.

INTRODUCCIÓN

Hace ya más de dos décadas, el Dr. Miguel de Guzmán (1993) señaló una profunda depresión del pensamiento geométrico en la enseñanza matemática. En muchos ámbitos escolares este problema persiste aún: los contenidos de geometría están presentes en los currículos vigentes, pero en la práctica muchas veces quedan relegados, en tanto que contenidos numéricos, de álgebra pura o de geometría analítica adquieren mayor grado de desarrollo.

Existen investigaciones, como la de Báez e Iglesias (2007), que señalan dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, debidas a que los docentes no desarrollan contenidos establecidos en los programas, por falta de conocimientos académicos, o por desconocer su importancia. Por otra parte, como señala Tejada (2001), el docente es un mediador más entre el currículo y la situación real en la que se desarrolla, dado que interpreta y redefine la enseñanza en función de su conocimiento práctico, de su manera de pensar y entender la acción educativa. En este sentido la capacitación docente permanente opera como una herramienta necesaria para la revalorización de los contenidos de geometría y sus conexiones con otras áreas del saber, propiciando una comprensión más completa del mundo que nos rodea.

REFERENCIAS TEÓRICAS Y ORIENTACIONES INICIALES

Fouz (1994) señala entre los objetivos de la enseñanza de la geometría la conexión con otras áreas de la matemática u otras disciplinas técnicas, y con el proceso histórico seguido en su evolución que permite apreciar su aporte a la creación y el desarrollo de otras áreas del conocimiento.

Si se considera el experimento aleatorio que consiste en tomar al azar un punto de un cuadrado, y se quiere calcular la probabilidad de que tal punto pertenezca al círculo inscripto en dicho cuadrado, no es factible utilizar la definición clásica de Laplace, contando casos favorables y posibles. El problema se resuelve mediante la definición de probabilidad geométrica, como relación de medidas, efectuando el cociente entre el área del círculo inscripto y el área del cuadrado.

Así, desde el punto de vista didáctico, la enseñanza del concepto de probabilidad puede integrarse con conceptos geométricos elementales y familiares, por medio de problemas que favorecen el establecimiento de conexiones entre áreas matemáticas, y de relaciones conceptuales significativas entre contenidos. La probabilidad geométrica está estrechamente relacionada con un enfoque “a priori” de la probabilidad que permite el cálculo antes de realizar pruebas aleatorias. Pero, en definitiva, como indica Sáenz de Castro (s. f.):

... hay muchos caminos para introducir los conceptos probabilísticos. Por ejemplo, el modelo de frecuencia relativa trata con datos discretos mientras el modelo de proporción, especialmente la probabilidad geométrica, puede tratar con datos continuos. Si adoptamos una perspectiva de modelización para la enseñanza de la probabilidad, los conflictos entre un enfoque clásico de equiprobabilidad, un enfoque de frecuencia relativa o un enfoque subjetivista, no tienen por qué ser un obstáculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por el contrario, se debe equipar a profesores y alumnos con representaciones múltiples de probabilidad; es lo que Steinbring (1991) llama situaciones significativas.

El presente cursillo pretende ser un aporte que permita a los participantes:

- Asumir un rol activo para resolver y analizar problemas aptos para ser desarrollados en cursos escolares, realizar un análisis conceptual y didáctico de los mismos y establecer líneas de trabajo para un futuro próximo en sus ámbitos de trabajo.

- Destacar el rol interdisciplinario e integrador de las probabilidades geométricas y conocer algunas de sus aplicaciones reales, con distintos grados de complejidad: problemas de agrimensura, cartografía, la geometría integral y la estereología, la tomografía computada, etc.

TEMAS POR TRATAR

Las probabilidades geométricas como fuente de ejemplos para la enseñanza de las probabilidades en la escuela. Síntesis histórica; la aguja de Buffon, paradoja de Bertrand. Azar y construcción de triángulos. Problemas de encuentro. Simulaciones y visualizaciones. El rol de la tecnología.

ALGUNOS EJEMPLOS

La posibilidad o imposibilidad de realizar construcciones geométricas proporciona ejemplos naturales de cuestiones de probabilidad. Como problemas iniciales básicos se mostrarán algunos ejemplos de probabilidades relacionados con triángulos y otras figuras geométricas simples, que pueden materializarse con papel, tijeras y plegados, entre los que citamos:

Un vértice de un triángulo isósceles se toma al azar, y se dobla el triángulo hasta hacer coincidir ese vértice con el punto medio del lado opuesto. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio? ¿Y un trapezoide? ¿Y si el triángulo es equilátero?

Un vértice de un cuadrado de papel se hace coincidir con otro vértice tomado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un triángulo?

Si se toma al azar un vértice de un triángulo isósceles, y se dobla el triángulo haciendo coincidir ese vértice con cualquier punto del lado opuesto, ¿cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio?

El documento del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) destaca la importancia de la representación como un proceso matemático, que implica el uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos. Se propondrán situaciones problemáticas que propicien la utilización y el desarrollo de diferentes formas de representación y favorezcan la reflexión y la comunicación:

En el interior de un cuadrado $ABCD$ se elige un punto P al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo ABP sea obtusángulo? ¿Acutángulo? ¿Rectángulo?

Dos números x e y se eligen al azar, con $0 < x < 4$, $0 < y < 4$. Calcular la probabilidad de que la suma de ambos números sea mayor que el producto.

La variedad de representaciones de estos problemas se apoyará en el empleo de algunas herramientas informáticas conocidas y de sencilla implementación (Geogebra, planilla de cálculo Excel), y de recursos de Internet para la realización de simulaciones, tablas y gráficos. Se propiciará también el análisis didáctico de las distintas posibilidades de formalización y justificación de los resultados en relación con los aprendizajes adquiridos y los recursos conceptuales disponibles.

REFERENCIAS

- Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, 12-16, (número extraordinario), 67-87.
- De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. [Versión electrónica] Recuperado el 26 de marzo de 2015, de: <http://www.oei.es/edumat.htm>
- Fouz, F. (1994). Reflexiones en torno a la didáctica de la geometría. *Aula de Innovación Educativa*, 22, 11-16.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Sáenz de Castro, C. (s. f.) Probabilidad. Capítulo 5: La enseñanza de la probabilidad. Un problema pendiente. Recuperado el 31 de marzo de 2015, de: <http://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/cesarsaenz.htm>
- Tejada, J. (2001) Función docente y formación para la innovación. *EDUCAME, Revista de la Academia Mexicana de la Educación*, 4(4), 111-138.

SUPERFICIES CUADRADAS QUE SE TRANSFORMAN EN NUDOS

José Panqueva

raulpanqueva@yahoo.com

Plegando una superficie cuadrada es posible obtener un nudo. La técnica consiste en dibujar sobre la superficie una malla de líneas entrelazadas y unir los bordes del cuadrado para formar un poliedro de tal forma que las líneas de la malla coincidan. Con los pliegues adecuados, el recorrido de la línea alrededor del poliedro forma un nudo alterno y es posible hacer el poliedro con una tira de papel plegándola, anudándola y uniendo o traslapando sus extremos.

Algunos poliedros se pueden construir trenzando una o varias tiras de papel y uniendo sus extremos (Panqueva, 2011), en un proceso consistente en identificar los pliegues que debe tener la tira de papel y la forma en que se debe entrelazar para formar el poliedro.

La variedad de poliedros que se pueden hacer anudando una tira de papel es extensa y abarca, incluso, a los poliedros platónicos, que se pueden hacer con varias tiras de papel como lo describe Pedersen (1973). El proceso es usualmente complejo y para simplificarlo se buscan grupos de nudos o poliedros que tengan alguna característica común.

Tarnai, Kovács, Fowler y Guest (2012) describen algunos poliedros hechos con tiras de papel en los que el nudo es alterno, en cada cruce las tiras tienen un ángulo de 90 grados. Las tiras se cruzan de manera perpendicular y la superficie del poliedro queda de dos capas de papel. De aquí surge una clase específica de nudos en los que el diagrama alterno del nudo es una cuadrícula.

Alexander, Dyson y O'Rourke (2003) describen la forma en que se pueden obtener poliedros convexos plegando un cuadrado y uniendo los bordes. Hay cuatro formas de plegar un cuadrado y unir sus bordes de manera que el resultado sea una figura plana de dos capas. Corriendo los bordes del papel en cada una de estas formas se obtienen poliedros convexos y si al cuadrado se le dibuja una red con líneas alternas perpendiculares, al plegar el poliedro de manera que las líneas queden continuas, estas pueden formar un nudo, si el recorrido alrededor del poliedro lo hace una sola línea, o pueden ser un enlace,

si el recorrido requiere dos o más líneas. Si, además, el recorrido se hace con una tira de papel del ancho de la cuadrícula, se encuentra que el poliedro se puede hacer con una o varias tiras de papel entrelazándolas con un ángulo de 90 grados. Veamos dos ejemplos.

CUADRADO DE TRES POR TRES

En la Figura 1 se describe una forma de plegar un cuadrado de tres por tres. Al plegar el cuadrado como se indica y unir los bordes se forma un octaedro irregular. Al añadir una cuadrícula de nueve líneas entrelazadas y señalar las uniones que se forman en el poliedro, se obtiene el diagrama de un nudo alterno de nueve cruces.

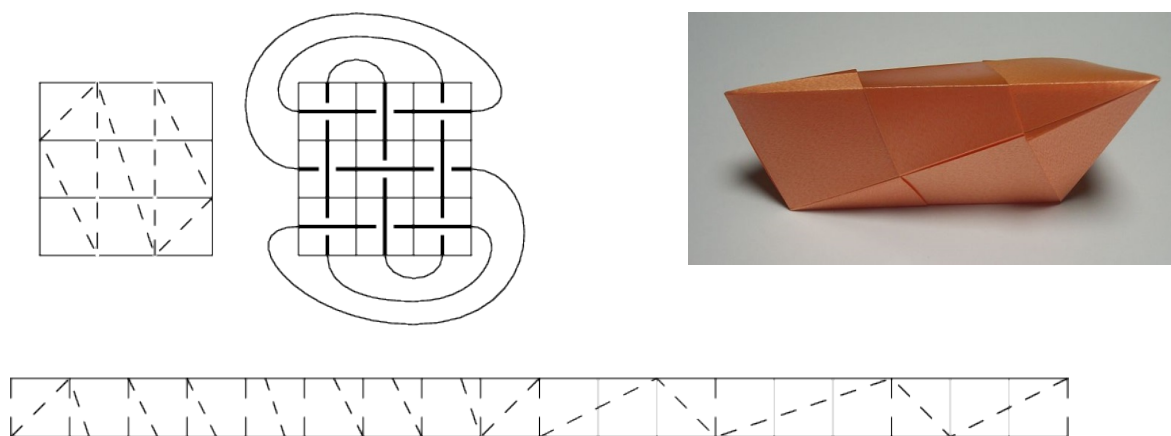


Figura 1. Superficie cuadrada de 3×3 e imagen del nudo con una tira de papel

Sobre la cuadrícula se recorre el nudo con una tira de papel del ancho de cada cuadro y se van marcando los pliegues hasta completar, en este caso, una tira de 18 cuadros. La tira con los pliegues se observa en la parte inferior de la Figura 1 y en la fotografía se observa el octaedro que se obtiene al hacer el nudo con la tira de papel que es algo mayor a los 18 cuadros, para poder traslapar sus extremos.

CUADRADO DE CUATRO POR CUATRO

Una forma de plegar un cuadrado de cuatro por cuatro se observa en la Figura 2 y el procedimiento es similar al descrito en el ejemplo anterior. El tamaño de la tira de papel es de 32 cuadros y al anudar la tira se obtiene un hexaedro.

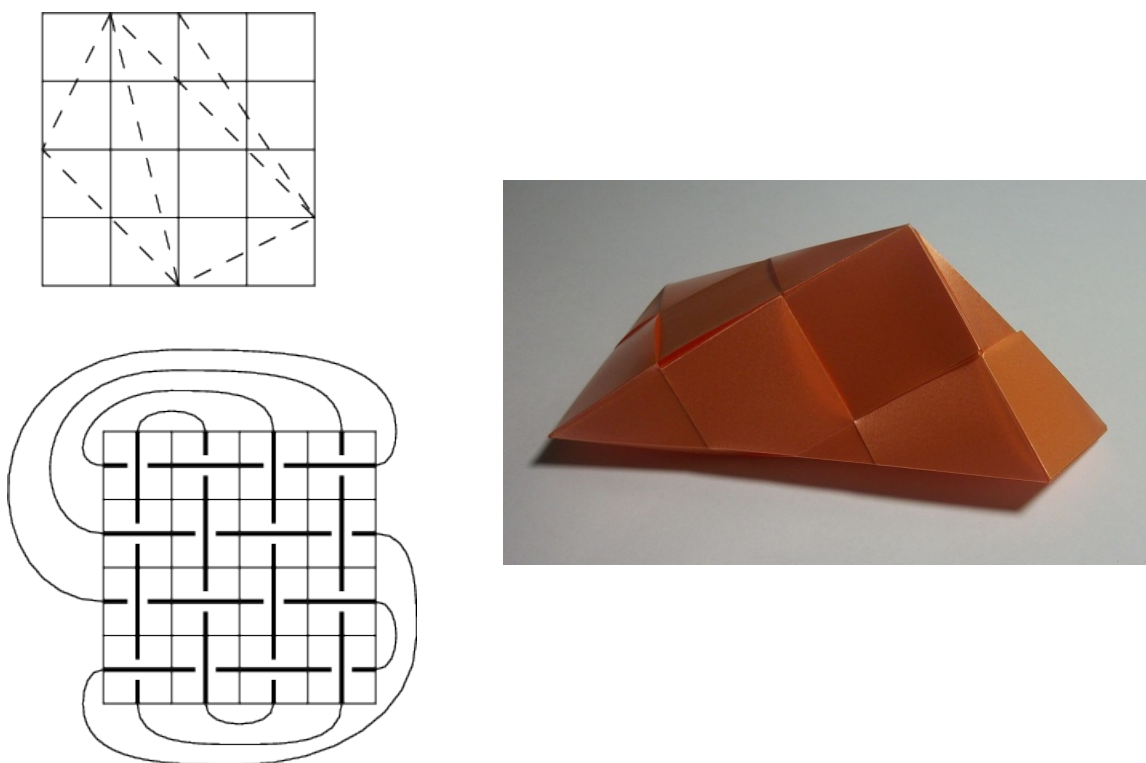


Figura 2. Superficie cuadrada de 4×4 e imagen del nudo con una tira de papel

DESARROLLO DEL CURSILLO

Hacer poliedros a partir de un cuadrado y hacerlos con un nudo es un procedimiento sencillo de implementar, salvo al momento de hacer el nudo cuando el número de cruces sea grande y puede extenderse a cuadrículas rectangulares.

En el cursillo se estudiarán las diferentes formas en que se puede plegar un cuadrado y la ubicación de los pliegues para que el poliedro sea un nudo. En algunos modelos, los participantes podrán verificar que se trata de un nudo.

REFERENCIAS

- Alexander, R. Dyson, H. y O'Rourke, J. (2003). The foldings of a square to convex polyhedra. En J. Akiyama y M. Kano (Eds.), *Discrete and computational geometry* (pp. 38-50). Berlín, Alemania: Springer-Verlag. Recuperado el 17 mayo de 2015, de: cs.smith.edu/~orourke/Papers/sq.pdf
- Panqueva, J. (2011). Poliedros hechos con nudos ideales. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 445-448). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Pedersen, J. (1973). Plaited Platonic puzzles. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 4(3), 23-37.
- Tarnai, T., Kovács, F., Fowler, P.W. Y Guest, S.D. (2012). Wrapping the cube and other polyhedra. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2145), 2652-2666.

GEOMETROTERMODINÁMICA Y SUS APLICACIONES

Hernando Quevedo* y María Quevedo**

**Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad de Roma,*

***Universidad Militar Nueva Granada*

quevedo@nucleares.unam.mx, maria.quevedo@unimilitar.edu.co

En este cursillo presentaremos una introducción a la geometrotermodinámica, formalismo que describe las propiedades de sistemas termodinámicos mediante conceptos de geometría diferencial. Así, la interacción termodinámica se representa mediante la curvatura del espacio de equilibrio, las transiciones de fase mediante sus singularidades de curvatura y los procesos cuasi-estáticos mediante sus geodésicas. Explicaremos cómo se puede aplicar este formalismo para describir la historia de nuestro Universo, comenzando por la era inflacionaria relativista hasta llegar al estado actual dominado por la energía oscura. Además, demostraremos que el espacio de equilibrio del gas ideal tiene una estructura causal análoga a la teoría especial de la relatividad de Einstein.

INTRODUCCIÓN

El cursillo tiene por objetivo presentar a la audiencia del Encuentro parte de los resultados obtenidos durante los últimos ocho años en el grupo de investigación del ponente, en colaboración con investigadores y estudiantes de postgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México y de la Universidad de Roma. El formalismo de la geometrotermodinámica (GTD) fue propuesto en (Quevedo, 2007), con el fin de describir las propiedades de sistemas termodinámicos en equilibrio de manera invariante, utilizando las bases conceptuales de la geometría diferencial de Riemann. Todos los resultados que se presentarán han sido publicados en diferentes revistas internacionales y, en particular, daremos un resumen de los artículos mencionados en las Referencias.

Han sido varias las áreas de la física donde la GTD ha encontrado aplicaciones directas. En primer lugar, se ha visto que para todo sistema termodinámico ordinario (sistema de laboratorio) especificado mediante una ecuación fundamental es posible encontrar una métrica en el espacio de equilibrio que reproduce correctamente las propiedades termodinámicas del sistema en cuestión (Vázquez, Quevedo y Sánchez, 2010). En el caso de sistemas exóticos, tales como hoyos negros gravitacionales (Quevedo, 2008), se logró

derivar una formulación unificada en el contexto de termodinámica geométrica (Álvarez, Quevedo y Sánchez, 2008). En química teórica se demostró que una reacción química de cualquier índole se puede representar como una geodésica en el espacio de equilibrio, dando de esta manera una interpretación geométrica a las reacciones químicas. Además se ha demostrado que las leyes termodinámicas que rigen en la econofísica se pueden formular en el contexto de la GTD de forma tal que las crisis financieras pueden ser interpretadas como transiciones de fase que se manifiestan como singularidades de curvatura del espacio de equilibrio.

En este curso nos limitaremos a presentar dos aplicaciones particulares de la GTD en el área de cosmología relativista y en el contexto del gas ideal cuyo espacio de equilibrio resulta tener una estructura semejante a la de la relatividad especial de Einstein.

La asistencia a este cursillo no requiere de una preparación técnica especializada por parte de la audiencia. Todos los conceptos serán definidos de forma breve e intuitiva y los resultados se presentarán en un nivel básico, equivalente al de estudiantes de pregrado en física o matemáticas.

CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETROTERMODINÁMICA

Dado un sistema en equilibrio con n grados de libertad termodinámicos, en GTD se construye primero el espacio fase termodinámico que tiene $2n + 1$ dimensiones. El objetivo de este espacio es permitir la introducción de una métrica riemanniana invariante ante transformaciones de Legendre o, en términos de conceptos de termodinámica clásica, independiente de la selección del potencial termodinámico. Luego, mediante la especificación de una ecuación fundamental se obtiene el espacio de equilibrio de n dimensiones, el cual es, a su vez, un subespacio del espacio fase termodinámico (Quevedo y Quevedo, 2011). Las propiedades geométricas del espacio de equilibrio están relacionadas con las propiedades termodinámicas del sistema en cuestión. El objetivo de la GTD es mostrar que para todos los sistemas termodinámicos es posible encontrar una relación entre la curvatura del espacio de equilibrio y la interacción termodinámica de forma tal que las singularidades de curvatura correspondan a transiciones de fase. Además, se demuestra que un proceso cuasi-estático libre se puede interpretar como una geodésica a lo largo de la cual se cumplen las leyes de la termodinámica. De esta manera, se halla una

especie de diccionario entre las propiedades termodinámicas de un sistema y las propiedades geométricas de su espacio de equilibrio.

Geometrotermodinámica en cosmología relativista

La GTD permite derivar ecuaciones fundamentales a partir de un principio variacional, mismas que pueden ser usadas para describir diferentes sistemas termodinámicos. Se demuestra que una ecuación fundamental muy particular se puede usar para describir la historia termodinámica del Universo en el contexto de la teoría de la relatividad de Einstein (Aviles, Bastarrachea-Almodovar, Campuzano y Quevedo, 2012). Esto significa que dicha ecuación fundamental se puede utilizar para generar las diferentes ecuaciones de estado del modelo cosmológico estándar, incluyendo épocas dominadas por la radiación, la materia bosónica y finalmente por la energía oscura. Además, se presenta una ecuación fundamental generalizada que lleva a transiciones de fase y tentativamente se puede implementar para describir la época inflacionaria del Universo.

Estructura relativista de la termodinámica clásica

Un análisis exhaustivo del espacio de equilibrio del gas ideal muestra que posee una estructura semejante a la estructura causal de la teoría especial de la relatividad (Quevedo, Sánchez y Vázquez, 2015). Las geodésicas termodinámicas permiten asociar la dirección del crecimiento de la entropía con la “dirección del tiempo”. De igual manera, se puede definir un cono adiabático, similar al cono de luz de la relatividad especial, el cual permite introducir el concepto de futuro y pasado adiabático. La tercera ley de la termodinámica implica que se debe eliminar un punto del espacio de equilibrio, lo cual se puede interpretar como un cambio de la topología correspondiente. De esa manera, se obtiene una descripción geométrica y topológica de la tercera ley.

CONCLUSIONES

La GTD es un formalismo que permite describir de forma invariante las propiedades termodinámicas de un sistema en términos de conceptos de geometría diferencial. Tiene aplicaciones en muchas áreas de las ciencias, tales como termodinámica de hoyos negros, cosmología relativista, química teórica, econofísica.

REFERENCIAS

- Álvarez, J. L., Quevedo, H. y Sánchez, A. (2008). Unified geometric description of black hole thermodynamics. *Physical Review D*, 77, 084004.
- Aviles, A., Bastarrachea-Almodovar, A., Campuzano, L. y Quevedo, H. (2012). Extending the generalized chaplygin gas model by using geometrothermodynamics. *Physical Review D*, 86, 063508.
- Quevedo, H. (2007). Geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 48, 013506.
- Quevedo, H. (2008). Geometrothermodynamics of black holes. *General Relativity and Gravitation*, 40, 971-984.
- Quevedo, H. y Quevedo, M. N. (2011). Fundamentals of geometro-thermodynamics. *Electronic Journal of Theoretical Physics*, 1-16.
- Quevedo, H., Sánchez, A. y Vázquez, A. (2015). Relativistic like structure of classical thermodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 47, 36.
- Vázquez, A., Quevedo, H. y Sánchez, A. (2010). Thermodynamic systems as extremal hypersurfaces. *Journal of Geometry and Physics*, 60, 1942-1949.

IDEAS INTERESANTES SOBRE GEOMETRÍA EN LA ESCUELA MEDIA

Antonio Sángari y Cristina Egüez

Universidad Nacional de Salta, Argentina

asangari2000@gmail.com, ceguez@gmail.com

En el cursillo se presentará una propuesta de un curso corto de geometría sintética para la escuela media, con asistencia de GeoGebra. Aunque esta geometría es fuertemente lógica, es decir, se basa en un desarrollo axiomático, estamos persuadidos de que insistir sobre esto en los primeros años de la escuela secundaria causa rechazo en los estudiantes. Por esta razón, brindamos algunas ideas para ordenar el desarrollo de los primeros conceptos de geometría.

INTRODUCCIÓN

Básicamente, el problema que hemos detectado es que la comunidad educativa ha descuidado desde hace unas décadas la instrucción en Geometría Sintética, priorizando temas de Álgebra o de Geometría Analítica. Las razones que dieron lugar a este hecho varían desde las históricas a las sociales, pero no profundizaremos en este análisis.

Creemos que se perdieron recursos formativos relevantes cuando se descuidó la enseñanza de la geometría básica y que es muy importante recuperarlos.

En el cursillo propondremos una organización de los temas de geometría sintética para la escuela secundaria; también tratamos aspectos de su implementación en el aula con GeoGebra como recurso tecnológico. Brindamos algunas ideas representativas de lo que hemos desarrollado en otros cursos dictados en nuestro medio.

DESARROLLO DEL CURSILLO

El cursillo se desarrollará en dos sesiones de noventa minutos cada una según el siguiente temario:

Sesión 1: Ángulos adyacentes, opuestos por el vértice y exteriores

Para comenzar, presentaremos las primeras deducciones relacionadas con congruencias de ángulos. Los teoremas que trataremos son los clásicos sobre

congruencia de ángulos adyacentes a un mismo ángulo y consecuentemente los opuestos por el vértices. Trataremos también los ángulos exteriores.

Ejemplo de actividad

Teorema: En cualquier triángulo, un ángulo exterior es mayor que cualquier interior no adyacente.

Ejercicio: Realice la prueba del Teorema.

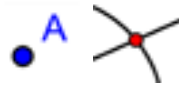
1. Abra una hoja de GeoGebra y nómbrela Prim_Teo_Ang_Ady.ggb

2. Trace el triángulo  ABC .

3. Dibuje el punto medio  D del segmento AB .

4. Trace la circunferencia  d de centro D que pasa por C .

5. Trace la recta  $CD = e$.

6. Marque la segunda intersección  E de d y e . Acerque el mouse a la intersección de la recta e con la circunferencia d . ¿Cómo es CD con respecto a DE ?

7. Oculte  d .

8. Trace los triángulos ACD y BDE . Cámbieles el color (clic sobre objeto $\rightarrow$ Propiedades $\rightarrow$ Color). Use un criterio de congruencia para mostrar que estos son congruentes.

9. Trace la recta  CB y marque un punto F cualquiera de tal modo

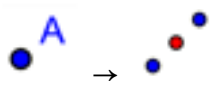
que B esté entre C y F .

10. Muestre que $\widehat{CAD} \equiv \widehat{DBE}$ y $\widehat{CAD} < \widehat{DBF}$

11.

Verifique el resultado anterior con la herramienta  (marque los vértices en sentido horario).

12.

Sea G el punto medio  del segmento CB . Muestre que $\widehat{ACG} < \widehat{DBF}$ mediante un procedimiento análogo, a partir del paso 3.

13. ¿Qué puede concluir?

Sesión 2: Teoremas sobre lados y ángulos del triángulo

En esta sesión prestaremos especial atención a los resultados clásicos sobre triángulos, como por ejemplo el teorema del “*pons asinorum*” (que expresa que si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos congruentes) y su recíproco, y los teoremas que relacionan los lados de un triángulo con sus ángulos opuestos.

REQUISITOS

Los requisitos para afrontar los ejercicios contenidos en la cartilla que se entregará en formato pdf, son las definiciones y los axiomas usuales de la geometría elemental que pueden consultarse en (Efimov, 1984).

METODOLOGÍA

Las clases serán de tipo taller, es decir, motivaremos a los cursantes a asimilar los conceptos mediante la actuación sobre los mismos. Utilizaremos el programa GeoGebra para realizar los dibujos que guíen a las deducciones y también para realizar exploraciones, basándonos en el carácter dinámico de este software. Promoveremos la investigación, la elaboración de conjeturas, la argumentación matemática, como también, el trabajo personal y en equipo me-

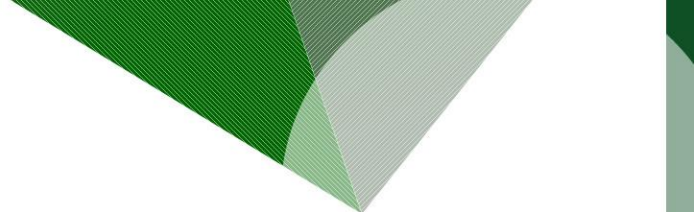
diante una metodología activa que lleve al aprendizaje por descubrimiento basado en la propia experiencia.

RECURSOS

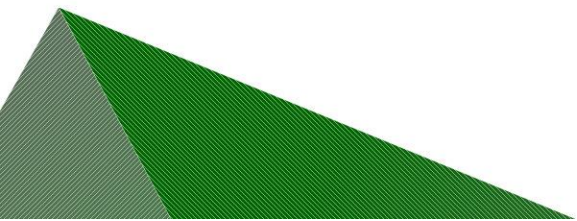
Los participantes de este curso deben contar con un ordenador que tenga instalado el programa GeoGebra en la versión más reciente que se encuentra en la dirección <http://www.geogebra.org/download>. Es recomendable, pero no indispensable contar con conexión a Internet, para intercambiar apuntes, guías manuales, instructivos o tutoriales, o consultas entre sesiones, si se diera el caso.

REFERENCIA

Efimov, N. V. (1984). *Geometría superior* (J. J. Tolosa, Tr.). Moscú, Rusia: Editorial Mir.



Comunicaciones breves



ARGUMENTACIÓN DE ESTUDIANTES DEL CICLO IV, APOYADA EN UN SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

John Bacares y Mauricio Cruz
Universidad Pedagógica Nacional
Jebp77@gmail.com, macs333@gmail.com

Se presentan avances de una propuesta en la que se pretende incentivar procesos argumentativos en los estudiantes de ciclo IV de dos colegios distritales de Bogotá. Para ello, los estudiantes resuelven problemas en los que hacen uso de un programa de geometría dinámica. En los análisis se caracterizan los argumentos producidos según el tipo de garantías que utilizan los estudiantes.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En el segundo semestre de 2013 se hizo un diagnóstico inicial sobre cómo se llevaban a cabo las clases de geometría en los colegios distritales Cristóbal Colón y Montebello. En una encuesta realizada a docentes se encontró que ellos esperan que sus estudiantes sepan utilizar conocimientos geométricos al resolver problemas y tengan claras las propiedades geométricas de algunas figuras. Ninguno mencionó algo sobre favorecer, por medio de la geometría, procesos argumentativos, ni tampoco sobre promover en sus clases la construcción colectiva de conocimiento.

Además, a través de encuestas aplicadas a estudiantes, docentes y encargados de las salas de informática encontramos un panorama desalentador. Vimos que aunque en los colegios había herramientas tecnológicas y se hacía un uso parcial de estas en las clases de ciencias, lenguaje e informática, en el área de matemáticas su uso era nulo, especialmente en geometría.

Este diagnóstico sirvió como punto de partida de nuestro trabajo de grado en la Maestría de Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), programa que cursamos con el apoyo de la Secretaría de Educación Distrital. Gracias al vínculo que establecimos con los profesores del grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$), vimos pertinente implementar un proyecto que promueva cambios radicales en las clases de geometría. Buscamos fomentar un clima de argumentación y construcción social de conocimiento, con el apoyo de un programa de geometría dinámica,

Bacares, J. y Cruz, M. (2015). Argumentación de estudiantes del ciclo IV, apoyada en un software de geometría dinámica. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 85-92.

recurso informático con el que cuenta cada institución. Con el apoyo del grupo, revisamos fundamentos conceptuales y concretamos nuestra pregunta de investigación de la siguiente manera: ¿Cómo propiciar la actividad argumentativa de los estudiantes del ciclo IV, mediante el uso de un programa de geometría dinámica?

MARCO TEÓRICO

El marco teórico fundamenta los análisis con los cuales estudiamos dos componentes centrales del cambio en la clase de geometría para favorecer prácticas argumentativas con el apoyo de un programa de geometría dinámica: la actividad que llevan a cabo los estudiantes y las prácticas argumentativas en la clase. El primer componente lo enfocamos en lo que el grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ denomina “actividad demostrativa”. Para el segundo, nos basamos en los planteamientos de Krummheuer (1995) sobre la argumentación. La articulación de ambos componentes se favorece por medio de un uso particular de la geometría dinámica, que se constituye en aspecto central del cambio.

Actividad demostrativa como promotora del cambio en la clase

Antes de presentar lo que entendemos por actividad demostrativa vemos necesario exhibir nuestra concepción de demostración en el contexto de la educación matemática y los nexos que entrevemos de esta con la argumentación. Coincidimos con de Villiers (1990) y Mariotti (2006), quienes señalan que la demostración es un medio de descubrimiento, comunicación y explicación, evitando caer en la idea de verla solo como un medio de validación. La comprensión y el conocimiento son objetivos de la enseñanza de la demostración pues la validación de resultados no es el único objetivo de esta, sino la construcción significativa de conocimiento mediante la justificación.

De acuerdo con lo anterior consideramos, en consonancia con el grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$, que la demostración puede verse como un proceso (la actividad demostrativa) y como un producto de ese proceso (la demostración propiamente dicha) (Perry, Samper, Camargo y Molina 2013). En el proceso distinguimos acciones que llevan a la producción de una conjetura y la producción de argumentos para aceptarla, así como también las acciones de organización de las ideas que posteriormente tienen como meta una explicación o una justificación, fundamentadas en una argumentación que se vale de la exploración realizada o de un conjunto de hechos geométricos aceptados previamente. Denominamos

práctica argumentativa a la argumentación que se lleva a cabo durante la actividad demostrativa.

En el producto, distinguimos la explicación y la justificación como resultados de prácticas sociales que cumplen funciones de tipo comunicativo y constituyen una parte interactiva entre el profesor y los estudiantes. Con el término “explicación” nos referimos al conjunto de ideas mediante las cuales se dan a entender afirmaciones, dudas u objeciones, durante la resolución de un problema. Con el término “justificación” consideramos un conjunto explícito de ideas que dan certeza o validez a una conjetura, sustentado este en apreciaciones empíricas, o a partir de hechos matemáticos aceptados por la comunidad del aula, los cuales conforman un sistema teórico local. Este se entiende como una organización de hechos geométricos, en la que algunos de los hechos se toman como ciertos y los otros se justifican con los primeros. Entre los hechos están las definiciones.

La argumentación como promotora del cambio en el ambiente de la clase

La principal característica del cambio de ambiente sugerido en la propuesta que se documenta aquí es la presentación de situaciones en las que los estudiantes argumentan. Estamos comprometidos con un aprendizaje colectivo, por eso nos interesa trabajar la argumentación desde el punto de vista social. Los individuos se esfuerzan por explicar la intención de sus acciones, de forma verbal, durante la exploración, y como consecuencia intentan tomar la mejor elección entre un conjunto de opciones para formular una conjetura que luego justifican. Las relaciones que surgen de la interacción entre los individuos generan procesos sociales, que ligados al desarrollo de ideas matemáticas dan como resultado una construcción social de conocimiento.

Nuestro trabajo se basa en la interpretación que hacemos de las formulaciones de Krummheuer (2007) sobre la argumentación, quien, a su vez, se basa en los planteamientos de Toulmin (1969, citado en Krummheuer, 1995). Toulmin define un argumento como una estructura ternaria, compuesta por: unos datos, una aserción y la relación que se establece entre datos y aserción mediante una garantía; esta garantía proviene de un conjunto de hechos que las personas tienen en su bagaje de conocimiento; los datos son aquello que se tiene dado, en nuestro caso elementos iniciales de una construcción geométrica. La aserción es lo que se descubre y se conjetura.

Según Krummheuer (1995), Toulmin plantea dos clases de argumentos: sustancial y analítico. En el argumento sustancial, el individuo garantiza sus afirmaciones mediante lo dado y la exploración empírica. En el argumento analítico se realizan afirmaciones con base en el conocimiento aceptado por la comunidad. En nuestro caso, son hechos geométricos que se han organizado en un sistema teórico local. Lo que enriquece la argumentación, son las discusiones generadas por los individuos en la solución de problemas.

METODOLOGÍA

Nuestro trabajo de grado corresponde a un experimento de enseñanza. La metodología de los experimentos de enseñanza se ha originado con la intención de comprender el desarrollo de los conceptos en los estudiantes, en áreas particulares de la matemática (Simon, 2000). El proceso de enseñanza-aprendizaje se concibe como el espacio en el cual los protagonistas son los estudiantes, mientras que el profesor cumple una función de facilitador de los procesos de aprendizaje. Son los estudiantes quienes construyen el conocimiento a partir de sus experiencias y la reflexión sobre ellas. El experimento integra una enseñanza en la que se pone en juego una hipótesis sobre el aprendizaje de conceptos o procesos por parte de un grupo de estudiantes, en este caso de las prácticas argumentativas en geometría, mientras el equipo investigador rastrea y registra ese aprendizaje.

La metodología de investigación de un experimento de enseñanza tiene tres fases: (i) la planeación: se diseña una intervención de enseñanza, con base en la meta del aprendizaje, y se toman decisiones sobre los registros que se van a llevar a cabo al implementar el plan; (ii) la experimentación: se implementa la enseñanza y, después de cada sesión, se reúne el equipo investigador con el fin de determinar posibles modificaciones, según el curso de los acontecimientos; y (iii) el análisis retrospectivo: el equipo investigador, basándose en los datos recolectados, hace un estudio del aprendizaje de los estudiantes.

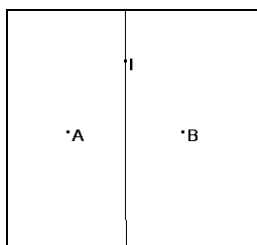
EJEMPLO DE ANÁLISIS

A continuación presentamos un ejemplo del tipo de análisis que estamos llevando a cabo.

Discusión sobre la equidistancia de los puntos A y B a la recta l

En el siguiente episodio de clase encontramos la interacción del profesor con el grupo de Gabriel y Kevin, cuando el profesor se acerca a ellos y les pide un reporte del proceso realizado como parte de la resolución de un problema. A partir de una configuración hecha previamente por el profesor –en la que usó la simetría axial para obtener el simétrico de un punto A con respecto a una recta l – los estudiantes tenían que *descubrir y explicar las características del comportamiento del punto B al mover la recta l* . En clases anteriores se había definido simetría axial y se había identificado la opción “simetría axial” de Cabri. En el episodio, Gabriel explica al profesor cómo se comporta el punto B cuando se mueve la recta l . El episodio comienza después de una exploración con la petición del profesor, ya mencionada.

- 1 Profesor: ¿Qué vieron con [respecto al punto] B ? [Figura 1] (Intenta arrastrar el punto B)



- 2 Kevin: B es un punto fijo.
- 3 Profesor: ¿Un punto fijo? ¿Seguro? ¿Y si mueve a A ?
- 4 Gabriel: Si hablamos solo de B ... o sea, es como fragmentando un poco todo el ejercicio. Si intentamos mirarlo solo por partes, B es un punto fijo, solo por partes. Ya cuando manejamos (arrastra A) con respecto a A , se mueve equidistante. (Arrastra el punto A alejándolo y acercándolo a la recta)
- 5 Profesor: ¿Con respecto a quién?
- 6 Gabriel: Con respecto al [punto] I [que pertenece a la recta; cree que el nombre de la recta l , determina un punto I en ella] [Figura 1].
- 7 Profesor: ¿ A [el punto nombrado con] la I ?, ¿solamente a I ?
- 8 Gabriel: A la mediatriz.
- 9 Kevin: Sí. A la mediatriz.
- 10 Profesor: ¿Y cuál es la mediatriz?

- 11 Kevin: La recta.
- 12 Profesor: ¿Cuál recta?
- 13 Kevin: La que hay ahí. En el punto I .
- 14 Gabriel: Sí. La que pasa por el punto I .
- 15 Profesor: ¡Ah! La que pasa por el punto I . Bueno, ¿y habrá otros puntos diferentes a I , en los que pase lo mismo?
- 16 Gabriel: Sí. Con respecto a todo se vuelve equidistante y solo... o sea, [I] solo es como un ejemplo de cualquier punto de la mediatriz. Si movemos I , en realidad, estaría volviéndose cualquier punto de la recta.
- 17 Kevin: Tienen la misma dista..., es el punto medio entre A y B .
- 18 Profesor: ¿Y cómo pueden comprobar eso?
- 19 Gabriel: Pues... uno, pues por lógica, pues al fin [y al cabo] una recta de una línea está hecha de puntos.
- 20 Profesor: Sí.
- 21 Gabriel: Y pues si ponemos un punto sobre la recta [dibuja otro punto sobre la recta], por más que movamos a A , es equidistante con respecto al punto.

Respecto al uso del programa de geometría dinámica, los estudiantes tienen suficiente manejo del programa Cabri para identificar el comportamiento del punto B como un punto que no se mueve libremente. Por eso Kevin menciona que “ B es un punto fijo” [2] y Gabriel aclara que el movimiento de B depende del movimiento de A . Para ello arrastra a A [4].

En este episodio, Gabriel usa Cabri para hacer ostensiva una idea abstracta. Ilustra que un punto de una recta que se usa para mostrar una propiedad de esta, representa a cualquier punto de la recta. Sus explicaciones en [15] y [20] están apoyadas en el uso del programa, pues arrastra el punto I sobre la recta, haciendo ver que es representativo de cualquier punto de ella.

Respecto a la actividad demostrativa los estudiantes detectan propiedades invariantes. Inicialmente, Gabriel reporta que los puntos A y B equidistan de un punto I , sin importar que A cambie de posición [4, 5]. En el momento en que el profesor intenta que generalicen la equidistancia de A y B hacia todos los puntos de la recta, Gabriel menciona que efectivamente equidista de todos [15, 20].

Adicionalmente, Gabriel realiza una justificación. Explica: “Con respecto a todo se vuelve equidistante y solo... o sea, $[I]$ solo es como un ejemplo de cualquier punto de la mediatriz” [16]. Suponemos que el estudiante recuerda la definición de mediatriz, trabajada en un problema previo e intenta explicar que todos los puntos de la mediatriz equidistan de los puntos fijos A y B .

En cuanto a la argumentación en este episodio, esta se lleva a cabo durante el proceso de justificación. Identificamos tres argumentos sustanciales, dos de Gabriel y uno Kevin. A partir de mencionar que A y B equidistan de I , punto de la recta [4, 5], Gabriel concluye que A y B equidistan de la mediatriz [8]. Como no se refiere al hecho geométrico de la definición de mediatriz no consideramos el argumento como analítico. Posteriormente, elabora un nuevo argumento, más completo que el anterior en el que usa los mismos datos como lo dado [6], pero concluye que A y B equidistan de cualquier punto de la recta l (“Con respecto a todo, se vuelve equidistante” [16]). El esquema de la primera argumentación de Gabriel se presenta en la Figura 2.

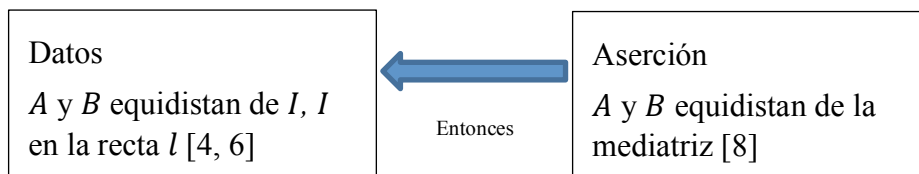


Figura 2. Primer argumento sustancial de Gabriel

Mientras tanto, Kevin elabora su propia explicación de validación, cuando dice, “[I] es el punto medio entre A y B ” [17]. Parece que está evocando la manera como se construyó la mediatriz. Por eso, consideramos que es un argumento sustancial (Figura 3).

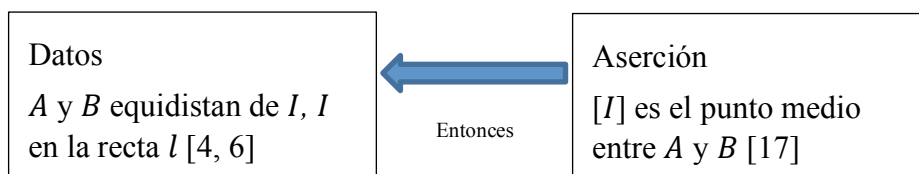


Figura 3. Argumento sustancial de Kevin

COMENTARIO FINAL

Se esperaba que, al momento de la resolución de ese problema, los estudiantes construyeran argumentos analíticos; se puede evidenciar que no siempre se logró este objetivo. Sin embargo, es claro que el programa de geometría diná-

mica incentiva la producción de argumentos sustanciales, mostrando en la clase de geometría un avance en la generación de una cultura de la argumentación. Posiblemente, como esperamos reportar al término de la investigación, debido a una gestión más decidida del profesor relacionada con promover la argumentación lograrán formular mayor cantidad de argumentos analíticos.

REFERENCIAS

- De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, EUA: Lawrence Erlbaum.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana. Un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates.

LA RELACIÓN DE EULER: UNA CONEXIÓN ENTRE LA GEOMETRÍA Y LA TOPOLOGÍA

Andrés Bello y Cristian Peña

Universidad Pedagógica Nacional

kmylobello@gmail.com, cristianp987@hotmail.com

En este breve artículo, se presenta una visión general del proceso que lleva al planteamiento de la relación de Euler para poliedros convexos y su importancia para el surgimiento de la topología. Se procurará hacer énfasis en los elementos geométricos utilizados en la relación de Euler, y en mostrar cómo a partir de ellos nace, años más tarde, una nueva manera de observar los objetos geométricos, idea central para el estudio de la topología.

PLANTEAMIENTO DE LA FÓRMULA

En 1750, el matemático Leonhard Euler propone una relación que se cumple para todo poliedro convexo: el número de vértices más el número de caras menos el número de aristas es igual a 2 ($V + C - A = 2$), un resultado que surge al intentar clasificar los poliedros, dejando de lado su parte métrica y pensando en ellos como objetos compuestos de otros elementos geométricos. La importancia de este producto matemático no va ligada solo a su contenido, puesto que esta es una ecuación que a simple vista no tiene nada fuera de lo usual; su trascendencia dentro del desarrollo de la matemática (en particular, en el surgimiento de la topología) se debe a las ideas centrales que se tuvieron en cuenta para llegar a su descubrimiento, ya que antes de Euler, solo en Descartes se entrevé la intención de desligarse de la parte métrica de algunos de los problemas geométricos, pero por falta de ejemplos y resultados ligados a esta nueva manera de estudiar matemáticas no se le da mucha importancia. Sin embargo, cosas como esta no impiden que en el siglo XVII, el pensar de una manera diferente a la usual en la geometría diera las primeras herramientas para el surgimiento de una nueva rama de las matemáticas, la topología.

VALIDACIÓN DE LA FÓRMULA

Demostrar la relación de Euler para poliedros convexos tomó alrededor de 40 años luego de que se la presentara en el documento *Elemental Doctrine*

Solidorum; sin embargo, antes de que se hallara una demostración formal, Euler presentó al mundo matemático una justificación de su relación, pero no se aceptó debido a inexactitudes en el paso a paso de la demostración.

La idea central de la justificación presentada por Euler se basa en:

A cualquier poliedro se le puede retirar un único vértice de manera algebraica y geométrica, haciendo un corte conveniente; de esta manera, si se quiere retirar un vértice A, se busca un plano tal que se elimine únicamente dicho vértice. Tomando como verdadera esta idea, si se repite el proceso de corte para cada uno de los poliedros resultantes, con una serie finita de cortes se puede llegar a tener como resultado una pirámide de base triangular, para la cual es fácil corroborar la relación para los poliedros convexos ya que se sabe que la relación de Euler se cumple para este tipo de poliedros.

Legendre logró demostrar la relación para poliedros convexos propuesta por Euler. Su demostración se basa en la transformación de cualquier poliedro convexo en la esfera, idea que se liga de alguna manera a la justificación de Euler.

LA FÓRMULA DE EULER Y EL SURGIMIENTO DE LA TOPOLOGÍA

Tiempo después Lhuillier y Hessel se preguntan si esta fórmula funciona para toda clase de poliedros, y muestran algunas excepciones. Clasificando los poliedros en diferentes clases (alrededor del siglo xvii) nace la topología y se da el mérito del surgimiento de la misma a dos trabajos, en particular: el problema de los puentes de Königsberg y la relación para poliedros convexos, ambos realizados por Leonhard Euler. No en vano estos trabajos dan surgimiento a la topología: de ellos se desprenden ideas centrales de esta nueva rama de la matemática. Ideas como las propiedades que se mantienen invariantes al transformar figuras por medio de pliegues, dilataciones, contracciones o deformaciones y el trabajo alejado de las métricas de un objeto matemático parten inicialmente de la relación de Euler; es por eso que esta fórmula termina siendo el primer invariante topológico conocido, y uno de los trabajos que sirve como cimiento para el desarrollo de la topología.

EL ELIPSÓGRAFO DE VAN SCHOOTEN: CONSIDERACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ELIPSE

Juan Beltrán

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
calicheud@yahoo.com.co

Este documento presenta consideraciones para la enseñanza de la cónica elipse, a partir de aspectos históricos, matemáticos y didácticos relativos a ella. Se centra la mirada en la importancia de las herramientas mecánicas para la enseñanza de las cónicas y su relación con argumentos demostrativos. Se proponen indicaciones generales de actividades para la enseñanza de la elipse.

Es necesario aclarar que este documento presenta algunas consideraciones expuestas en Beltrán (2014) y algunos avances en mi trabajo de grado para título de Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemática. Este documento se divide en dos secciones: la primera presenta consideraciones a los aspectos teóricos, incluyendo lo epistemológico y didáctico de las cónicas; la segunda sección se centra en actividades que se pueden realizar para su enseñanza, basadas en los trabajos de Boytchev (2011) y Beltrán (2014).

CONSIDERACIONES RELATIVAS A LOS ASPECTOS TEÓRICOS

Antes de proponer algunas indicaciones generales para las actividades de enseñanza de la cónica elipse es indispensable revisar algunos aspectos teóricos que pueden dar pautas para la enseñanza de este concepto matemático. En este documento se revisan tres aspectos teóricos importantes: matemáticos, históricos y didácticos.

Aspectos matemáticos

Diferentes libros de geometría analítica (e. g., Larson, Hostetler, Edwards y López, 1989; Lehmann, 1992/1974) muestran distintas formas de abordar el estudio de las cónicas. Larson et al. (1989) mencionan tres formas de introducir las cónicas. La primera se basa en la concepción griega de las cónicas como intersecciones de conos y planos, la segunda recurre a la ecuación general de segundo grado y la tercera forma (la que acogen estos autores) se basa en la

concepción de lugar geométrico, presentando, así, las condiciones que cumple cualquier punto del lugar geométrico y la fórmula canónica de cada cónica.

En términos de Larson et al. (1989), una elipse es el conjunto de todos los puntos (x, y) cuya suma de distancias a dos puntos fijos distintos (focos) es constante (Cuadro 1). La recta que une los focos corta la elipse en dos puntos llamados vértices. La cuerda que une los vértices es el eje mayor, y su punto medio es el centro de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor por el centro es el eje menor de la elipse. La forma canónica de la ecuación de una elipse con centro en (h, k) y ejes mayor y menor de longitudes $2a$ y $2b$, respectivamente, donde $a > b$ es:

$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$
Eje mayor horizontal	Eje mayor vertical

Cuadro 1. Expresión matemática actual de la elipse

Aspectos históricos

El porqué de la necesidad de considerar la historia tanto del proceso de evolución de las matemáticas como de la implementación de herramientas mecánicas para (re)construir y demostrar que la herramienta específica describe una determinada cónica, se evidencia a partir de lo que expone Bell (1985, p. 54): “Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas”. Además evidencia que “las herramientas son parte de la misma construcción de las matemáticas en muchos momentos”. Beltrán (2014) expresa entre sus conclusiones que es importante el uso de herramientas mecánicas en la construcción de las cónicas. Si se acepta que el uso de las herramientas (o artefactos mecánicos) puede ser provechoso para la enseñanza de las derivadas, es necesario pensar cómo incorporarlas en la actividad del aula para que los estudiantes lleguen a reconocer las propiedades de las cónicas y, así, mediante las adigualdades, aquellas se conviertan en recurso para la comprensión del saber relativo a la derivada sin involucrar la preconcepción del concepto de límite.

Ahora bien, considerando que es muy amplio aspirar a utilizar todo el espectro de herramientas mecánicas desarrolladas durante los siglos XVI y XVII (época donde se realiza la mayor creación de este tipo de herramientas), se enfatiza en

el artefacto realizado por Frans Van Schooten, un elipsógrafo, que permite mostrar de manera “sencilla” algunas de las propiedades de la curva elipse. Influyen en Van Schooten, para la creación de su artefacto mecánico, los textos de Apolonio, Arquímedes y Pappus, todos relacionados con las cónicas. Otro hecho que lo influye es que durante su formación matemática, entre los años 1635 y 1640, Van Schooten conoce a René Descartes, quien le envía algunos de sus documentos. Ruiz (2003) muestra que la relación entre Descartes y Van Schooten llegó a tal punto que Descartes le da a conocer su texto *Géometrie* antes de ser publicado, con el fin de que Van Schooten expusiera sus apreciaciones y realizara la traducción del documento al latín.

A continuación se describe el elipsógrafo de Van Schooten y, a partir de la matemática de la época del inventor, se demuestra que la curva que traza es una elipse, con lo cual se evidencia cómo Van Schooten acepta que ese instrumento realiza la curva *elipse*. Dado que la herramienta material no permite trazar de manera continua toda la curva, en este artículo se alude a una versión digital que simula el elipsógrafo de Van Schooten (Figura 1). El elipsógrafo está formado por dos barras rígidas en forma de cruz (representadas en color azul en la Figura 1) y dos barras móviles (representadas una, en color morado y la otra, en rojo y verde en la Figura 1). En la versión física las barras fijas tiene la forma de T inversa.

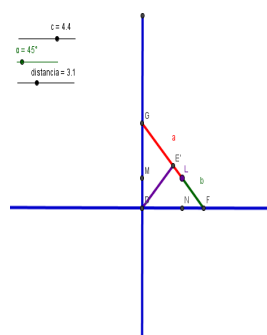


Figura 1. Representación de la versión digital que simula el elipsógrafo de Van Schooten

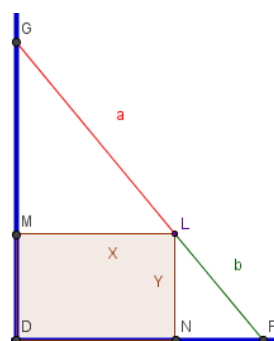


Figura 2. Acercamiento a los triángulos que simula el elipsógrafo de Van Schooten

Para dar una idea del funcionamiento del elipsógrafo, ha de saberse que el trazo de la curva depende del movimiento que se le imprima directamente al segmento de color morado, movimiento este del cual depende el movimiento del segmento de color rojo y verde; en ese proceso, el punto L que pertenece al segmento rojo y verde, describe la curva. A la curva descrita se le llama *curva mecánica*, ya que es a partir del movimiento simultáneo de dos líneas rectas como ella se genera. Para la época de Van Schooten, esta curva no se aceptaba

como una curva matemática, pues su aceptación implicaba contravenir la geometría euclidiana que no permite realizar curvas a partir de rectas. Sin embargo, era necesario demostrar que la curva descrita era una *elipse* y la demostración sería aceptada si usaba únicamente la matemática euclidiana.

La demostración se basa en la proporción de áreas de los triángulos GML y LNf (Figura 2). A continuación se expresa la demostración a partir de los datos conocidos presentes en el instrumento.

Datos conocidos: $GL = a$, $LF = b$, $\angle GLM \cong \angle LFN$, $\angle MGL \cong \angle NLF$. A partir de esto se puede determinar que los triángulos GLM y LNf son semejantes; por tanto, se tiene una proporción entre las medidas de sus lados. De esto se puede afirmar que:

$$\frac{DN^2}{GL^2} : \frac{NF^2}{LF^2}$$

El Teorema de Pitágoras permite mostrar que $NF^2 = LF^2 - LN^2$. Así, la proporción anterior queda como:

$$\frac{DN^2}{GL^2} : \frac{LF^2 - LN^2}{LF^2} \quad \frac{DN^2}{GL^2} : \frac{LF^2}{LF^2} - \frac{LN^2}{LF^2} \quad \frac{DN^2}{GL^2} : 1 - \frac{LN^2}{LF^2}$$

Usando Noción Común 2 de Euclides (*Libro I*) se puede decir que:

$$\frac{DN^2}{GL^2} + \frac{LN^2}{LF^2} : 1 - \frac{LN^2}{LF^2} + \frac{LN^2}{LF^2} \quad \frac{DN^2}{GL^2} + \frac{LN^2}{LF^2} : 1$$

Es decir, la suma entre dos razones da como resultado la unidad para todos los puntos L que describen la curva. Esto concuerda con la noción de elipse que se tenía en la época. Además, como Van Schooten tuvo acceso a los documentos de Descartes, se presenta la demostración analítica con el fin de mostrar que los mismos procedimientos usados llevan a la notación actual de la elipse.

$DN = x$	$DM = y$	$NF^2 = b^2 - y^2$	$GM^2 = a^2 - x^2$
----------	----------	--------------------	--------------------

Cuadro 2. Conversión de la notación a los términos actuales

Con los datos anteriores (Cuadro 2), se explica lo realizado, que coincide con la forma actual de hacer la demostración (Cuadro 3):

$\frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2 - y^2}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
---	---	---	---

Cuadro 3. Conversiones aplicadas a la demostración anterior

Aspectos didácticos

Desde el punto de vista didáctico, trabajos como los de Cortés y Soto (2012) muestran que el uso de instrumentos de creación de cónicas como el *anti-paralelogramo articulado de Van Schooten* y el *elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards* permite un acercamiento al concepto de elipse a partir de su reconstrucción. Da también una visión de la evolución del concepto, ya que se implementan diferentes herramientas para reconstruir diferentes tipos de curvas.

El aprendizaje de las secciones cónicas en el aula escolar presenta varias dificultades, errores y obstáculos cognitivos y didácticos. Referente a lo cognitivo se presenta el conflicto con el uso de simbología adecuada. Godino y Font (2003) mencionan que este tipo de dificultad se puede presentar al realizar yuxtaposiciones y operaciones entre términos desconocidos (uso de las variables x, y) y términos conocidos (términos h, k). Rico (1995) presenta varios tipos de errores de significado que tienen los estudiantes; menciona, en particular, los errores presentes en el pensamiento humano, entre los cuales están los errores inducidos por el lenguaje o la notación. Además Rico señala que estos errores (de significado) se presentan cuando los estudiantes ignoran el significado de los símbolos o conceptos con los que están trabajando.

Como lo menciona Boytchev (2011), existe la necesidad de mostrar a los estudiantes las cónicas como algo más que los diferentes tipos de cortes de un plano a un cono. Sería significativo que los estudiantes llegaran a interactuar con las cónicas desde diferentes puntos de vista, ya que esto les permitiría vislumbrar algunas de sus propiedades.

Además, experimentos tales como generar una elipse con la luz de una lámpara, dibujar una hipérbola utilizando un hilo de longitud fija, o construir un mecanismo de rodadura que genera una elipse pueden representar aportes considerables para que el estudiante logre observar la forma de las cónicas y diferenciarlas; sin embargo, no permiten realmente, como lo muestra

Boychev (2011) ofrecer explicaciones claras sobre las diferencias entre estas figuras, o la manera de calcular los focos de la elipse.

Boychev (2011), con relación al uso de artefactos mecánicos sostiene que existe un interés latente por usar este tipo de artefactos para la enseñanza de conceptos matemáticos. Existe una gran variedad de herramientas para la realización de representaciones de las cónicas. La Universidad de Módena y Reggio Emilia presenta en uno de sus sitios web¹ una gran variedad de estas herramientas, cada una con un simulador interactivo que permite ver su funcionamiento así como las medidas variables.

CONSIDERACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS

Para la enseñanza de las cónicas (y, en este caso, la elipse), pero no exclusivamente para dicho tema, se puede señalar que existen varias metodologías (e. g., ingeniería didáctica e investigación-acción) y estrategias. En este documento se presentan actividades generales para enseñar la elipse a través de la resolución de problemas matemáticos, considerando las posturas de Bohórquez y Sanjuán (2009).

Si bien no se presentan actividades puntuales, se toman y retoman algunas indicaciones para actividades de enseñanza de las cónicas. Para esto es necesario considerar lo que presenta Beltrán (2014) para la enseñanza del concepto de derivada con el uso de las cónicas. Esta idea está en consonancia con la de varios autores que proporcionan indicaciones generales para actividades con este fin. Entre estos autores se destaca Boychev (2011), quien propone actividades generales en las que el uso de herramientas, sean cotidianas o mecánicas, aportaría a la enseñanza de las cónicas, y el uso de alguna de estas permitiría a los estudiantes el pensar no solo en las cónicas como contenido matemático sino como un concepto vivo presente en aspectos de la vida tan sencillos como jugar con la luz y observar un vaso con agua.

Para la enseñanza de la derivada, Beltrán (2014) manifiesta la necesidad del trabajo con curvas cónicas, desde la construcción y el análisis de sus propiedades. Si bien el interés no está en la enseñanza de las cónicas, sino de la derivada desde una conceptualización de la recta tangente, se destaca la necesidad de conocer, realizar y analizar las curvas cónicas. Para ello, se usan

¹ http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=76&Itemid=153

ciertas herramientas mecánicas como el parabológrafo de Cavalieri y el elipsógrafo de Van Schooten. Crean también los artefactos, estudian las curvas y demuestran que cada curva obtenida efectivamente es la cónica que se pretendía obtener. A continuación, con base en Beltrán (2014) quien aporta una organización secuencial de las posibles actividades según las principales acciones para el uso de las cónicas, y en Boytchev (2011) quien sugiere actividades potenciales que tienen en cuenta las herramientas presentadas para la enseñanza de las cónicas, se propone la siguiente secuencia de actividades:

1	Introducción	Presentar a los estudiantes unas primeras aproximaciones a la forma de graficar funciones de diferentes tipos (lineales y cuadráticas). Presentar los objetos con los que se va a trabajar. Se espera que estos objetos sean de la vida cotidiana (e. g., vasos con agua, luces y sombras). Esto con la intención de que los estudiantes puedan determinar algunas relaciones entre los sucesos y las cónicas.
2	Trabajo con objetos cotidianos	Trabajar las herramientas de la vida cotidiana desde aspectos más centrados: se pueden incluir las características de las sombras según la posición de una fuente de luz o según la inclinación del vaso con agua. Se espera que puedan realizar caracterizaciones tanto en lenguaje informal como en lenguaje semiformal.
3	Construcción herramientas mecánicas	Una vez realizado el trabajo con herramientas cotidianas, se espera que los estudiantes hayan logrado unas primeras concepciones de las cónicas al haber construido las herramientas mecánicas que las producen (o simulaciones, según la población misma). También que los estudiantes puedan identificar similitudes entre lo observado con las herramientas mecánicas y los objetos cotidianos.
4	Trabajo con herramientas mecánicas	El construir las herramientas y observar las características tanto de las construcciones como de las curvas que se generan, se espera que le permita a los estudiantes observar las características de las cónicas vistas tanto en los objetos cotidianos como con las herramientas. Se espera que los estudiantes logren profundizar en el lenguaje para describir la elipse y hacer uso de este para determinar algunas propiedades que se observen de esta cónica.

CONCLUSIONES

Es de mencionar que la implementación de una herramienta específica de cualquier tipo afecta la interacción del estudiante con el saber específico que se pretende enseñar mediante su uso. Esto debido a que la interacción

privilegia algunas perspectivas mientras que invisibiliza otras. Boyer (1986) muestra que en ciertos momentos históricos, las interacciones con herramientas para solucionar un problema específico de las cónicas (y otros conceptos matemáticos) privilegiaron algunas interpretaciones de tales saberes. En este sentido, la implementación de las herramientas que quieren poner en juego, efectivamente pueden invisibilizar algunas características de la elipse o restringir la aplicación de estas características en contextos reales (e. g., la astronomía).

REFERENCIAS

- Bell, E. (1985). *Historia de la matemática* (M. Martínez Pérez, Tr.). México D.F., México: Fondo de Cultura Económica.
- Beltrán, J. (2014). *La noción de tangente que presenta Fermat, aportes a la enseñanza de la derivada* (tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Bohórquez, A. y Sanjuán, A. (2009). *Consideraciones de la resolución de problemas en la actualidad*. En G. García (Comp.), *Memorias Noveno Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 35-43). Valledupar, Colombia: Asocolme.
- Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Universidad Textos.
- Boychev, P. (2011). Virtual model of conic section. En A. Jimoyiannis (Ed.), *Research on e-Learning and ICT in Education* (pp. 267-281). New York, EUA: Springer.
- Cortés, J. y Soto, H. (2012). Uso de artefactos concretos en actividades de geometría analítica: una experiencia con la elipse. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 1(2), 159-193.
- Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. y López, J. (1989). *Cálculo y geometría analítica*. México D.F., México: McGraw-Hill.
- Lehmann, Ch. (1992/1974). *Geometría analítica* (2ª ed.). La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente.
- Ruiz, Á. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SIMETRÍA A TRAVÉS DEL DOBLADO DE PAPEL EN EL MARCO DE LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

América Cardona, Jhon Gómez y Zaida Santa

Universidad de Antioquia

amersamy2011@gmail.com, jedwar.gomez@gmail.com, zsanta@gmail.com

En este artículo se presenta, de manera general, una investigación cualitativa encaminada a propiciar la comprensión del concepto de simetría con el doblado de papel como estrategia didáctica, en un grupo de estudiantes del grado décimo de una institución educativa de Medellín (Colombia). Para lograr el propósito se realizaron una serie de actividades con doblado de papel, apoyadas en el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión. Dichas actividades hicieron parte de tres fases de ejecución. La información recogida en cada una de ellas se analizó a la luz de descriptores de desempeños, lo que hizo posible establecer los niveles de comprensión alcanzados por cada uno de los estudiantes.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad, la geometría se concibe como una de las ramas más complejas de las matemáticas, la cual requiere de un profundo análisis en la utilización y aprehensión de sus conceptos. Por estas razones se ha recurrido a la implementación de actividades lúdicas en la enseñanza de la geometría, buscando despertar la motivación de los estudiantes y amenizar el proceso formativo, y así contribuir a generar en los estudiantes una percepción más simple y cordial de la geometría. Lo anterior está de acuerdo con lo que García y López (2008) precisan:

[...] [E]l punto de partida para el aprendizaje de la Geometría es el entorno físico: en esta disciplina el uso de material concreto (sobre todo en los primeros grados de escolaridad) cobra particular importancia al constituirse en un primer acercamiento hacia los diferentes grados de abstracción que se espera que los alumnos alcancen. (p. 80)

Del mismo modo, en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998) se afirma que para el aprendizaje de la geometría se debe dar prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, actividad que le posibilite al alumno moverse, dibujar, construir y producir, para que

Cardona, A., Gómez, J. y Santa, Z. (2015). Comprensión del concepto de simetría a través del doblado de papel en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 103-110.

logre así una conceptualización o representación interna del conocimiento. En este sentido, el doblado de papel podría constituirse como una gran herramienta de enseñanza de la geometría en el aula, ya que permite la dinamización de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y además le brinda un rol activo y central al estudiante dentro de este proceso, despertando así su interés y disponibilidad hacia el conocimiento geométrico.

En ese sentido, Monsalve y Jaramillo (2003) argumentan que el doblado de papel, como actividad lúdica, proporciona un potencial cognoscitivo, además de ser de gran utilidad didáctica puesto que permite a los estudiantes acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos geométricos implícitos en dichas actividades. Del mismo modo, señalan que:

Cuando aplicamos el doblado de papel como herramienta alterna para la solución de problemas, es sorprendente el interés y el entusiasmo con que los estudiantes enfrentan la solución de ciertos ejercicios propuestos en los libros clásicos de la enseñanza del cálculo. (p. 11)

Así mismo Geretschlager (1995) precisa que la conexión entre la geometría y el origami está bien establecida; es por ello que educadores como el alemán Friedrich Froebel han sugerido el uso del origami como herramienta para la enseñanza de formas geométricas elementales. Además, se han desarrollado una serie de axiomas y definiciones que estructuran la geometría del doblado del papel. La simetría es un concepto geométrico que está presente en nuestro entorno y en diferentes ramas del conocimiento, e. g., biología, física, arte y matemáticas, en particular en el cálculo. Se usa para la elaboración de gráficos, estructuras, obras de artes; para la explicación de fenómenos naturales o para la resolución de problemas. En este sentido, Bohórquez, Boscán, Hernández, Salcedo y Morán (2009), sugieren:

Pero quizás el terreno más fértil para la simetría lo conseguimos de forma natural en la geometría. El solo término geometría nos lleva casi de inmediato al concepto de simetría, a imágenes simétricas, armónicas (p. 478)

Así mismo Weyl (1989) argumenta que la simetría es una forma o idea que tiene y ha tenido el hombre para tratar de comprender y crear orden, belleza y perfección. Por su parte, Wolf y Kuhn (1959/1952, p. 38) sostienen que:

En el mundo de la naturaleza habrá que concebir, por ejemplo, la forma simétrica de los cristales casi directamente en forma tipológica; en los seres vivientes, en cambio, la influencia modificatoria, especialmente de las condiciones de

crecimiento, cubre a menudo tan fuertemente las formas simétricas en las que están basadas, que estas sólo pueden ser evidenciadas después de profundos estudios.

Sin embargo, no obstante la importancia del concepto, se pudo evidenciar, mediante observaciones y cuestionarios realizados inicialmente a un grupo de estudiantes del grado décimo, las diferentes dificultades que presentan al abordar este concepto. Es a partir de las problemáticas sugeridas aquí como se hace pertinente sustentar este proyecto de investigación por medio del marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), puesto que como lo precisa Stone (1999a):

El marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) estructura la investigación para ayudar a los docentes a analizar, diseñar, poner en práctica y evaluar prácticas centradas en el desarrollo de comprensión de los alumnos. (p. 25)

Finalmente, la propuesta de investigación sobre la que se reporta en este artículo tenía como propósito responder la pregunta: ¿Cómo posibilitar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes del grado décimo, a partir del doblado de papel y en el marco de la EpC?

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Se planteó como objetivo general: Analizar la comprensión del concepto de simetría en los estudiantes de grado décimo, a partir del doblado de papel como estrategia didáctica, bajo el marco teórico de la EpC.

Los objetivos específicos se precisaron así:

- Proponer actividades prácticas a partir del doblado de papel, en una unidad curricular bajos los parámetros de la EpC, que permitan a los estudiantes comprender el concepto de simetría.
- Describir cómo los estudiantes pueden alcanzar los niveles referidos en la EpC, en la comprensión del concepto de simetría.

ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

Bajo el marco teórico que propone la EpC, la pregunta fundamental que surge en el planteamiento de una pedagogía de la comprensión, es sin lugar a duda:

¿qué es la comprensión? Perkins (1999) argumenta que “comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la capacidad de desempeño flexible con énfasis en la flexibilidad” (p. 70).

Elementos para la comprensión: Según Acevedo (2011), constituyen la pauta para la planificación de la enseñanza; no son lineales, cada uno de los elementos contribuye a la realización de actividades en el aula en cuanto permite la organización de los contenidos que se pretenden trabajar; además nos permite validarlos. De acuerdo con Stone (1999b), los elementos para la comprensión incluyen: los *tópicos generativos*, los cuales son preguntas e ideas que buscan despertar la atención de los estudiantes; están conformados por conceptos disciplinares y situaciones propias del contexto de los estudiantes; las *metas de comprensión*, que delimitan lo que se espera que los estudiantes comprendan; los *desempeños de comprensión*, en los cuales se concibe la comprensión como la capacidad de usar el conocimiento en diferentes contextos y situaciones de manera creativa y novedosa; tales desempeños se dividen en categorías progresivas (Fase de exploración, Fase de investigación guiada y Fase de proyecto final de síntesis); y *evaluación diagnóstica continua*, que permite reforzar y evaluar el aprendizaje del estudiante, además pretende que los estudiantes reflexionen sobre sus prácticas y el desarrollo de sus actividades.

Dimensiones de comprensión: De acuerdo con Acevedo (2011), son ideas generales necesarias para la comprensión, que pueden ser desarrolladas en cualquier disciplina. Al respecto, Boix y Gardner (1999) mencionan: el *contenido*, el cual evalúa el progreso del conocimiento intuitivo de un estudiante hacia el conocimiento académico; el *método*, el cual evalúa en los estudiantes la capacidad para utilizar métodos confiables, para reflexionar críticamente sobre algún conocimiento o afirmación que se le presente; los *propósitos*, que se refieren a la relación que establece el estudiante entre el conocimiento científico y la realidad social, lo cual permite determinar los tópicos o conocimientos necesarios y dignos de ser estudiados en el aula, y las formas de comunicación (e. g., visual, verbal y audible) mediante las cuales el estudiante da muestras de su comprensión.

Niveles de comprensión: Boix y Gardner (1999) afirman que los niveles para la comprensión permiten diferenciar los desempeños débiles de otros más avanzados en la comprensión de algún conocimiento; están divididos en:

ingenuo, desempeños que se basan en el conocimiento intuitivo, no se realizan reflexiones frente al conocimiento, a su construcción y a la forma en la que este se comunica; *novato*, en el que el conocimiento se constituye como un aprendizaje repetitivo, donde difícilmente se relacionan los conceptos con otras áreas del conocimiento o con su vida fuera del aula; *aprendiz*, en el que el estudiante comienza a usar y relacionar el conocimiento disciplinar con su cotidianidad; y *maestría* en el que el estudiante tiene la capacidad de utilizar su conocimiento para interpretar y actuar en su mundo y para reflexionar sobre el para qué y por qué se construye.

METODOLOGÍA

Apoyados en los argumentos de Hernández, Fernández y Baptista (2010), se establece que el proyecto es una investigación cualitativa, puesto que se hizo necesario estudiar, observar y analizar las prácticas existentes, utilizar diferentes instrumentos para la recolección de la información; además, no se pretendía generar teoría, sino, por el contrario, refinar y construir hipótesis. El diseño de investigación elegido para obtener la información, fue el estudio de casos, puesto que como lo refiere Stake (1998) permite abarcar la complejidad en un caso particular, con el propósito de llegar a comprender, mediante su estudio, su comportamiento en circunstancias importantes. En la investigación participaron cuatro estudiantes de estrato socioeconómico 1 y 2, que cursaban grado décimo en una institución educativa de Medellín. Además de tener dificultades en la comprensión del concepto, ellos presentaron inconvenientes en la utilización del doblado de papel.

La ruta metodológica se dividió en tres partes, de acuerdo a las fases señaladas anteriormente. En la fase de exploración se aplicó a los estudiantes un cuestionario sobre el concepto de simetría; además, se realizaron rectas perpendiculares, paralelas y construcción de la mediatriz con doblado de papel; estos instrumentos se aplicaron a todos los estudiantes de grado décimo, con el fin de seleccionar de ese grupo, cuatro estudiantes que tuvieran problemas relacionados con la comprensión del concepto de simetría y la utilización del doblado de papel. En la fase de investigación guiada se realizaron ejes de simetría, translaciones y construcciones de figuras planas y tridimensionales con doblado de papel, además se trabajaron la simetría axial y central a partir de las figuras. En la fase de proyecto final de síntesis se expusieron los diferentes trabajos realizados por los participantes en la feria de la ciencia institucional, con el objetivo de que ellos comunicaran a los

asistentes lo comprendido con relación a la simetría, a partir de todo el proceso.

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

El proceso para realizar el análisis de la información consistió en hacer: un relato de las diferentes observaciones realizadas en el proceso investigativo; la transcripción de los diferentes videos registrados en algunas actividades; la transcripción o el registro de los cuestionarios realizados por los estudiantes y por sus familiares; la codificación, categorización y tematización de los diferentes datos obtenidos, con el propósito de hacer una comparación de la información con las tablas de descriptores y, así, evidenciar los niveles de comprensión, referidos en el marco teórico EpC, alcanzados por cada uno de los participantes.

A partir de las actividades realizadas con los participantes se fueron construyendo unos descriptores de desempeños, que se fueron refinando con la información obtenida y a través del análisis de la misma. Estos desempeños, a su vez, junto con las actividades permitieron la creación de una unidad curricular basada en el marco teórico de Enseñanza para la Comprensión, la cual cuenta con un tópico generativo, metas de comprensión, actividades y desempeños que se dividen en las tres fases mencionadas anteriormente en la ruta metodológica; además, considera un método de evaluación diagnóstica continua para realizar en todas las actividades trabajadas.

CONCLUSIONES

Con la realización del proyecto de investigación se pudo evidenciar la importancia del doblado de papel en la enseñanza de la simetría, puesto que esta estrategia permitió facilitar la enseñanza del concepto y dinamizó los diferentes procesos de aprendizaje en los estudiantes. Además, permitió que los participantes establecieran relaciones entre el concepto geométrico y su contexto por medio de las figuras realizadas, las cuales representaban objetos o seres de la naturaleza conocidos. Por otra parte, se lograron alcanzar diferentes desempeños de comprensión en cada uno de los participantes, lo que posibilitó establecer los niveles de comprensión logrados por ellos. Se hizo evidente también un considerable progreso en la comprensión del concepto de simetría.

Los diferentes logros en la comprensión del concepto de simetría, alcanzados por medio de las actividades realizadas y planificadas de acuerdo a los elementos para la comprensión, abren las puertas para el diseño de otras actividades que puedan ser utilizadas a favor de la comprensión de otros conceptos geométricos. El desarrollo del proyecto permitió reconocer la importancia de utilizar estrategias didácticas; en particular, el doblado de papel para la enseñanza de la geometría. Además, permitió establecer la necesidad de seguir reflexionando respecto a las diferentes metodologías que se pueden construir para establecer un diálogo entre los estudiantes y el conocimiento geométrico, para tratar de solventar todas esas dificultades que se presentan en el aprendizaje y la enseñanza de esta rama de las matemáticas.

REFERENCIAS

- Acevedo, D. (2011). *Comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes de décimo grado* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Bohórquez, H., Boscán, L., Hernández, A., Salcedo, S. y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *Revista Venezolana de Educación, Educere*, 13(45), 477-489.
- Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La Enseñanza para la Comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215-256). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa*. México D.F., México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Tomado de: <http://www.oei.es/pdf2/ensenanza-geometria-mexico.pdf>
- Geretschlager, R. (1995). Euclidean constructions and the geometry of origami. *Mathematics Magazine*, 68(5), 357-371.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México D.F., México: McGraw Hill.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Delfín Ltda.
- Monsalve, O. y Jaramillo, C. (2003). El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Educación y Pedagogía*, 15(35), 11-25.
- Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La Enseñanza para la Comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69-95). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

- Stone, M. (1999a). La importancia de la comprensión. En M. Stone (Comp.), *La Enseñanza para la Comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 21-31). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Stone, M. (1999b). ¿Qué es la enseñanza para la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La Enseñanza para la Comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 95-126). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Weyl, H. (1989). *Symmetry*. Princeton, EUA: Princeton University.
- Wolf, K. y Kuhn, D. (1959/1952). *Forma y simetría. Una sistemática de los cuerpos simétricos* (R. Leisse de Mertig y M. Gradowczyk, Trs.). Buenos Aires, Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

CONSIDERACIONES SOBRE CUADRADOS MÁGICOS

Luis Domínguez e Irwin Medina

Instituto Pedagógico Nacional

gabo1658@yahoo.es, irwinmedina@gmail.com

El pasatiempo de los cuadrados mágicos se puede emplear en el aula como objeto de estudio, con el propósito de acercar a los estudiantes al estudio de conceptos aritméticos, algebraicos, geométricos y otros. Al no mantener ajenos estos conceptos al contexto escolar y de diversión de los estudiantes, se puede propiciar el quehacer matemático en el salón de clases. A continuación se exponen algunas consideraciones sobre cuadrados mágicos que pueden llegar a convertirse en ideas para el desarrollo de las clases de geometría a nivel escolar.

PRELIMINARES

Una matriz A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \cdot n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas, escritos entre corchetes como sigue a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices indican la fila y la columna de localización en la matriz de cada número real; a los a_{11} , a_{12} , ..., a_{mn} se les llama elementos o entradas de la matriz. (Si $m = n$, la matriz recibe el nombre de cuadrada). (Jiménez, 2004, p. 2)

Una sucesión aritmética (B_n) es una sucesión de la forma: $b, (b + c), (b + 2c), (b + 3c), (b + 4c), \dots$ es decir,

$$b_1 = b, b_2 = b + c, b_3 = b + 2c, \dots, b_h = b + (h - 1)c, \dots, b_n = b + (n - 1)c$$

El número $b \in \mathbb{Z}$ corresponde al primer término de la sucesión; $c \in \mathbb{Z}$ y es la diferencia común de la sucesión (Stewart, Redlin y Watson, 2012, p. 795).

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Muchos de los estudios sobre cuadrados mágicos se enfocan en la búsqueda de métodos de construcción de los mismos. Uno de los más relevantes, según lo manifiesta Bulajich (2009), lo publicó el matemático, escritor, poeta y diplomático francés Simón de la Loubère en 1693; este método se conoce como siamés o hindú y se utiliza en la construcción de cuadrados mágicos de orden impar, es decir, cuadrados mágicos de lado impar. A continuación, se hará una descripción detallada del método.

Cuadrado mágico

Un cuadrado mágico construido según el método hindú es una matriz de tamaño $n \times n$, con $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, donde sus entradas $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn})$ corresponden a los n^2 términos de una sucesión aritmética (B_n) , que cumple las siguientes condiciones:

- (i) $a_{1(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1 .
- (ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)(j+1)}$, con las siguientes restricciones:
 - a) Si $i - 1 = 0$, y $j + 1 \neq 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{(2k+1)(j+1)}$.
 - b) Si $i - 1 \neq 0$, y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)1}$.
 - c) Si $i - 1 = 0$, y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{2(2k+1)}$.
 - d) Si en $a_{(i-1)(j+1)}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)j}$.

Como consecuencia de lo anterior se cumple que la suma de las entradas pertenecientes a cada fila es igual a la suma de las entradas pertenecientes a cada columna e igual a la suma de las entradas pertenecientes a cada diagonal.

Como ejemplo del método de construcción se presenta el siguiente cuadrado mágico de lado 5, es decir, una matriz 5×5 , cuyas entradas son los términos de la sucesión: 15, 13, 11, 9, ..., -31, -33 (sucesión cuyo primer término es 15 y de diferencia común -2); así, $k = 2$, $b = 15$, $c = -2$.

- 1) El número 15 corresponde a la entrada a_{13} , de acuerdo a la condición (i).
- 2) El siguiente término de la sucesión, es decir el número 13, corresponde a la entrada a_{54} , de acuerdo a la restricción a) de la condición (ii).

- 3) El término 11 corresponde a la entrada a_{45} de acuerdo a la condición (ii) y el siguiente a este, es decir el número 9 se asigna a a_{31} , según se indica en la restricción b) de la condición (ii).
- 4) El término 7 corresponde a la entrada a_{22} de acuerdo a la condición (ii) y el siguiente término, es decir, el número 5 se asigna a a_{32} , según se indica en la restricción d) de la condición (ii).
- 5) Los términos de la sucesión 3 a -13 se localizan en forma análoga a los pasos descritos anteriormente. El número -15 corresponde a la entrada a_{25} , según se indica en la restricción c) de la condición (ii).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 15 & 1 & -13 \\ a_{21} & 7 & 3 & -11 & -15 \\ 9 & 5 & -9 & a_{34} & a_{35} \\ -3 & -7 & a_{43} & a_{44} & 11 \\ -5 & a_{52} & a_{53} & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

- 6) Finalmente, se localizan los términos restantes de la sucesión de acuerdo a las anteriores condiciones, dando como resultado el siguiente cuadrado mágico:

$$\begin{bmatrix} -17 & -31 & 15 & 1 & -13 \\ -29 & 7 & 3 & -11 & -15 \\ 9 & 5 & -9 & -23 & -27 \\ -3 & -7 & -21 & -25 & 11 \\ -5 & -19 & -33 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la suma de las entradas de cada una de las filas es igual a la suma de cada una de las columnas y de cada una de las diagonales; siendo este valor de -45 .

CONSIDERACIONES

De la construcción a la simetría axial

El método de construcción abordado no es el único para la construcción de cuadrados mágicos de lado impar. Al reflejar el cuadrado respecto a un eje de simetría se encuentran variaciones del método antes descrito.

Primera variación del método

Al reflejar el cuadrado mágico obtenido con la construcción del método descrito al inicio de este documento, con $k = 2$, $b = 1$, $c = 1$, respecto a un eje vertical, se obtiene una primera variación como se registra en la Figura 1.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

15	8	1	24	17
16	14	7	5	23
22	20	13	6	4
3	21	19	12	10
9	2	25	18	11

Figura 1. Reflexión respecto a un eje vertical

Se puede observar que el arreglo matricial resultante de la reflexión conserva las condiciones que lo hacen ser cuadrado mágico, sin embargo, unos cambios pueden evidenciarse en la manera en que debe ser construido, estos son:

- (i) $a_{1(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1 .
- (ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)(j-1)}$, con las siguientes restricciones:
 - a) Si $i - 1 = 0$, y $j - 1 \neq 0$, entonces $b_{h+1} = a_{(2k+1)(j-1)}$.
 - b) Si $i - 1 \neq 0$, y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)(2k+1)}$.
 - c) Si $i - 1 = 0$, y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{21}$.
 - d) Si en $a_{(i-1)(j-1)}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)j}$.

Segunda variación del método

La segunda variación que será considerada es la reflexión respecto a un eje horizontal del cuadrado obtenido en la primera reflexión (ver Figura 2).

En este caso, la construcción se modifica así:

- (i) $a_{(2k+1)(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1 .
- (ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)(j-1)}$, con las siguientes restricciones:
 - a) Si $i + 1 = 2k + 2$, y $j - 1 \neq 0$, entonces $b_{h+1} = a_{1(j-1)}$.
 - b) Si $i + 1 \neq 2k + 2$, y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)(2k+1)}$.
 - c) Si $i + 1 = 2k + 2$, y $j - 1 = 0$, entonces $b_{h+1} = a_{2k,1}$.
 - d) Si en $a_{(i+1)(j-1)}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)j}$.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

15	8	1	24	17
16	14	7	5	23
22	20	13	6	4
3	21	19	12	10
9	2	25	18	11

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

Figura 2. Reflexión respecto a un eje horizontal

Tercera variación del método

El tercer movimiento se realiza haciendo reflexión del cuadrado obtenido en la segunda variación (ver Figura 3), respecto a un eje vertical; en este caso el método de construcción se modifica de la siguiente manera:

- (i) $a_{(2k+1)(k+1)}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir, b_1 .
- (ii) Si $b_h = a_{ij}$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)(j+1)}$, con las siguientes restricciones:
 - a) Si $i + 1 = 2k + 2$, y $j + 1 \neq 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{1(j+1)}$.
 - b) Si $i + 1 \neq 2k + 2$, y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{(i+1)1}$.
 - c) Si $i + 1 = 2k + 2$, y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{2k(2k+1)}$.
 - d) Si en $a_{(i+1)(j+1)}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{(i-1)j}$.

17	24	1	8	15		15	8	1	24	17
23	5	7	14	16		16	14	7	5	23
4	6	13	20	22		22	20	13	6	4
10	12	19	21	3		3	21	19	12	10
11	18	25	2	9		9	2	25	18	11

11	18	25	2	9		9	2	25	18	11
10	12	19	21	3		3	21	19	12	10
4	6	13	20	22		22	20	13	6	4
23	5	7	14	16		16	14	7	5	23
17	24	1	8	15		15	8	1	24	17

Figura 3. Reflexión vertical del segundo movimiento¹

De la construcción del cuadrado mágico a otra representación

Un cuadrado mágico de $n \times n$, con $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, resulta ser la disposición conveniente de n^2 términos de una sucesión aritmética b_m , sin embargo, no es la única manera de presentar esta sucesión. A continuación, se presenta (ver Figura 4) una representación alterna de la sucesión de términos que componen el cuadrado mágico normal de orden cinco (ver Figura 1).

Esta representación se construye haciendo uso de los elementos de la sucesión y del cuadrado de la siguiente manera:

- En la primera fila se sitúan los términos b_m de la sucesión,
- La columna del lado izquierdo representa los números de cada una de las columnas del cuadrado, para este caso cinco números. La primera columna (C_n), corresponde a los $C_n = k + n(\text{mod } 2k + 1)$.

¹ Este movimiento es similar a reflejar el cuadrado mágico original sobre el eje horizontal.

- Los símbolos x marcados en cada fila representan los números que se encuentran en cada columna del cuadrado mágico, en el ejemplo, en la columna 5 del cuadrado se encuentran los números 3, 9, 15, 16, 22.

$b_m \backslash C_n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$C_1 = 3$	x						x						x						x						x
$C_2 = 4$		x						x						x						x		x			
$C_3 = 5$			x						x						x	x							x		
$C_4 = 1$				x						x		x				x								x	
$C_5 = 2$					x	x							x				x								x

Figura 4. Representación del cuadrado mágico de orden cinco

CONCLUSIONES

El estudio de los cuadrados mágicos de orden impar y su construcción por el método hindú se podría abordar en la escuela, haciendo uso de un lenguaje menos formal. A continuación se presenta una propuesta. La descripción de la construcción del método hindú puede ser:

- El primer número se ubica en la mitad de la primera fila.
- El número siguiente se ubica en la celda ubicada arriba a la derecha, teniendo en cuenta las siguientes condiciones:
 - Si el número se sale del cuadrado mágico por las filas, entonces el número se ubicará en la última fila avanzando una columna.
 - Si el número se sale del cuadrado mágico por las columnas, entonces el número se ubicará en la siguiente fila y primera columna.
 - Si el número se sale tanto por las filas como por las columnas, entonces el número se ubicará en la siguiente fila y misma columna.
 - Si la casilla en la que el número se ubicará se encuentra ocupada, entonces el número se ubicará en la siguiente fila conservando la columna.

En el Instituto Pedagógico Nacional se proponen espacios de orientación llamados *talleres* en los que participan estudiantes del grado sexto a noveno. En uno de estos espacios se presentaron algunos cuadrados mágicos

construidos mediante el método hindú. Se les pidió, entre otras cosas, que encontraran una manera general de construir un cuadrado mágico de lado impar. Luego de discutir en clase algunos de los resultados hallados por los estudiantes, se obtuvieron pasos similares a los descritos en la primera conclusión, sin embargo, por “economía” los discentes describen la construcción realizada como “diagonal derecha hacia arriba o abajo”.

Teniendo en cuenta el lenguaje “económico” de los estudiantes, la descripción de la construcción de los cuadrados mágicos al ser reflejados sería: Primera variación: “diagonal izquierda hacia arriba o abajo”. Segunda variación: “diagonal izquierda hacia abajo o arriba”. Tercera variación: “diagonal derecha hacia abajo o arriba”.

El método de construcción hindú y las variaciones estudiadas pueden ser consideradas como operaciones definidas en el conjunto de los cuadrados mágicos. Es natural, entonces, preguntarnos por las propiedades que cumpliría una estructura algebraica así definida.

En la representación alterna descrita en este documento es posible encontrar regularidades relacionadas con la ubicación y cantidad de marcas por fila. Regularidades que podrían resultar útiles para abordar procesos de generalización, y para estudiar sucesiones en la educación básica secundaria.

Reconociendo los patrones encontrados en la representación alterna es posible obtener una descripción distinta del método hindú.

Por la experiencia obtenida en el espacio de taller desarrollado en el Instituto Pedagógico Nacional, hemos podido mostrar que el estudio de objetos matemáticos no habituales en la escuela, como los cuadrados mágicos, resulta interesante a los estudiantes, lo que los mantiene motivados y permite su acercamiento al quehacer matemático en el aula.

REFERENCIAS

- Bulajich, R. (2009, septiembre 7). Construcción de cuadrados mágicos (usando el método de Loubère). *La Unión de Morelos*, pp. 34-35.
- Jiménez, J. (2004). *Notas de clase. Álgebra Lineal II (con aplicaciones en estadística)*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (sexta edición). México D.F., México: Editorial Cengage.

COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE PERÍMETRO Y ÁREA Y LA INDEPENDENCIA DE SUS MEDIDAS, EN EL CONTEXTO DE LA AGRICULTURA DEL CAFÉ

David González, Zaida Santa y René Londoño

Secretaría de Educación de Antioquia, Universidad de Antioquia,

Secretaría de Educación de Medellín

jdavidgonzalezm@gmail.com, zsanta@gmail.com, renelondo@gmail.com

La investigación aquí presentada se orientó a caracterizar la comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas en el contexto de la agricultura del café, en tres estudiantes del grado 5° de una institución educativa en el suroeste antioqueño. El planteamiento del problema presenta la historicidad y vigencia de los conceptos, las dificultades de comprensión y el contexto como insumo de aprendizaje. El marco conceptual expone los apartados que se utilizaron en mayor medida para la investigación: definición, elementos, dimensiones y niveles. La metodología aborda dos asuntos: el paradigma que dio el carácter humanista y naturalista a la investigación, y el método que posibilitó realizar la descripción de la comprensión de cada uno de los participantes. Finalmente, se presentan algunas conclusiones.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se presentan la historicidad de los conceptos objeto de estudio de la investigación realizada, las dificultades de comprensión, la contextualización del aprendizaje y el planteamiento del problema.

El área y el perímetro en la historia de la geometría

Diversas culturas (e. g., babilónica, egipcia, sumeria) resolvieron problemas concernientes al área de polígonos, a la superficie contenida en una circunferencia y a las relaciones que pueden establecerse con las áreas contenidas tanto por las curvas como por los polígonos; para ello, utilizaban técnicas de trazo y fórmulas que se encuentran en documentos históricos como papiros y tablas de arcilla (Cortés, 2012).

Posteriormente, con el surgimiento de nuevos retos, tanto prácticos como deductivos, se llegó a lo que Larson y Hostetler (1990/1986) denominan “El problema de las áreas” (p. 113), que consiste en hallar el área contenida en una

González, D., Santa, Z. y Londoño, R. (2015). Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 119-126.

curva o la longitud de la línea que la define. Otros autores, como Fandiño y D'Amore (2009), aseguran que fue de gran importancia la relación de la longitud de la circunferencia con el área en ella contenida. Este asunto interesó a personalidades como Arquímedes, quien lo abordó usando el método exhaustivo (Parra, 2009); posteriormente, este método se perfeccionó con el paso al límite y la noción de infinito, lo que llevó a la aparición del cálculo (González, 2014).

Dificultades en la comprensión de los conceptos de perímetro y área y de la independencia de sus medidas

La experiencia como docente de educación básica de quien fuera el investigador del estudio sobre el que se reporta en este artículo, y el rastreo bibliográfico de diversas fuentes nos permitieron identificar algunas problemáticas como la reducción del área a la aplicación de una fórmula o la falsa dependencia de aquella con relación al perímetro. Al respecto, Corberán (1996, p. 10) señala:

Esta “falsa” relación entre el área y el perímetro, que se ha constatado que está muy arraigada en los alumnos, pone de manifiesto que éstos piensan en el área y en el perímetro como en dos propiedades de la superficie íntimamente ligadas [...] Se ha constatado que para una mayoría de alumnos de primaria el área se reduce a la expresión “longitud x anchura” [...] Este tipo de enseñanza conduce a los alumnos ha [sic] desarrollar una pobre concepción numérica del área, asociando ésta a una fórmula de cálculo. Esta extrema pobreza de su instrucción contrasta con su rico contexto en la naturaleza, la cultura y la sociedad.

Con relación a esto mismo, Fandiño y D'Amore (2009, pp. 85-86) sostienen:

... la literatura de investigación (y también la historia y la leyenda) han demostrado ampliamente que un gran número de estudiantes de todas las edades están convencidos de que existe una relación de estrecha dependencia entre estos dos conceptos sobre el plano relacional, del tipo: Si A y B son dos figuras planas, entonces: si (perímetro de A > perímetro de B) entonces (área de A > área de B); idem con <; idem con = (por lo cual: dos figuras iso-perimétricas son necesariamente equi-extensas). Y viceversa cambiando el orden “perímetro-área” con “área-perímetro”.

Otra situación que refuerza el conflicto en la comprensión de ambos conceptos y su unidad de medida, es a la que González (2014, p. 39, citando a Chamorro et al., 2008) se refiere como “dificultad en el proceso de decantación entre longitud y superficie”.

Contextualización del aprendizaje

En la educación matemática, una de las formas de entender el contexto está asociada a los ambientes sociales que favorecen el aprendizaje y la comprensión de conceptos; en este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (Colombia) (1998) lo explica de la siguiente forma:

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del ambiente social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. (p. 36)

Teniendo presente lo anterior, y que las familias del corregimiento¹ en el cual se llevó a cabo la investigación obtienen el sustento de las acciones inherentes a la comercialización del café (la siembra del café es la principal actividad de la región), se tomó la decisión de indagar si el contexto agrícola es un insumo útil para la comprensión de conceptos geométricos.

Planteamiento del problema

En González (2014), se encuentra una alusión a lo que deben ser el aprendizaje de las matemáticas y la comprensión de los conceptos que en ella se estudien. Al respecto, afirma que:

El aprendizaje de las matemáticas tiene que ir más allá de la aplicación “en serie” de algoritmos que despejan X , expresan el cuadrado de un binomio o el grado de rotación de una figura, establecen semejanzas entre triángulos, calculan el área o estiman el perímetro de figuras planas. (p. 77)

Santa, Londoño y González (2013), respecto a la investigación aquí reportada y en pro de hacer frente a las dificultades en la comprensión, se propusieron:

[...] enfocar esfuerzos para lograr que los estudiantes avancen en la comprensión de los conceptos objeto de estudio, utilicen lo aprendido en diferentes situaciones y lo expresen correctamente. (p. 65)

¹ Centro poblado, de zona rural, que no cuenta con recursos propios ni de la Nación, por lo cual depende administrativamente del municipio al que pertenece.

Lo anterior condujo a adoptar un marco teórico cuyo foco de atención fuera la comprensión y que, además, orientara la manera de caracterizarla o analizarla.

La problemática descrita llevó a formular la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo comprenden los estudiantes del grado 5° de la I. E. Santa Rita los conceptos de perímetro y área, y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café, según el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión? (González, 2014, p. 78)

Los elementos y herramientas de investigación utilizados para responder la pregunta se exponen a continuación.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL: ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

El marco conceptual que se adoptó presenta una definición de comprensión, establece unas dimensiones que permiten describirla y niveles que posibilitan caracterizar el progreso en la misma. Además, proporciona elementos que orientan la planeación curricular enfocada en la comprensión.

Según Perkins (1999), la comprensión tiene que ver con la capacidad de desenvolverse con flexibilidad y eficiencia a partir de lo que se sabe, de usar el conocimiento en diferentes contextos y escenarios y, además, de expresarse con fluidez y coherencia disciplinar. La teoría de la Enseñanza para la Comprensión postula elementos para guiar la planeación curricular; según Stone (1999), estos son:

Tópicos generativos: buscan alinear los aspectos centrales de la disciplina con los intereses de los estudiantes y las intencionalidades del docente.

Metas de comprensión: definen y especifican aquello que se espera que los estudiantes comprendan.

Desempeños de comprensión: dado que la comprensión no se cuantifica sino que se observa o aprecia, el marco sugiere tener desempeños claramente establecidos con los que pueda caracterizarse.

Hilo conductor: durante la implementación de la planeación pueden aparecer nuevos intereses que desviarían la atención de lo estipulado en el tópico

generativo y las metas de comprensión; la función del hilo conductor es mantener la estructura de la unidad curricular.

La teoría de la Enseñanza para la Comprensión propone cuatro dimensiones desde las que se puede evaluar la comprensión. La que se ocupa de los *métodos* examina si los estudiantes usan o no de manera coherente los procedimientos disciplinares; la de *contenido*, evalúa si los conceptos o argumentos son claramente relacionados y si las creencias intuitivas han sido satisfactoriamente transformadas; la de *praxis* se centra en observar el grado de conciencia en el uso del conocimiento y de las implicaciones que conlleva hacerlo; por último, la de *formas de comunicación* se ocupa de evidenciar cómo se presenta el conocimiento, si se utilizan diferentes medios y se hace con soltura, sin perder exactitud y rigor (Boix y Gardner, 1999).

Como ya se dijo, para determinar el grado y el progreso de la comprensión se establecen unos niveles de comprensión. Presentados en complejidad creciente son: nivel de *novato*, en este se encuentran quienes no logran establecer relación entre el saber cultural y el académico o en quienes las creencias intuitivas prevalecen; nivel de *ingenuo*, en este se catalogan aquellos que establecen mínimas relaciones entre lo aprendido de una disciplina y sus saberes previos, además se evidencia escepticismo hacia sus creencias iniciales; nivel de *aprendiz*, los desempeños en esta escala de la comprensión se caracterizan porque las relaciones entre el saber de una ciencia y el cultural son coherentemente comparados y se establecen relaciones lógicas, además, el nuevo conocimiento se somete a análisis con rigor y especificidad; por último se tiene el nivel de *maestría*, en este se encuentran quienes logran redes de conocimiento entre diferentes ramas o saberes específicos, usan los métodos disciplinares adecuados y sus expresiones denotan dominio tanto del saber académico o científico como del público hacia el cual se dirigen.

METODOLOGÍA

A continuación se presentan el paradigma, el método y el tratamiento de la información que se utilizaron para la investigación.

La investigación estuvo orientada hacia el análisis de la comprensión de los participantes, para llegar a responder el interrogante planteado sobre cómo comprenden ellos en un contexto sociocultural específico. Así que, el investigador tuvo que adentrarse en el contexto para entenderlo; esto, en palabras de

Vasilachis (2006), determina el carácter naturalista del estudio. Puesto que la información recopilada no se utilizó para corroborar juicios (inductiva), que los participantes y su contexto se consideraron como unidad (holística) y, por tanto, humanista (Taylor y Bogdan, 1987), y que la interacción entre el investigador y la unidad contexto-participantes fue una “realidad epistémica” (Sandoval, 2002, p. 28), es posible asegurar que la investigación se dio bajo el paradigma cualitativo.

Por tratarse de una investigación en la que la descripción de la comprensión y el análisis del proceso de su evolución se dieron para cada uno de los participantes, se eligió el método de estudio de casos. Autores como Stake (1999) validan esta decisión; sobre el método en mención, Stake dice que permite ocuparse de “la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11). En este sentido, se prestó especial atención a si el lenguaje coloquial usado para expresar situaciones propias de la práctica agrícola y las formaciones de los sembrados se podían considerar un contexto propicio para la comprensión de los objetos de estudio aquí tratados.

La información recopilada en las entrevistas, las prácticas de campo, los talleres de aula, los diálogos grupales y las interacciones con grupos colaboradores se contrastó con lo consignado en una rúbrica de caracterización, denominada *rúbrica de descriptores de categoría por nivel*. Esta se elaboró con categorías establecidas *a priori*, lo mismo que los descriptores, pero estos últimos se fueron refinando debido a circunstancias emergentes. Ambos aspectos se establecieron para cada una de las dimensiones y niveles. Todo el conjunto se construyó a partir de lo que algunos autores del marco denominan “tablas de relaciones de dimensiones por rasgos y niveles” (Boix y Gardner, 1999, pp. 246-247).

CONCLUSIONES

La segmentación o subdivisión de una finca en terrenos de sembrado (lotes) y de estos en porciones menores (tajos) dio significado al hecho de que el área puede establecerse a través de la suma de superficies (Viedma, 1970).

La evocación, es decir, la frecuente mención que los participantes hacían de los nombres empleados para las distribuciones de los terrenos destinados a la siembra (e. g., finca, lote, tajo) ayudó a favorecer la clara distinción entre lon-

gitud y superficie, con lo que se hizo frente a este “claro obstáculo epistemológico” (Chamorro et al., 2008, p. 248).

Los participantes comprendieron, a través de la manipulación de almácigos y recortes de fotografías de lotes de café, que el área es una propiedad de la superficie, que se conserva a pesar del cambio de forma y la variación del perímetro, y viceversa.

La rúbrica de descriptores de categoría por nivel permitió que a lo largo de la interacción del investigador con los participantes, se caracterizara la comprensión de los conceptos objeto de la presente investigación. La rúbrica también permitió, finalizada la investigación, establecer hasta qué nivel, para cada dimensión, había progresado cada uno de los participantes, y con ello realizar el análisis de la comprensión. Terminado este, se evidenció que el mínimo nivel alcanzado fue el de aprendiz.

REFERENCIAS

- Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215-256). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Chamorro, M., Belmonte, J., Llinares, S., Ruíz, M. y Vecino, F. (Coord.) (2008). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid, España: Pearson Prentice Hall.
- Corberán, R. (1996). El área. Recursos didácticos para su enseñanza en primaria. En O. Figueras (Ed.), *Procesos de transferencia de resultados de investigación de aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas* (pp. 1-87). México D.F., México: CINVESTAV.
- Cortés, R. (2012). *Historia de la geometría euclidiana y sus aplicaciones para la enseñanza* (tesis de maestría). Universidad de Valladolid, Valladolid, España. Recuperado el 27 de agosto de 2013, de <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1716>.
- Fandiño, M. y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- González, D. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Recuperado el 17 de mayo de 2015, de:
<http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/52/1/JC0874.pdf>
- Larson, R. E. y Hostetler, R. P. (1990/1986). *Cálculo y geometría analítica* (E. Olmedilla, Tr.). México D. F.: McGraw- Hill.

- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Delfin Ltda.
- Parra, E. (2009). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 9(1), 1-40. Recuperado el 17 de mayo de 2015, de http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV9_n1_2008/Arquimedes1.pdf
- Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone (Comp.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69-92). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa*. Bogotá, Colombia: ARFO Editores e Impresos Ltda.
- Santa, Z., Londoño, R. y González, D. (2013). Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café. *Uni-pluri/versidad*, 13(3), 61-70. Recuperado el 17 de mayo de 2015, de: <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/unip/article/view/18619/15971>
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.
- Stone, M. (1999). ¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión? En M. Stone (Comp.), *Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 95-126). Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados*. Barcelona, España: Ediciones Paidós.
- Vasilachis, I. (Coord.) (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona, España: Gedisa.
- Viedma, J. (1970). *Lecciones de geometría intuitiva*. Cali, Colombia: Norma.

RECONSTRUCCIÓN DE CURVAS CERRADAS A PARTIR DE LA FUNCIÓN ANGULAR EN EL PLANO

Claudia Loaiza y Milton Lesmes

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Klaudia.loaiza@hotmail.com, miltonlesmes@hotmail.com

Se presenta una breve introducción a la Teoría de reconstrucción de curvas, con base en el artículo titulado *Fourier descriptors for plane closed curves* de Charles T. Zahn y Ralph Z. Roskies. Dada una curva regular a trozos, se calcula su respectiva función angular y, a partir de esta función, se reconstruye la curva. Este procedimiento puede ser significativo cuando, por ejemplo, una curva como la circunferencia se reconstruye a partir de un segmento de recta.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al realizar una lectura general de Zahn y Roskies (1972) se observa la necesidad de desarrollar la reconstrucción de una curva según el comportamiento de sus ángulos; por este motivo, es necesario entender el desarrollo de esta teoría, y surge el siguiente interrogante: ¿Cuáles son los conceptos que intervienen en la reconstrucción de curvas cerradas y regulares a trozos en el plano euclídeo, a partir de su correspondiente función angular?

MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA

Una *curva regular* en el plano es una función $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a < b$, derivable y tal que $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$, para todo $t \in (a, b)$. Una curva regular se dice de clase C^1 si es derivable y esa derivada es continua (Millman y Parker, 1977).

Una *curva regular a trozos* es una curva regular junto con un conjunto finito de puntos $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ tal que la restricción de la curva a los intervalos $[s_i, s_{i+1}]$ son segmentos de curvas regulares.

La longitud de un segmento de curva regular $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es $\int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt$.

$l = l(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt$ define un parámetro denominado longitud de arco,

$l(b) = L$ es la longitud de la curva.

Se considerarán curvas regulares cerradas $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir que $\gamma(a) = \gamma(b)$, definidas por $\gamma(l)$, donde l es la longitud de arco, $0 \leq l \leq L$.

El cálculo de la función angular, $\theta(l)$, función que determina la dirección del recorrido, de acuerdo a un vector fijo, se puede realizar usando el producto punto entre el vector fijo y los vectores tangentes de la curva y la fórmula $a \cdot b = ||a|| ||b|| \cos \theta$ (do Carmo, 1976). La función angular depende de la elección de un punto sobre la curva y la dirección para iniciar el recorrido.

Teorema de reconstrucción

Si la curva γ es descrita por $\theta(l)$ y un punto inicial $Z(0)$ (Figura 1), la posición del punto $Z(l)$ se puede obtener mediante la expresión (Roskies, 1972):

$$Z(l) = Z(0) + \int_0^l e^{i\theta(\lambda)} d\lambda.$$

Si $Z(0) = (0, 0)$, la expresión anterior se reduce a:

$$Z(l) = \int_0^l \left[\cos \left(\theta \left(\frac{Lt}{2\pi} \right) \right), \sin \left(\theta \left(\frac{Lt}{2\pi} \right) \right) \right] dt$$

lo cual reconstruye la curva según su función angular.

Si $Z(0) = (0, 0)$, y la curva es cerrada, la expresión se reduce a:

$$Z(l) = \int_0^l \left[\cos \left(\theta \left(\frac{Lt}{2\pi} \right) \right), \sin \left(\theta \left(\frac{Lt}{2\pi} \right) \right) \right] dt$$

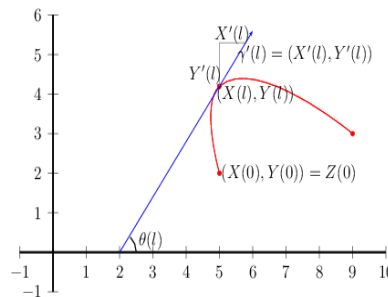


Figura 1. Recta tangente y función angular de una curva

EJEMPLOS

En lo que sigue, se presentan tres ejemplos que ilustran aspectos particulares de la aplicación de la Teoría de Zahn y Roskies. Fueron tomados del artículo, y nos apoyamos en Geogebra y Derive para tener las representaciones gráficas que se muestran.

El corbatín

Consideremos el corbatín como una función continua a trozos, que al evaluarla con el vector $v = [1,0]$ genera la siguiente función angular $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \chi(0, t, \sqrt{2})(-\pi/4) + \chi(\sqrt{2}, t, \sqrt{2} + 2)(\pi/2) + \chi(\sqrt{2} + 2, t, 3\sqrt{2} + 2)(5\pi/4) \\ - \chi(3\sqrt{2} + 2, t, 3\sqrt{2} + 4)(\pi/2) + \chi(3\sqrt{2} + 4, t, 4\sqrt{2} + 4)(-\pi/4)$$

Con $\theta(t)$ como función angular, se aplica el Teorema de Reconstrucción. La respectiva reconstrucción se presenta en la Figura 2.

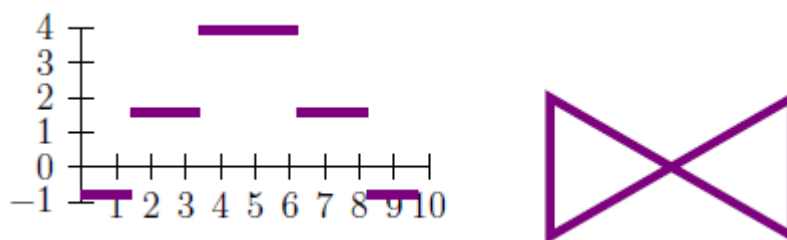


Figura 2. Reconstrucción de un corbatín

El ocho acostado

Consideremos la curva resultante de unir dos circunferencias tangentes y del mismo radio, que tiene apariencia de ocho acostado. En este caso, la circunferencia tiene como función angular un trozo de recta (Figura 3).

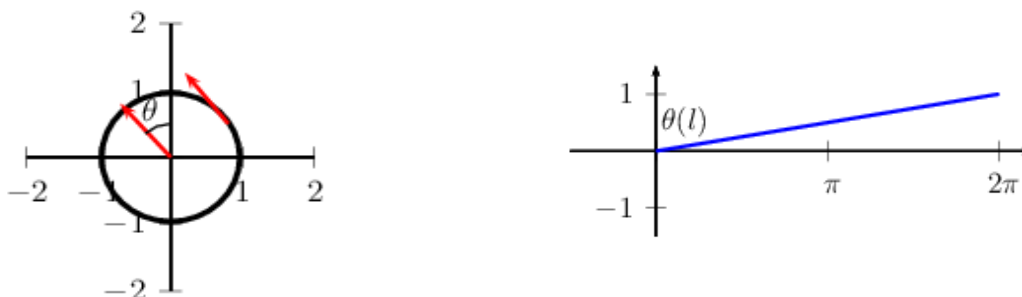


Figura 3. Función angular de la circunferencia

La ecuación de la función angular es:

$$\theta(t) = \chi(0, t, \pi)(2t - \pi/2) + \chi(\pi, t, 2\pi)(7\pi - 2t)$$

Y al aplicarle el Teorema de reconstrucción con el vector $v = [1, 0]$ y el conjunto de tangentes, determina la función angular $\theta(t)$, y su respectiva reconstrucción (Figura 4).

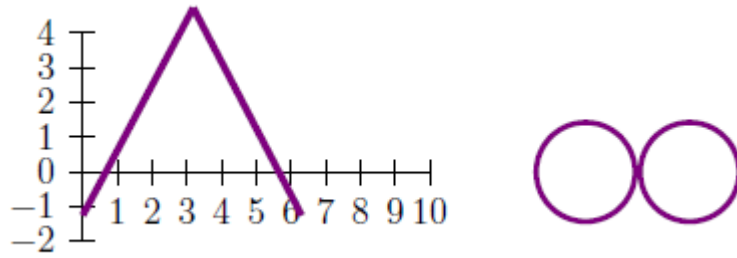


Figura 4. Función angular de un ocho acostado

Curva de Lissajous

Consideremos ahora la función paramétrica $\alpha(t) = [\text{sen}(t), -\text{sen}(2t)]$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $(0, 0)$ su punto de partida en el plano cartesiano. Desarrollando el proceso para obtener la función angular con el vector $v = [1, 0]$ se tiene que derivar y normalizar. Como la curvatura de esta curva no es ni cero ni constante, se genera la siguiente función angular $\eta(t)$:

$$\eta(t) = -\chi(0, t, \pi/4)g(t) + \chi(\pi/4, t, 3\pi/4)g(t) - \chi(3\pi/4, t, 5\pi/4)(g(t) - 2\pi) \\ + \chi(5\pi/4, t, 7\pi/4)g(t) - \chi(7\pi/4, t, 2\pi)g(t)$$

donde $g(t)$ es la función

$$g(t) = \text{acot} \left(\frac{\cos(t) \text{SIGN}(\cos(2t))}{2(2 \cos(t)^2 - 1)} \right)$$

En la Figura 5 se muestra la reconstrucción obtenida.

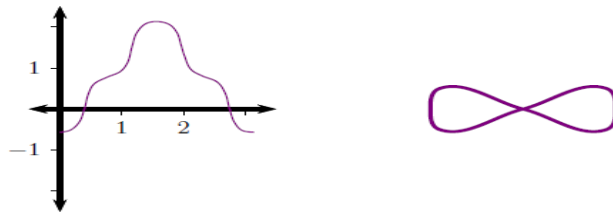


Figura 5. Reconstrucción de una curva de Lissajous

CONCLUSIONES

Al conocer la teoría que implicaba el Teorema de reconstrucción de curvas cerradas en el plano euclídeo se observa que:

- Aunque la Teoría de reconstrucción se puede aplicar a cualquier curva cerrada, en el caso de algunas curvas, el cálculo de la integral para la correspondiente reconstrucción, de acuerdo a la función angular, puede ser tedioso, incluso si se cuenta con un software matemático.
- Respecto a las curvas consideradas en los ejemplos se puede observar que si la función no es inyectiva en todo el intervalo, no se puede considerar una función de reconstrucción total; en estos casos, se deben realizar traslaciones y rotaciones del vector inicial, con el fin de completar la función angular de la reconstrucción.
- La Teoría de reconstrucción de curvas cerradas se puede aplicar a curvas abiertas y a descriptores de Fourier, entre otros.

REFERENCIAS

- do Carmo, M. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Río de Janeiro, Brasil: Prentice-Hall Inc.
- Millman, R. y Parker G. (1977). *Elements of differential geometry*. New Jersey, EUA: Prentice-Hall Inc.
- Zahn, Ch. y Roskies, T. (1972). Fourier descriptors for plane closed curves. *IEEE Transactions on Computers*, c-21(3), 269-281.

LA ELIPSE A TRAVÉS DE LA HISTORIA: CONCEPCIONES EPISTEMOLÓGICAS DE LA ELIPSE EN TRES MOMENTOS HISTÓRICOS DIFERENTES

David Martínez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

dmartinezud@gmail.com

Las matemáticas y la construcción epistemológica de las mismas han desarrollado distintas formas de apropiación y aproximación de los conceptos matemáticos. En este artículo, por medio de instrumentos históricos se presenta una reflexión sobre la construcción de elipses en tres etapas distintas de la historia de la matemática y las relaciones entre tales construcciones, sin importar su distancia cronológica. La reflexión hecha permite entrever una posible ruta de aprendizaje de las cónicas en el aula.

INTRODUCCIÓN: HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA

La construcción de objetos mentales y la generación del campo semántico que permite su utilización y cognición se desarrollan a partir de fenómenos que hacen posible, con su estudio y análisis, la evolución del pensamiento. Estos fenómenos que se pueden estudiar desde una perspectiva didáctica-epistemológica deben no solo dar cuenta y razón de los usos actuales de los conceptos por trabajar, sino también del uso y razón de ser en el momento mismo de su creación (Puig, 1997). Es por esto que en el marco de la formación de docentes se crea, en el periodo académico 2014-1, una comunidad de práctica en el proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, cuyo propósito es realizar análisis históricos sobre procesos de instrumentación y curvas en un espacio electivo, del cual surge el siguiente informe previo de investigación.

El análisis histórico de dichos fenómenos o de los conceptos que los crean permite poner en juego, además, las matemáticas desde las que se sustentaban los conceptos (matemáticas que evolucionan y se transforman como los conceptos mismos), y entender asimismo que en cada época particular un mismo concepto matemático puede incluso mostrar distintas definiciones, propiedades o métodos de construcción. El trabajo que reporto aquí, surge

Martínez, D. (2015). La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 133-140.

como una iniciativa de exploración de dichas concepciones para un objeto matemático específico, la elipse, y se desarrolla desde las prácticas matemáticas en cada periodo histórico en que tal objeto se construye, entendiendo que todo concepto surge en la interacción entre distintos sistemas de prácticas sociales (Godino y Batanero, 1994), y que existen prácticas sociales de la comunidad de matemáticos que configuran medios de hacer y demostrar en matemáticas.

ÉPOCAS DISTINTAS, MIRADAS OPUESTAS

Desde sus inicios, el desarrollo de las matemáticas ha sido influenciado por decisiones políticas, sociales, culturales (Jaramillo, 2010); por este motivo, lo que conocemos del pensamiento matemático depende de quién lo cuente. La historia se encarga de validar los conocimientos, pero también de valorar algunos como menos científicos que otros.

Es en este tránsito donde surgen las primeras aproximaciones de ciencia. En Grecia, cerca del siglo III a. C., la ciencia se definía por su carácter deductivo y lógico, gracias a los matemáticos de ese siglo y los aportes de siglos anteriores. Euclides presenta su trabajo de recopilación del conocimiento científico (es decir axiomático y deductivo) en *Elementos*, que fue el tratado de geometría más importante hasta el desarrollo de nuevas axiomáticas en el siglo XVII (Boyer, 2001/1999). Sin embargo, esta historia de la geometría dejó a un lado muchos hechos y conocimientos que incluso existían antes del nacimiento de Euclides (fuera este un hombre o una escuela de Alejandría).

La historia de estos conocimientos marginados por la geometría tuvo que construirse y narrarse desde otras disciplinas, como las artes y la teología, o creando ciencias propias como la mecánica. Las cónicas como objeto matemático fueron relegadas al olvido por la geometría euclidiana debido a la imposibilidad que esta tenía de construirlas con los elementos geométricos de *Elementos*. Sin embargo, desde esa época de esplendor griego se desarrolló un estudio sobre las cónicas, siendo Apolonio de Pergamo el principal referente de estas curvas especiales.

La sección cónica de Apolonio

La definición de cónicas que se tiene desde la antigüedad no será modificada hasta los trabajos de Descartes en el siglo XVII; es por esto que la elipse, como

una de tales curvas, es definida por construcción: Apolonio la presenta como una posible sección de un cono bajo circunstancias especiales; posteriormente, en un estudio de la sección ya construida presenta algunas de sus características (Lugo, 2014).

Respecto a las cónicas en Apolonio es necesario destacar que su construcción se realiza en 3D, refiriéndonos a que el hecho de seccionar un cono no es una operación realizable en un plano (aunque las representaciones encontradas sean en dibujos de dos dimensiones). Para entender cómo define la elipse Apolonio es necesario pensar los objetos en las tres dimensiones, operar con estos mediante cortes de sólidos y planos y, sin embargo, demostrar y afirmar sus propiedades desde la geometría plana.

El Renacimiento

Entre los siglos XV y XVI, la humanidad afrontó un periodo de transición, de reacomodación de las estructuras de pensamiento que impulsó las ciencias y la razón como los elementos constituyentes del conocimiento. En este cambio, los matemáticos, con renovadas energías intentan comprender el mundo y solucionar sus problemas utilizando instrumentos y máquinas para estos cometidos –sin que se diga que antes de esta época no hubieran existido máquinas o que no se solucionasen problemas– (Ruiz, 2003).

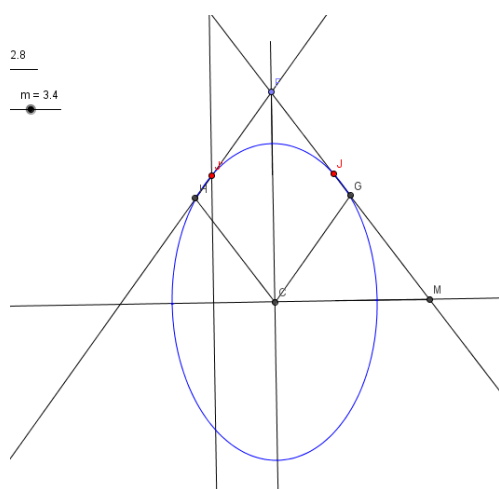
En esta época de renovación del pensamiento, la civilización occidental siguió buscando maneras de solucionar sus problemas y de teorizar y demostrar las teorías emergentes. Es así como científicos de la época dejan de lado sus concepciones teocéntricas y empiezan a buscar las soluciones en la naturaleza, como referente conceptual que luego intentarían imitar mediante máquinas. El mayor desarrollo de estos artilugios se logró mediante la incorporación de la mecánica y los sistemas de máquinas simples al conocimiento de la humanidad; es por esto, que en este siglo es de suma importancia garantizar cualquier conocimiento mediante un instrumento que demostrara de manera exacta el concepto.

En matemáticas este proceso se instaura como una práctica común en el quehacer de un matemático. Junto con la correspondencia y la racionalidad que caracterizan este siglo, instrumentalizar se convierte en la práctica más usada (o una de las más usadas) para la construcción de nuevos objetos matemáticos.

El elipsógrafo de da Vinci

Leonardo da Vinci fue un inventor, artista, escultor, pintor, filósofo, entre otras muchas cosas. Normalmente se le considera como el más claro ejemplo del proyecto científico-humanístico del Renacimiento. De sus manuscritos se puede entender un afán por construir, desarrollar e inventar máquinas de todo tipo. Entre sus producciones se encontró un instrumento que traza elipses con cierta facilidad convirtiendo un movimiento lineal en una curva; este instrumento, un elipsógrafo, no fue el primero en construirse, pero se presenta como uno de los más sencillos de manejar.

El elipsógrafo da Vinci es una máquina que no busca analizar las propiedades de una elipse pero que, sin embargo, busca trazar una elipse de la manera más exacta posible. Está compuesto por un rombo articulado y un punto de traza sobre uno de los lados.



El funcionamiento del elipsógrafo es bastante sencillo (como se ve en la Figura 1). Para trazar una elipse es necesario mover uno de los vértices del rombo por su diagonal correspondiente, haciendo que el punto de traza construya la elipse al asegurar las proporciones continuas.

Figura 1. Elipsógrafo de da Vinci

La instrumentalización como práctica matemática aseguraba, mediante estos instrumentos, que la comunidad matemática validara los objetos construidos; sin embargo, la idea de matemáticas existente en el Renacimiento aún dependía de la noción euclidiana de ciencia en la que cualquier demostración debe depender de la axiomática y el trabajo de proporciones expuesto por Euclides. Este trabajo demostrativo que se separaba de la práctica constructiva de la elipse usaba el rombo articulado y sus propiedades como objeto geométrico (congruencia de lados y articulación que permite su transformación) para poder validar las matemáticas presentes en el instrumento.

El inicio de la modernidad

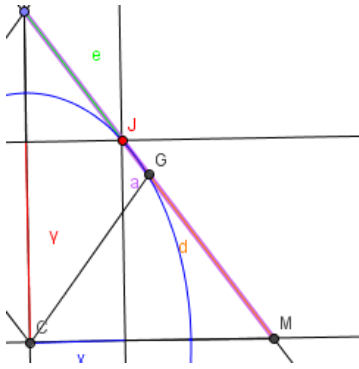
El paradigma matemático de la antigüedad se rompe gracias a los trabajos cartesianos, en los que se pueden vislumbrar los inicios de la modernidad y un cambio decisivo sobre las concepciones de la matemática. Descartes, con su heurística diferente, con el principio que adoptó de dudar y demostrar, es el precursor de una nueva geometría (posteriormente llamada geometría analítica). Gracias a sus trabajos, las representaciones simbólicas de los objetos matemáticos tomaron fuerza sin precedentes, llegando incluso a desplazar otras representaciones que primaban hasta ese momento como la gráfica o el lenguaje natural.

En este contexto histórico de cambio y reestructuración de las matemáticas encontramos a Franz Von Schooten quien, apoyado por su padre y gracias a una nutrida correspondencia con Descartes y la consecuente lectura de los trabajos cartesianos, crea su propio elipsógrafo. El elipsógrafo de Von Schooten es, según algunos autores, una simplificación (o, más bien, una unificación) de los elipsógrafos de Proclo y da Vinci. Es bien sabido que en la época renacentista la referencia a la antigüedad clásica es parte del nuevo pensar científico, por eso no sorprende que se haya vuelto a plantear el problema de Proclo (trazar una elipse con dos ejes ortogonales y ciertas condiciones del movimiento de una partícula), tampoco, que haya resurgido la instrumentalización en su elipsógrafo ni que este haya sido validado desde las matemáticas de su tiempo.

El elipsógrafo de Von Schooten (hijo), ¿cómo se construye?

El elipsógrafo de Von Schooten revive el problema de Proclo, con dos ejes ortogonales y un segmento de longitud fija, cada uno de cuyos extremos está en uno de los ejes. En este elipsógrafo el punto de traza es cualquier punto del segmento y el movimiento se realiza haciendo que los extremos del segmento se desplacen por los ejes (Figura 2).

La reproducción del instrumento mediante geometría dinámica permite, más allá de construir una única elipse determinada por dos ejes, entender las relaciones entre el punto de traza y los ejes que restringen su movimiento y cómo tales relaciones caracterizan la curva. El objetivo del instrumento es asegurar ciertas propiedades del punto de traza, para así demostrar que la figura dibujada es una elipse.

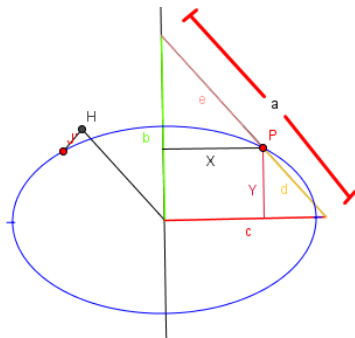


Siendo J el punto de traza, el elipsógrafo de Von Schooten permite que con el movimiento de la recta GM por los ejes ortogonales se pueda pensar en la elipse como el lugar geométrico de J que dicho movimiento produce.

Figura 2. Elipsógrafo de Von Schooten

El momento histórico en el que está inscrito, le permite a Von Schooten demostrar dichas propiedades y, por tanto, validar su instrumento desde las matemáticas cartesianas; muy al estilo de Descartes, nombra con símbolos las magnitudes de los segmentos, y para asegurar que el punto de traza pertenece a una elipse inscribe el instrumento en un sistema de referencia y llega a la ecuación general de la elipse (Figura 3).

Para todo punto P con coordenadas (x, y) ,



$$\frac{x}{e} = \frac{c-x}{d}$$

$$\frac{y}{d} = \frac{b-y}{e}$$

$$dx = ec - ex$$

$$dx + ex = ec$$

$$ax = ec$$

$$c = \frac{ax}{e}$$

$$ey = db - dy$$

$$dy + ey = db$$

$$ay = db$$

$$b = \frac{ay}{d}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$\frac{a^2 x^2}{e^2} + \frac{a^2 y^2}{d^2} = a^2$$

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

Figura 3. Demostración geométrica elipsógrafo Von Schooten

RELACIONES Y DIFERENCIAS

Al considerar la construcción de Apolonio, las prácticas de instrumentación y los elipsógrafos de da Vinci y de Von Schooten podemos ver cómo aun cuando estos autores plantean definiciones, construcciones y validaciones o demostraciones del mismo objeto matemático, el momento cultural, histórico y social en el que viven condiciona sus formas de actuar y sus resultados.

Las concepciones de Apolonio, aunque las conocieron los matemáticos de la antigüedad, no se tomaron como parte del conocimiento matemático, a pesar de los esfuerzos de Apolonio por demostrar sus conocimientos a la manera euclídea.

Da Vinci, con su instrumento y rodeado de una visión holística de las ciencias (esto, gracias a su formación de artista e inventor), aún necesita del paradigma euclídeo para validar matemáticamente la construcción de su instrumento; es el lenguaje de las proporciones y de los invariantes geométricos lo que permite en el elipsógrafo la caracterización de la elipse; sin embargo, es importante aclarar cómo para da Vinci la elipse trazada con su instrumento está determinada por el punto que la dibuje; la elipse, de hecho, se considera como el conjunto de puntos dibujados, y el interés real de la demostración es garantizar la existencia de la elipse a partir de la traza de los mismos.

Por el contrario, con el elipsógrafo de Von Schooten el interés de validación recae en la existencia del punto de traza asegurando que se cumplan ciertas propiedades. En las matemáticas posteriores a Descartes, la elipse se visualiza como lugar geométrico, como el conjunto de los puntos del plano que cumplen determinada condición.

Pero, si bien cada instrumento está contextualizado en un momento y lugar específico, surgen cuestionamientos sobre su relación y la posibilidad de entender en este objeto matemático una evolución del pensamiento constructivo y demostrativo. Gracias a la inclusión de software geométrico en el estudio (una especie de instrumentación de la actualidad), se puede afirmar que los trabajos de Von Schooten, Proclo y da Vinci están basados en un mismo tipo de elipse, y que, de hecho, su construcción es la misma. El rombo articulado de da Vinci permite a uno de los lados del instrumento moverse entre dos ejes ortogonales como en la construcción de Proclo, es por esto que algunos autores mencionan que Von Schooten simplifica estos dos instrumentos.

Ahora bien, la brecha epistemológica, la razón de ser de este artículo, está presente en la definición de elipse que juega para cada instrumento. No importa que tracen el mismo objeto matemático, no importa que sus sistemas de construcción sean similares, cada instrumento, cada matemático responde a las necesidades culturales de su época, y utiliza las herramientas y recursos de los que dispone.

REFLEXIÓN FINAL Y CONCLUSIONES

En la actualidad existe una corriente didáctica que busca la implementación de instrumentos históricos que trazan cónicas o curvas matemáticas en el aula. Personalmente creo que el trabajo con estos instrumentos nos muestra más sobre la historia y la filosofía de las matemáticas, que sobre el instrumento mismo o la elipse. Si esperamos llegar a la geometría analítica con nuestros estudiantes partiendo del uso de instrumentos (ya sean digitales o mecánicos) debemos tener en cuenta una reflexión histórica de la existencia de diferentes matemáticas a lo largo de la historia; sin embargo, creo que es una estrategia válida y útil como recurso didáctico.

Hablando de prácticas matemáticas como la instrumentalización renacentista, en la actualidad el uso de software geométrico en la educación matemática se ha convertido en lo que parece ser un invariante en la enseñanza; el potencial que tiene el uso de estos programas –bien sea dentro o fuera del aula– es inmenso y por esto creo que la práctica social o matemática más usada por los docentes es el uso de la tecnología y no podemos intentar desligarlos de la misma, por el contrario debemos aprovecharla como recurso para el estudio de prácticas antiguas o para la innovación de conceptos geométricos, siempre teniendo en cuenta cuál es el objetivo del uso de esta práctica.

REFERENCIAS

- Boyer, C. (2001/1992). *Historia de la matemática* (M. Martínez Pérez, Tr.). Madrid, España: Alianza Editorial.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Jaramillo, D. (2010). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Educación y Pedagogía*, 59, 13-36.
- Lugo, J. (2014). Secciones cónicas: un estudio epistemológico y el análisis de su tratamiento en los libros de texto (tesis de postgrado). Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. Recuperado el 30 de mayo de 2015, de: http://www.ungs.edu.ar/ms_idh/wp-content/uploads/2014/10/Secciones-C%C3%B3nicas.-Un-estudios-epistemol%C3%B3gico-y-el-an%C3%A1lisis-de-su-tratamiento-en-los-libros-de-textos.pdf
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: Horsori.
- Ruiz, Á. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

APLICACIÓN GEOMÉTRICA EN EL ANÁLISIS FORMAL DE UNA OBRA ARQUITECTÓNICA. CASO: CATEDRAL METROPOLITANA DE MEDELLÍN

Daniel Merchán y Marcela Echeverri

Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín

dmerchanc@unal.edu.co, maecheverrisa@unal.edu.co

Con un objetivo académico, se analizó la Catedral Metropolitana de Medellín, aplicando herramientas y conceptos de la geometría euclidiana para formular hipótesis relacionadas con la solución formal de la edificación y la relación existente entre el espacio y las formas geométricas que lo componen. Tomando esto como base fundamental para la concepción del diseño arquitectónico, se descarta la posible composición al azar de los diferentes espacios. Sin embargo, es necesario apropiarse de conceptos de geometría euclidiana plana y del espacio, geometría descriptiva y percepción tridimensional, entre otros, para leer el proyecto y atreverse a hacer conjeturas sobre su origen y concepción formal.

INTRODUCCIÓN

El análisis de la geometría de un proyecto permite leer, analizar y comprender los espacios arquitectónicos ya construidos y proponer hipótesis relacionadas con la concepción del proyecto. El objeto de análisis del trabajo que se reporta en este artículo es la Catedral Basílica Metropolitana de la Inmaculada Concepción de María, también llamada Catedral de Villanueva o Catedral Metropolitana de Medellín, ubicada en el Parque de Bolívar, en pleno centro de la ciudad de Medellín (Colombia).

Su construcción es producto de un momento histórico de la ciudad: momento de crecimiento y afirmación como centro poblacional principal. En ese contexto, la municipalidad plantea la necesidad de construir un espacio monumental para el culto religioso. Debido a los cánones típicos de la época, se emplea un estilo románico en el que uno de sus elementos formales y representativos es el arco de medio punto.

Para iniciar el análisis formal de la catedral se utilizan conceptos y herramientas de la geometría euclidiana plana y la geometría descriptiva,

como bases teóricas y prácticas para entender la organización de los espacios y la concepción del diseño.

CONTEXTO HISTÓRICO

Con la creación de la diócesis de Antioquia en 1868 surgió la necesidad de construir un templo de aspecto monumental que albergara la sede principal, ubicada inicialmente en Santa Fe de Antioquia, localidad que mantenía una diferencia político-regional con Medellín. Cuando esta ciudad ganó su posición como capital, la organización episcopal se trasladó al centro de la ciudad y se ubicó en la Iglesia de Nuestra Señora de la Candelaria, mientras se construía un templo con características catedralicias. Este fue el momento en que tal iglesia pasó a ser una basílica menor y la Catedral Metropolitana ocupó un lugar de mayor importancia como sede de la diócesis, convertida luego en arquidiócesis.

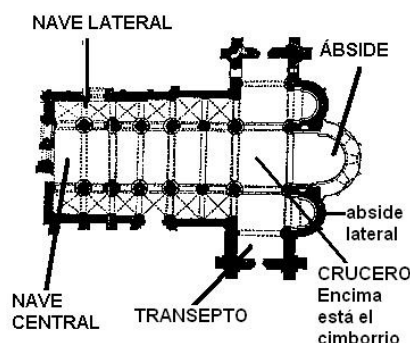


Figura 1. Elementos principales del estilo románico arquitectónico (tomado de https://jaimeensociales.files.wordpress.com/2012/11/3229465486_d234636f79.jpg)

El diseño de la catedral es obra del arquitecto francés Charles Carré quien, siguiendo los cánones de la época, diseñó una edificación de estilo románico, caracterizada por la combinación de elementos constructivos y ornamentales. Tal estilo predominó en Europa en los siglos XI y XII; algunos de sus rasgos característicos (Figura 1), que están presentes en la catedral, son:

- pilares de base cuadrada, rectangular u octogonal,
- ábsides semicirculares en planta,
- arco de medio punto,
- planta en cruz, naves principales y laterales, transepto, crucero, capillas auxiliares,

- cielo falso y cubiertas abovedadas.

APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA

Para analizar la planimetría de la catedral, con miras a formular hipótesis sobre la forma del proyecto, se recurre a conceptos y herramientas como: simetría, congruencia, semejanza visual¹, composición², proporción, sección áurea, determinación del centro de una circunferencia dada, circunferencia inscrita y circunscrita, intersección de objetos geométricos, superposición, distintas figuras geométricas planas y las relaciones entre ellas, área de figuras planas.

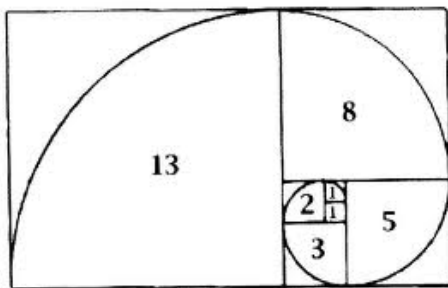


Figura 2a. Crecimiento proporcional basado en una aproximación al número áureo (tomado de http://historiaybiografias.com/divina_proporcion/)

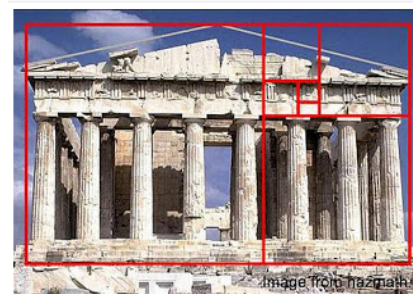


Figura 2b. Análisis de la fachada del Partenón de Grecia, usando la relación áurea

Por ejemplo, la proporción áurea, tan utilizada en las obras de arquitectura del período clásico, también está presente de manera reiterada en la naturaleza y se puede definir en términos simples, como una proporción entre medidas, de manera que al dividir un segmento dado en dos, el segmento menor es al segmento mayor, como este es al segmento dado. La espiral que se muestra en la Figura 2a, desarrollada a partir de la sucesión de Fibonacci (i. e., 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, (8 + 13), (13 + 21), ...) representa una condición de crecimiento proporcional basada en el número áureo ya que la razón entre dos números consecutivos de la sucesión, en el orden mayor-menor, forma una sucesión de números que se aproxima al número áureo $(1 + \sqrt{5})/2$). Este tipo de creci-

¹ Aquí, semejanza visual hace referencia a una relación entre dos planos, dos objetos, etc. que tienen la misma expresión visual.

² La composición de un espacio arquitectónico refiere a la adecuación de cierto tipo de elementos, de manera que puedan aportar un significado al usuario.

miento es aplicable al análisis de obras de arquitectura y de elementos de la naturaleza. Como ejemplo del uso de la proporción áurea, podemos ver el esquema proyectado en la representación de la fachada del Partenón, y cómo los diferentes cuadrados definen alturas y detalles del edificio (Figura 2b).

Al analizar el dibujo de la planta arquitectónica (corte horizontal de los elementos construidos, a una altura de 1,20 m para dibujar lo que se ve hacia abajo) de la catedral, es posible hacer varias lecturas del espacio y su composición espacial, con elementos y conceptos de la geometría. Por ejemplo, en los esquemas de la Figura 3 podemos ver la presencia de la proporción áurea en la relación que tienen el largo y el ancho de la totalidad de la catedral. También en el interior de la catedral se detecta la presencia de relaciones áureas en la distribución de varios espacios.

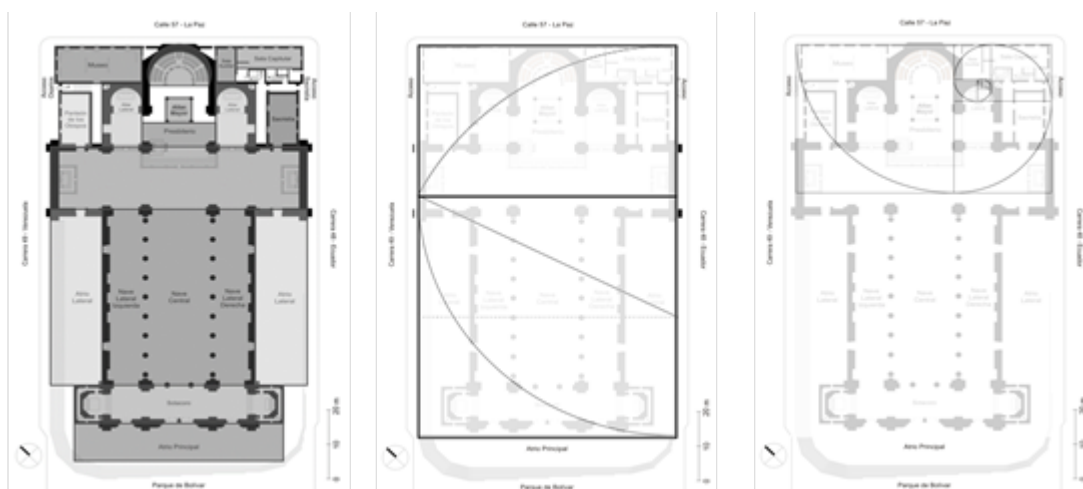
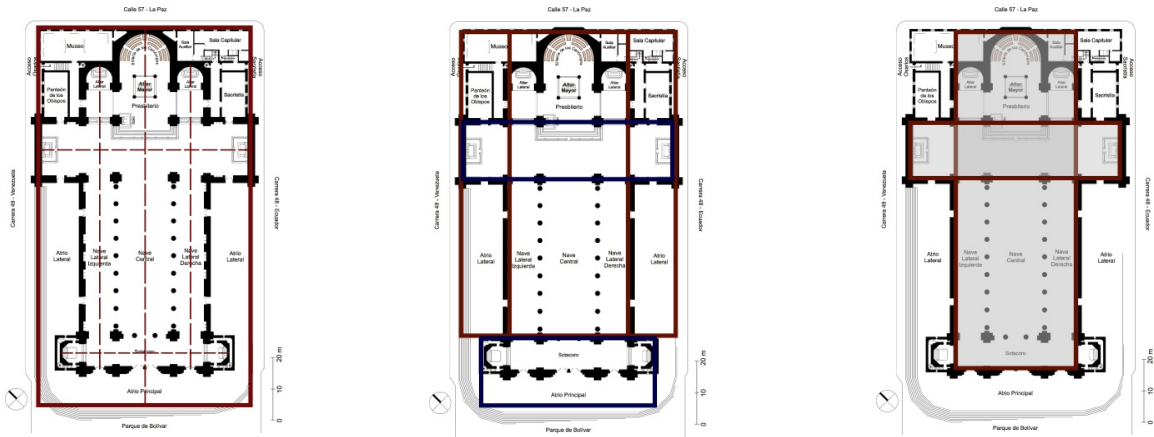


Figura 3. Plantas arquitectónicas de la catedral, con análisis según la sección áurea

En la Figura 4a se puede observar la simetría que indica que la mitad derecha del templo es igual a la mitad izquierda del mismo. La simetría es un rasgo muy característico del estilo románico, ya que lo que buscaban posteriormente era que la iglesia tuviera forma de cruz como se puede visualizar en la Figura 4c, en la que se resalta el transepto y las naves longitudinales central y laterales de la edificación. En la Figura 4b hay semejanza visual mas no igualdad de elementos. Por ejemplo, el transepto (cuadro superior azul) se ve repetido en una dimensión mayor en el atrio principal (cuadro inferior azul), y también se pueden hallar elementos geométricos y su distribución semejantes en las dos naves laterales (cuadros rojos del extremo derecho e izquierdo).



(a) Simetría

(b) Semejanza

(c) Cruz de San Antonio

Figura 4. Análisis de la cruz de San Antonio

La geometría descriptiva y la axonometría se usan como herramientas para la percepción tridimensional del espacio arquitectónico: permiten analizar la cruz que aparece en el aspecto formal del templo. Al hacer un axonométrico explotado (Figura 5) se encontró que solo a los 33 metros de altura se logra ver la cruz mencionada. Posteriormente, en el análisis con geometría plana, utilizamos cuadrados girados 45° (Figura 7) para averiguar la altura de la catedral; encontramos que sus vértices laterales también se encuentran a 33 metros de altura.

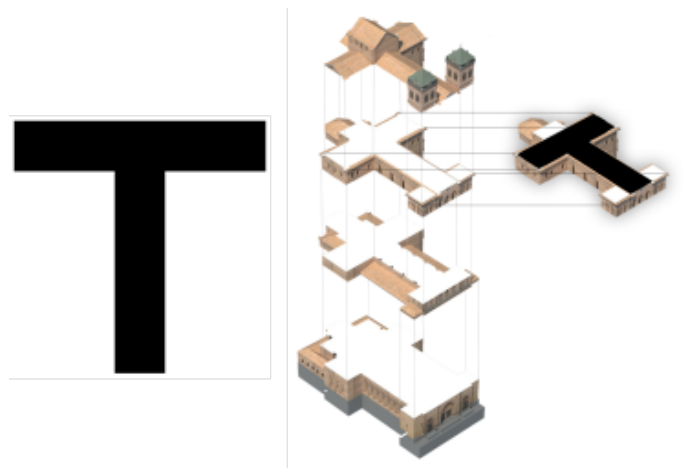


Figura 5. Plano axonométrico explotado con énfasis en la cruz de San Antonio

En la Figura 6 se analizan la fachada principal y la planta de cubiertas, a partir de algunas figuras geométricas básicas de la geometría euclidiana plana, como triángulo, rectángulo, rombo y círculo, con las cuales es posible identificar

algunas formas, que al proyectarlas permiten encontrar relación entre puntos básicos de la catedral, como la altura total de las torres, el ancho total de la fachada, la ubicación de las ventanas del nivel del coro, el eje de simetría que determina la ubicación de la puerta y los elementos ornamentales de la nave principal, entre otros.

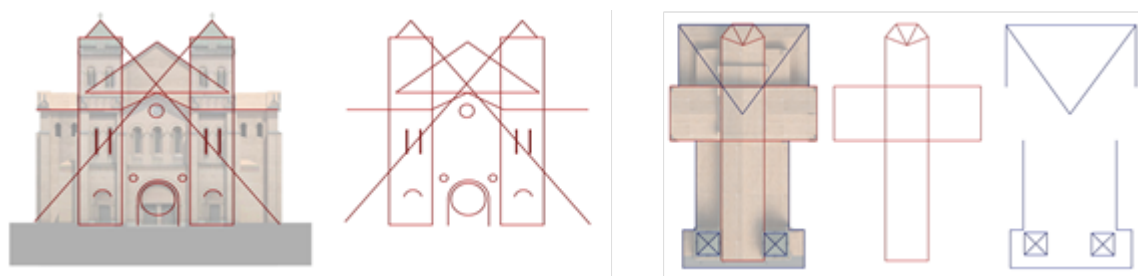


Figura 6. Geometría euclidiana encontrada en la fachada frontal y las cubiertas

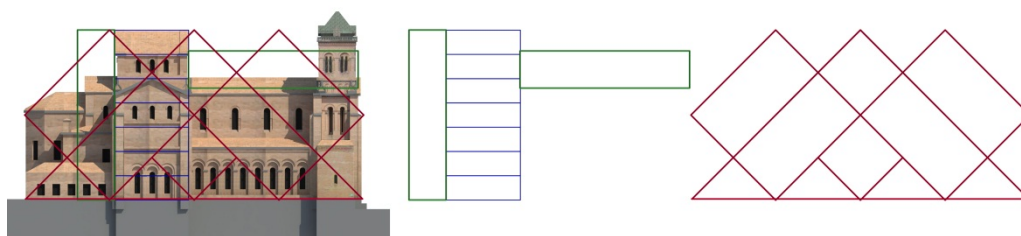


Figura 7. Geometría euclidiana encontrada en las fachadas laterales

La lectura y el análisis de la fachada lateral se puede realizar a partir de un cuadrado dispuesto de manera que una diagonal sea vertical y represente la altura del edificio: al construir otro cuadrado –congruente al primero, dispuesto de la misma manera y con un vértice común con el anterior– se puede ver que la suma de las dos diagonales horizontales representa el largo de la catedral. Además, la medida de lado del cuadrado duplicada da la medida de cada uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles cuya base representa el largo de la iglesia, solo si cada uno de esos dos lados es paralelo a dos de los lados de un cuadrado pero no a los del otro; la altura del triángulo sobre la base del mismo es la misma altura de la catedral. Cada uno de los dos cuadrados pequeños que se forman en el interior del triángulo isósceles cubre la cuarta parte del área del cuadrado inicial (Figura 7).

CONCLUSIONES

Este análisis permite evidenciar que la geometría euclidiana está presente en el diseño de la catedral, la cual fue concebida con un propósito definido y un orden espacial. En el análisis formal del edificio, corroboramos que herramientas tales como la simetría, la semejanza visual, el número áureo, entre otras, son claves fundamentales para entender la distribución espacial, cada uno de los elementos geométricos y la relación existente entre ellos, conformando la totalidad de la obra arquitectónica.

Dentro de la concepción de un espacio, los elementos formales y compositivos convergen en un sentido estratégico que el arquitecto quiso implementar. Estos elementos, aunque espacialmente se encuentren distantes entre sí, tienen relación con la totalidad del ente espacial, lo que se da a entender a través de las herramientas proporcionadas por la geometría.

Esto último es la razón para poder afirmar que la distribución espacial de este proyecto es consecuencia de un proceso lógico formal, con lo cual se elimina la posibilidad de una organización espacial sin sentido.

La implementación de la geometría es indispensable tanto para la realización de los grandes proyectos arquitectónicos como para dotarlos de un sentido profundo de identidad. Esto es evidente en el caso de la catedral que ha sido objeto de análisis en este artículo.

OPERADORES MORFOLÓGICOS DIFUSOS

Carlos Ochoa y Wilson Forero

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

oochoac@udistrital.edu.co, wilsonforerob@gmail.com

Una herramienta para filtrar imágenes son los operadores morfológicos difusos, los cuales permiten desde obtener información del objeto de estudio hasta modificarlo sin alterar su estructura global. Esta implicación (no alterar la estructura global) tiene una relación directa con la construcción de los operadores de apertura y cerradura. En este artículo se hace énfasis en tales operadores debido a las propiedades que los caracterizan y la relación difusa que inducen.

ALGUNOS CONCEPTOS PREVIOS

Conjuntos difusos

Para atender este concepto, se toma en principio la definición correspondiente dada por Zadeh (1965), que se ha constituido en la noción primitiva por excelencia.

Definición 1. Sea X un espacio de puntos. Se denota por x un elemento genérico de X . Un conjunto difuso A en X está caracterizado por una función de membresía $f_A(x)$ la cual asocia a cada punto de X un número real en el intervalo $[0, 1]$, este valor $f_A(x)$ representa el grado de pertenencia de x en A .

Retículos residuados

La teoría de retículos permite dar los cimientos del trabajo de la matemática morfológica tanto clásica como difusa; hace énfasis en la estructura de retículo del intervalo $[0, 1]$, debido a que en tal intervalo la operación es una t-norma en el caso difuso.

Definición 2. Un conjunto parcialmente ordenado (X, R) es un conjunto X con una relación binaria R , la cual satisface las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$:

1. $x R x$ (reflexiva).

2. Si $x R y$, $y R x$ entonces $x = y$ (antisimetría).
3. Si $x R y$, $y R z$ entonces $x R z$ (transitividad).

Para citar un conjunto parcialmente ordenado, usualmente se usa la abreviatura “poset” que proviene de la expresión inglesa *partially ordered set*.

Definición 3. Un poset $(L, \leq)$ es un retículo si cualquier par de elementos $a, b \in L$ posee máxima cota inferior y mínima cota superior.

Si c es la máxima cota inferior de a y b se escribe $c = a \wedge b$, si d es la mínima cota superior, se escribe $d = a \vee b$. Así, un retículo es una estructura $(L, \leq, \wedge, \vee)$. Un retículo es completo si para cada uno de sus subconjuntos existen máxima cota inferior y mínima cota superior; en tal caso, si A es un subconjunto del retículo, donde c es la máxima cota inferior de A , se escribe $c = \wedge A$, si d es la mínima cota superior de A , se escribe $d = \vee A$.

Definición 4. Sea $(L, \leq, \wedge, \vee)$ un retículo y $*$ una t-norma definida en L , se dice que $(L, \leq, \wedge, \vee, *)$ es un retículo residuado si existe una operación binaria $\rightarrow$ en L , que satisface:

$$\alpha * \beta \leq \gamma \leftrightarrow \alpha \leq \beta \rightarrow \gamma.$$

Si $(L, \leq, \wedge, \vee)$ es un retículo completo, L tiene cota superior, la cual se nota con 1, y tiene cota inferior, la cual se nota con 0. $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ es un retículo entero si 1 actúa como módulo de $*$ (i. e., $a * 1 = a$, para todo $a \in L$).

Tiene especial interés tomar $L = [0, 1]$, debido al campo de aplicaciones. De esto dan evidencia los trabajos de Zadeh (e. g., Zadeh, 1965) que se han constituido en la génesis de esta teoría.

Teorema 1. Si $([a, b], \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ es un retículo residuado, entonces es una t-norma semicontinua a izquierda y $([a, b], \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ es un retículo residuado entero.

Demostración. Sean $*$ una t-norma y $\{x_n\}$ una sucesión de términos no decrecientes en $[a, b]$. $*$ es no decreciente en ambos argumentos, entonces para cada i se tiene que $\{x_i \leq \vee_{\{j \in J\}} \{x_j\}\}$, por lo tanto

$$x_i * y \leq \vee_{\{j \in J\}} \{x_j\} * y,$$

de donde se sigue

$$\vee_{\{j \in J\}} (x_j * y) \leq \vee_{\{j \in J\}} (x_j) * y.$$

Debido a que $\{x_n\}$ es no decreciente en $[a, b]$, se tiene en consecuencia,

$$\vee_{\{j < i\}} (x_j * y) \leq (x_i) * y$$

así,

$$\vee_{\{j \in J\}} (x_j * y) \leq \vee_{\{j \in J\}} (x_i) * y.$$

De lo anterior se desprende

$$\vee_{\{j \in J\}} (x_j * y) = \vee_{\{j \in J\}} (x_i) * y.$$

Por tanto, es semicontinua a izquierda. A su vez, es fácil ver que 1 actúa como módulo en $([a, b], \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ y es el máximo de $[a, b]$. Es decir, $([a, b], \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ es un retículo entero.

Algunas propiedades que se desprenden del teorema anterior son:

Corolario 1. Sea el retículo $([a, b], \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$. Se cumple que:

- $\wedge_{\{j \in J\}} (x_i) * y \leq \wedge_{\{j \in J\}} (x_j * y)$
- $x * (y \rightarrow z) \leq y \rightarrow (x * z)$
- $y_1 \leq y_2$ implica que $x \rightarrow y_1 \leq x \rightarrow y_2$
- $y_1 \leq y_2$ implica que $y_2 \rightarrow x \leq y_1 \rightarrow x$.

La demostración de este corolario se encuentra en Höhle y Klement (1995).

Operadores consecuentes

Un operador es una aplicación que permite relacionar dos o más términos, el cual puede clasificarse según las características que tenga o las condiciones que se le impongan. En esta sección, se hace énfasis en el operador consecuente y algunas implicaciones que posee en la matemática difusa.

Definición 5. Un operador $C: P(X) \rightarrow P(X)$ es un operador consecuente en X si satisface las siguientes propiedades:

1. $A \leq C(A)$ para todo subconjunto $A \in P(X)$;
2. $A \leq B$ entonces $C(A) \leq C(B)$ para todo $A, B \in P(X)$;
3. $C(C(A)) = C(A)$ para todo $A \in P(X)$.

Las propiedades 1 y 2 en matemática morfológica se llaman propiedad de extensión y de crecimiento, respectivamente.

Es pertinente recordar que L^X denota el conjunto de todas las funciones de X en L , esto es, el conjunto de todos los subconjuntos L difusos de X .

Definición 6. Un operador $C: L^X \rightarrow L^X$ es un operador consecuente difuso en X si se verifica:

1. $\mu \leq C(\mu)$ para todo subconjunto difuso $\mu \in L^X$,
2. $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces $C(\mu_1) \leq C(\mu_2)$ para todo $\mu_1, \mu_2 \in L^X$,
3. $C(C(\mu)) = C(\mu)$ para todo $\mu \in L^X$.

Operadores coherentes

Antes de dar inicio a la presentación del operador coherente se exhibe la función pulso.

Definición 7. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ y X un conjunto, para $x \in X$ se designa por $\hat{x}$ la función pulso, dada por:

$$\hat{x}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 8. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, X un conjunto y $C: L^X \rightarrow L^X$. Se dice que C es coherente si

$$\mu(a) * C(\hat{x})(a) \leq C(\mu)(x)$$

para todo $\mu \in L^X$ y para todo $(a, x) \in X \times X$.

Operadores morfológicos difusos

Mediante los operadores morfológicos es posible abarcar el reconocimiento de imágenes con el estudio de ciertos detalles específicos, sin llegar a alterar la imagen global sino actuando sobre detalles estructurales que se definen previamente; esto se logra a partir de los operadores de dilatación y erosión, los cuales son el pilar de cualquier otro operador que se pueda definir. Esto ocurre gracias a que cualquier operador morfológico que se intente definir se expresa como algún tipo de función determinada por los operadores de dilatación y erosión. En las líneas que siguen se entenderá por elemento estructural un subconjunto del conjunto de estudio.

Sea un conjunto arbitrario X y una relación difusa R , que es la proyección del concepto de elemento estructural, denominada, entonces, relación estructural.

Definición 9. Dada una relación difusa $R \in L^{X \times X}$, los operadores erosión y dilatación de $A \in L^X$ son,

$$\varepsilon_R(A) = \bigwedge_{\{y \in X\}} \{ R^{\text{op}}(x, y) \rightarrow A(y) \}$$

$$\delta_R(A) = \bigvee_{\{y \in X\}} \{ R^{\text{op}}(x, y) * A(y) \}$$

donde $R^{\text{op}}(x, y) = R(y, x)$.

Con la composición de los operadores, antes definidos, es posible crear operadores que nos brinden mayor exactitud en el reconocimiento de detalles específicos de una imagen (Elorza, Fuentes-González, Bragard y Burrillo, 2013). Uno de ellos es el *operador apertura*, α_R , que consta de la composición del operador erosión seguido del operador dilatación; aquel operador se usa especialmente para eliminar regiones pequeñas y protuberancias.

Si se compone el operador dilatación seguido del operador erosión se obtiene el *operador clausura*, γ_R , usado, entre otras cosas, para rellenar pequeños agujeros, faltas.

Es claro que los operadores erosión y dilatación no son consecuentes pues no son idempotentes, pero sí son coherentes, es decir:

Teorema 2. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, X un conjunto y R una relación en X , los operadores erosión y dilatación son $*$ -coherentes.

Al considerar el operador apertura se tiene que $\alpha_R(\mu) \leq \mu$ lo cual impide que sea un operador consecuente, pero sí es un operador coherente, además es monótono, es decir si $\mu_1 \leq \mu_2$ entonces $\alpha_R(\mu_1) \leq \alpha_R(\mu_2)$ e idempotente (i. e., $\alpha_R(\alpha_R(\mu_1)) = \alpha_R(\mu_1)$).

Teorema 3. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, X un conjunto y R una relación en X , el operador apertura difuso α_R es un operador coherente.

El operador más detallado respecto a propiedades es el operador clausura, lo que se evidencia en el siguiente teorema (Elorza, Fuentes-González, Bragard y Burrillo, 2013):

Teorema 4. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, X un conjunto y R una relación en X , el operador clausura difuso γ_R es un operador consecuente coherente.

CONCLUSIONES

- Los operadores erosión, dilatación y apertura son coherentes pero no consecuentes; además, son monótonos (si $\mu_1 \leq \mu_2$ entonces $C(\mu_1) \leq C(\mu_2)$).
- El operador apertura es idempotente.
- El operador clausura difuso es un operador consecuente coherente.

REFERENCIAS

- Elorza, J., Fuentes-González, R., Bragard, J. y Burrillo, P. (2013). One the relation between fuzzy closing morphological operators, fuzzy consequence operators induced by fuzzy preorders and fuzzy closure and co-closure systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 218, 73-89.
- Höhle, U. y Klement, E. (Eds.) (1995). *Non-classical logics and their applications to fuzzy subsets. A handbook of the mathematical foundations of fuzzy set theory*. Dordrecht, Holanda: Springer.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

TRATAMIENTO DE LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA EN UN LIBRO DE GEOMETRÍA PLANA

Andrea Ortiz, Santiago Cardozo y Óscar Molina

Universidad Pedagógica Nacional

dma_yortiz931@pedagogica.edu.co, dma_scardozo900@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

El grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) hace una propuesta curricular para el nivel universitario que tiene como objetivo, entre otras cosas, que los estudiantes den sentido a cuestionarse sobre la existencia de los objetos geométricos en el marco de una teoría específica, y perciban que no tiene mucho significado hablar de objetos cuya existencia no se ha justificado. En este artículo se pretende exponer la clasificación de los teoremas de existencia incluidos en el libro *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*, desde dos perspectivas: en la primera, se mostrará la clasificación de los teoremas teniendo en cuenta su enunciado; en la segunda, la clasificación se describirá según su demostración. El libro mencionado sintetiza la propuesta del grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Cuando en un curso universitario se pretende cuestionar la existencia de los objetos que hacen parte de un sistema teórico específico, pensar en una justificación para garantizar tal existencia parece no tener sentido para los estudiantes. Claro, consideran que la existencia de los objetos es algo natural o sencillamente piensan que es suficiente la definición de los objetos para justificar su existencia. En relación con esto, de Guzmán (1998, citado en Selden, 2012) comenta que una de las dificultades más notorias que enfrentan los estudiantes, en su transición de la secundaria al nivel universitario, tiene que ver con las demostraciones de existencia de objetos, dado que no es fácil para ellos reconocer la necesidad de garantizar teóricamente tal existencia. En general, los objetos matemáticos se introducen en la escuela mediante una definición, se estudian a partir de la manipulación de diferentes tipos de representación, y la justificación de su existencia no es un tema que usualmente se trate; en este contexto, la existencia de los objetos geométricos no se cuestiona.

En cuanto a lo anterior, el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) hace una propuesta curricular para el nivel universitario, uno de cuyos objetivos es que los estudiantes den sentido a cuestionarse sobre la existencia de los objetos geométricos en el marco de una teoría específica (para este caso, la geometría plana euclidiana), y perciban que no tiene mucho significado hablar de objetos (salvo unos pocos –punto, recta y plano) cuya existencia no se ha justificado. De manera concreta, el estudio reportado en este artículo, si bien no pretende concentrarse en una propuesta didáctica para tratar teoremas de existencia, sí pretende contribuir a abordar la problemática planteada con un análisis de los teoremas de existencia desde un punto de vista matemático. Consideramos que hacer un tal estudio contribuye a que asuntos como los que destacamos a lo largo de este documento, sean tenidos en cuenta por profesores cuando diseñen propuestas que aborden estos teoremas en la universidad (y por qué no, en el nivel secundario). Así nuestra intención no sea formular una propuesta didáctica, presentamos una clasificación de los tipos de tareas/problemas que el libro *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (Samper y Molina, 2013) incluye para abordar los teoremas de existencia que trata. Con ello, damos ciertas luces, un tanto específicas, para un potencial diseño didáctico sobre el asunto.

MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA

En primera instancia, se expone la idea de teorema en Mariotti (1997). En seguida, se hace referencia a la clasificación de las definiciones desde la perspectiva de dos autores, y se explica su pertinencia/utilidad en el trabajo¹ que se está desarrollando.

Teorema desde la perspectiva de Mariotti

Según Mariotti (1997), la característica principal de un teorema es estar enmarcado por una teoría conformada por un conjunto de principios y reglas que permitan validar el enunciado mediante el cual se le formula. Trabajando esto desde la perspectiva matemática, lo que se busca es demostrar la validez de enunciados que sean ciertos y que consigan validez en correspondencia con

¹ Este artículo constituye un informe parcial del trabajo de grado, que lleva su mismo título, para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

determinada teoría. Partiendo de esto, la autora afirma que un teorema es un sistema de tres elementos: afirmación o enunciado, demostración, y teoría.

El enunciado está conformado por una estructura lógica y un contenido geométrico. En la estructura lógica del enunciado se vinculan la hipótesis y la tesis de la proposición condicional con la que se expresa el enunciado del teorema; por otra parte, el contenido geométrico del enunciado del teorema está constituido por los objetos y propiedades de índole geométrica que están involucrados en el enunciado, y por la relación de dependencia que liga dichos objetos con algunas propiedades.

En cuanto a la demostración del teorema se consideran dos elementos importantes: la garantía y la necesidad de aceptación. Maturana (1988, citado en Mariotti, 2006) explica la importancia de estos dos elementos y la relación que existe entre ellos; dicha relación inicia cuando el sujeto valida un enunciado, y continúa cuando este enunciado se acepta como parte de la teoría en la que se está trabajando y, por tanto, se convierte en una potencial garantía; la importancia de este proceso radica en que el estudiante, con base en los enunciados que valida, construye un marco teórico sobre el que puede fundamentar las demostraciones que haga.

En otras palabras, se puede hablar de demostración cuando hay un enunciado que contiene elementos que pueden ser justificados y cuando existe un marco teórico en el que esos argumentos tienen validez (Mariotti, 2012). En relación con lo anterior, se considera importante el tercer elemento mencionado por Mariotti, la teoría. Disponer de una teoría implica tener un sistema de principios compartidos y reglas de deducción que están relacionadas entre sí, y los cuales soportan los argumentos para garantizar que un enunciado es verdadero. Una teoría matemática está compuesta por postulados, teoremas y definiciones. A propósito del marco teórico, es necesario realizar una descripción de la teoría de Birkhoff, modelo usado por el libro Samper y Molina (2013) para abordar el estudio de la geometría plana euclidiana.

Birkhoff y la geometría euclidiana

Algunos matemáticos que trabajaban con la geometría de Hilbert quisieron enfatizar en la enseñanza de la geometría en el ciclo de secundaria, para lo cual debieron adaptar los axiomas formulados por Hilbert. Respecto a esto, Birkhoff hizo una propuesta que se publicó en 1940 en el texto escolar *Basic*

Geometry. El sistema propuesto por Birkhoff incluye cuatro postulados de geometría euclidiana; se caracteriza por cumplir una serie de propiedades que se pueden confirmar con la elaboración de construcciones que se abordan con regla y transportador. A continuación se describen algunos de los elementos de la teoría de Birkhoff. Los postulados que caracterizan esta teoría son los siguientes:

Los puntos $A, B, \dots$ de cualquier recta se pueden colocar en correspondencia (1,1) con el conjunto de los números reales, para que $|x_B - x_A| = d(A, B)$ para todos los puntos A, B . Definiendo de esta manera distancia.

Las semirrectas $l, m, \dots$ a través de cualquier punto O puede ser puesto en correspondencia (1,1) con los números reales $(\text{mod } 2\pi)$, por tanto, si $A \neq O$ y $B \neq O$ son puntos de l y m respectivamente, la diferencia $a_m - a_l (\text{mod } 2\pi)$ es la medida del ángulo $\angle AOB$. Además, si el punto B en m varía continuamente en una recta r que no contiene al vértice O , el número a_m varía continuamente también.

El sistema teórico usado por Samper y Molina (2013) se basa en la propuesta de Moise (1963), que a su vez se fundamenta en el modelo de Birkhoff.

Definiciones como parte del sistema teórico

Las definiciones en un sistema teórico desempeñan un papel crucial. A través de las definiciones, se introducen los objetos de la teoría: las definiciones expresan las propiedades características de los objetos; por tanto, otras propiedades de los objetos definidos, las relaciones entre ellos y los objetos de la teoría se pueden establecer mediante procesos de deducción.

Expuesta la importancia de las definiciones dentro de un sistema teórico, a continuación, se muestran dos perspectivas, la de Aristóteles y la de Mariotti, en relación con dicho asunto; ello dará cierto contexto para el estudio que se pretende realizar.

Definiciones desde la perspectiva de Aristóteles

Aristóteles clasificó las definiciones en nominales y reales. En términos de hoy, podemos decir que las *nominales* proveen una lista de propiedades que caracterizan complementemente al objeto sin aludir a otros objetos más que los que conforman al objeto mismo (Harari, 2004). Tales propiedades no se pueden obtener directamente en el marco de un sistema teórico específico, es decir, no

existen elementos (i. e., postulados o teoremas) del sistema teórico que explícitamente y de manera inmediata provean un objeto con dichas propiedades. Por otro lado, las definiciones *reales* se reconocen por proveer una lista de propiedades del objeto que se vale de otros objetos de la teoría (que no necesariamente componen a la figura) cuya existencia previamente ha sido demostrada en el marco del sistema teórico. De esta lista de propiedades se pueden deducir las propiedades del objeto dadas en la definición nominal.

Por ejemplo, si se toma la definición nominal del objeto geométrico *rectas paralelas* (i. e., dos rectas que son coplanares y no se intersecan), solo se pueden listar las propiedades que caracterizan completamente a este objeto, es decir, la propiedad de ser coplanares y la de no intersecarse, sin embargo no se puede realizar una construcción directa de dicho objeto, puesto que la definición no provee otros elementos distintos a los antes mencionados.

En cuanto a la definición real del mismo objeto: (i) dos rectas son paralelas si y solo si son perpendiculares a una misma recta, o (ii) dos rectas son paralelas si y solo si al trazar una transversal a ellas, los ángulos alternos internos son congruentes, se observa que se alude a propiedades de otros objetos con los cuales es posible construir el objeto así definido. Por ejemplo, si se toma como definición real la expuesta en (i), basta con construir dos rectas perpendiculares a una misma recta y comprobar que dichas rectas resultan ser paralelas. Por otro lado, si se toma la expuesta en (ii), se hace necesario construir dos rectas, trazar una recta transversal, y comprobar que las rectas resultan paralelas si los ángulos alternos internos son congruentes.

Definiciones desde la perspectiva de Mariotti

Mariotti y Fischbein (1997) sostienen que en matemáticas todos los objetos deben ser declarados y claramente definidos. Se refieren a dos tipos de definición: (a) la definición para introducir los objetos básicos de la teoría, y (b) la definición para introducir nuevos elementos en la teoría. Las definiciones del primer tipo se declaran a través de los axiomas que caracterizan los objetos (e. g., la definición de grupo en la teoría del Álgebra Abstracta), mientras que para las del segundo tipo, se permite la introducción de un nuevo elemento mediante algún teorema que afirme la existencia de tal elemento dentro de la teoría.

En esta perspectiva, y teniendo como marco el sistema de Birkhoff se pueden distinguir objetos que se clasifican en el tipo b de definiciones mencionado por tales autores; claro, salvo los objetos primitivos del sistema, todos los ob-

jetos involucrados en él se introducen mediante un teorema de existencia. Los objetos primitivos, si bien no son definidos, existen en dicho sistema producto de postulados (axiomas en términos de Mariotti y Fischbein, 1997).

METODOLOGÍA

La metodología general del trabajo es un análisis de texto. Las etapas del estudio fueron: búsqueda de referentes teóricos, construcción del marco teórico, construcción de categorías de análisis, análisis de los teoremas de existencia expuestos en el libro en cuestión. Para presentar el análisis se utilizaron tablas que sintetizan la clasificación realizada. Las categorías de análisis, como se dijo antes, atienden a los referentes teóricos encontrados. Hicimos dos clasificaciones: una relativa al enunciado y otra, a la demostración; los tipos de cada clase son de nuestra autoría.

ANÁLISIS

A continuación se presenta, grosso modo, una caracterización de las categorías empleadas en el estudio.

Clasificación de teoremas de acuerdo al enunciado

Enunciado que atiende a una definición (ED): Enunciado de teorema que provee existencia de un objeto o una relación cuya definición se ha provisto previamente.

Entre los enunciados que atienden a definiciones precisamos dos tipos: El primero (ED1) incluye enunciados que explicitan la existencia de un objeto que previamente ha sido definido; un ejemplo de este tipo de enunciado es aquel que provee la existencia de la bisectriz de un ángulo, objeto que previamente se ha definido en el marco del sistema teórico. El segundo tipo (ED2) corresponde a enunciados que proveen existencia de objetos que cumplen condiciones específicas (que no hacen parte de la definición del objeto, si este la tiene) explicitadas en el mismo enunciado. Esas condiciones son relaciones que cumple el objeto con respecto a objetos dados en el antecedente del enunciado.

Enunciado que atiende a un postulado (EP): Enunciado de teorema que provee existencia de un objeto o una relación que no posee definición previa

(se trata de objetos y relaciones primitivos del sistema). Vale la pena precisar que en este caso la existencia de los objetos la garantiza un postulado.

Enunciado que atiende a condiciones específicas (ECE): Enunciado de teorema que provee existencia de un objeto que cumple una propiedad específica; en otras palabras, el consecuente da la existencia de un objeto que cumple propiedades que dependen de las condiciones nombradas en el antecedente. Estos objetos pueden ser primitivos o no del sistema.

Clasificación de teoremas de acuerdo a la demostración

Demostración inmediata (DI): Demostración en la que las aserciones de sus argumentos proveen las condiciones de teoremas o postulados que de manera inmediata dan la existencia del objeto en cuestión.

Demostración mediata (DM): Demostración de existencia de un objeto cuya definición hace parte del sistema. La demostración se conforma con varios argumentos que, articulados, generan condiciones suficientes para que un objeto inicial resulte ser el objeto cuya existencia se quiere demostrar; en otras palabras, los argumentos usados no contienen garantías que provean de manera inmediata las propiedades del objeto en cuestión según su definición.

CONCLUSIONES

Los enunciados de los teoremas de existencia en el libro que se analizó en el estudio, en su gran mayoría, atienden a una definición o a un postulado; sin embargo, los teoremas cuyos enunciados atienden a condiciones específicas desempeñan un papel preponderante en el sistema teórico, dado que se usan con frecuencia en situaciones de construcción.

La clasificación realizada de los teoremas de existencia proporciona al docente una forma de abordar dichos teoremas en clase; ello debido a que se profundiza en la estructura del sistema teórico en el cual se trabaja.

REFERENCIAS

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, 33(2), 329-345. Disponible en <http://www.jstor.org/stable/1968336>

- Harari, O. (2004). Knowledge and demonstration. Aristotle's posterior analysis. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Mariotti, M. A. (1997). *Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld*. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education* (pp. 21-26). Prague, República Checa: Prometheus Publishing House.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Génova, Italia: Sense Publishers.
- Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, 14(2)-163-185.
- Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). *Defining in classroom activities*. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219-248.
- Moise, E. (1963). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Boston, EUA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Molina, Ó. (2015). Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado del teorema? En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 11-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L. y Echeverry, A. (2012). *La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa*. *Épsilon*, 29(3), 41-56.
- Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C. y Perry, P. (2014). ¿Es esto "machetear"? En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 79-97). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.

ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ESTUDIANTES QUE HACEN PARTE DE UN CLUB DE GEOMETRÍA

Isneiry Parada, Tulia Rivera y Juan Urbina

Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander

isk_1224@hotmail.com, trivera@uis.edu.co, juanurbina58@yahoo.es

Este artículo tiene por objeto mostrar resultados observados durante el trabajo en un Club de Geometría. La propuesta se fundamenta en el uso de software de geometría dinámica como mediador y una metodología de trabajo basada en resolución de problemas. El análisis de las soluciones a dos problemas de construcción geométrica evidencia tres diferentes estrategias; también se analizan los estados en el proceso de transición del razonamiento intuitivo a uno de carácter deductivo. Finalmente, se muestran evidencias del aporte del uso del software en los procesos comunicativos tanto orales como escritos.

INTRODUCCIÓN

En Bucaramanga (Colombia) tuvo lugar un movimiento importante alrededor del uso de nuevas tecnologías en el aula, específicamente en cuanto al uso de calculadoras graficadoras en instituciones educativas de nivel medio; por diversas circunstancias, estos recursos no tienen hoy día el mismo nivel de popularidad y hay pocas evidencias de la incorporación de estos o de nuevos recursos (e. g., software de geometría dinámica) en el currículo de matemáticas. Sin embargo, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS) ha mantenido el compromiso con este proyecto desde la formación de futuros profesores de matemáticas y como área de investigación del grupo EDUMAT.

De otro lado, en uno de los principales escenarios de práctica docente de los estudiantes de Licenciatura de la UIS, la Institución Educativa Las Américas, se viene trabajando en la preparación del Grupo de Olimpíadas, conformado por voluntarios con gusto por las matemáticas así como por estudiantes talentosos interesados en participar de competencias como las Olimpíadas Regionales de Matemáticas. En particular, el desempeño en esta competencia ha evidenciado deficiencias a la hora de responder preguntas denominadas “tipo ensayo”, que son preguntas abiertas donde se exige procedimiento; en el caso de geometría, el procedimiento consiste en una demostración deductiva.

Parada, I., Rivera, T. y Urbina, J. (2015). Análisis del desempeño en resolución de problemas en estudiantes que hacen parte de un Club de Geometría. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 163-170.

MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA

Respecto a la resolución de problemas en el ámbito de la geometría se utilizó como referencia la aproximación metodológica de Camargo y Samper (2014) que incluye como elementos básicos: una secuencia de problemas de construcción geométrica, el uso de un programa de geometría dinámica y un profesor motivador de acciones en pro de una generalización deductiva. De otra forma, la preparación de los participantes en las Olimpiadas de Matemáticas se hace usando el material dispuesto por las Instituciones Educativas Colombianas de Educación Superior que administran estas pruebas y que se limita a mostrar solucionarios o documentos que explican los métodos de demostración con ejemplos para las diferentes áreas.

De otro lado, nuestro trabajo acepta los tipos de demostración empírica y deductiva propuestos por Gutiérrez (2005); adicionalmente, el autor describe las opciones metodológicas para el análisis de datos a la hora de investigar y estudiar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática basada en software de geometría dinámica y referencia los aportes hechos por Balacheff (1988), Harel y Sowder (1998) para clasificar las formas de resolver problemas de demostración realizadas por los estudiantes; el texto nos sitúa en un amplio contexto en cuanto a que se considera como demostración cualquier intento por justificar o argumentar (Godino y Recio, 2001).

Adicionalmente se tuvo en cuenta la etapa del desarrollo cognitivo, según Piaget, en la que se encuentran los estudiantes, objeto de nuestra propuesta; al respecto, los integrantes del Club están haciendo el tránsito de las operaciones concretas a las operaciones formales (11 a 13 años). En este sentido, los niños son capaces de realizar en forma eficiente tareas que implican seriación, clasificación, conservación (reconocer que un objeto permanece igual a pesar de cambios superficiales en su forma o aspecto físico), cuentan con las condiciones para realizar abstracción reflexiva, condición que les permite razonar lógicamente respecto al número y el volumen sin que los confunda la apariencia física; hacia los 12 años se cree posible que empiece a desarrollar un sistema coherente de lógica formal (Meece, 2000).

METODOLOGÍA

El grupo está formalmente constituido como Club Interinstitucional de Geometría, con sede en la Institución Educativa Las Américas. Lo integran 28

alumnos, de entre 12 y 15 años, provenientes de 4 instituciones educativas de Bucaramanga (Las Américas, Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia, Comunitario MINCA y Santa Isabel de Hungría). Actualmente, el Club está dividido en dos grupos; en el nivel I se ubican alumnos de los grados 6° y 7°, y en el nivel II, alumnos de los grados 8° y 9°.

El Club se reúne una vez a la semana. El lugar de encuentro cuenta con recursos tecnológicos como equipos de cómputo y proyector. En cada sesión se presentan problemas para resolver con o sin el uso del software Cabri II Plus; los problemas se abordan en forma individual y luego grupal. Cada actividad involucra un objeto geométrico particular o una construcción, no se hace un trabajo previo de revisión de conceptos o propiedades, se orienta el trabajo de forma tal que la solución que el grupo presenta es aquella que va acompañada de un razonamiento que los integrantes consideraron acertado.

Una breve descripción de las actividades iniciales del Club es la siguiente:

Actividades Nivel I: Fase de iniciación

Exploración del software Cabri II Plus: manejo del programa, dibujo de figuras geométricas comunes, edición (manejo del color, medición, nombres y etiquetas), ejercicios con circunferencias.

Dibujo de triángulos isósceles y equiláteros, arrastre, deducción de relaciones y propiedades correspondientes a sus ángulos, lados, áreas y relaciones entre triángulos.

Resolución de problemas: problemas estáticos y de construcción en los que debe usar lo aprendido en las actividades anteriores.

Actividades Nivel II: Fase de entrenamiento

Problemas de demostración que requieren un razonamiento deductivo básico en cuanto a que se basa en el uso apropiado de la información dada en el enunciado.

Problema estático, por ejemplo, mostrar las características que deben tener dos triángulos para ser considerados congruentes.

De esta manera, las actividades que se realizan en el Club no solo se enfocan en el descubrimiento de propiedades o relaciones, sino que también se van planteando problemas geométricos tanto estáticos como de construcción en los que el estudiante debe hacer uso de un razonamiento deductivo para justificar, basado en los conocimientos que ha adquirido en actividades anteriores.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Estrategias de construcción

Estrategia empírica: La totalidad de los estudiantes en las actividades iniciales de Nivel I usan herramientas de medición y la percepción como estrategia de solución, considerando así no una representación sino un dibujo.

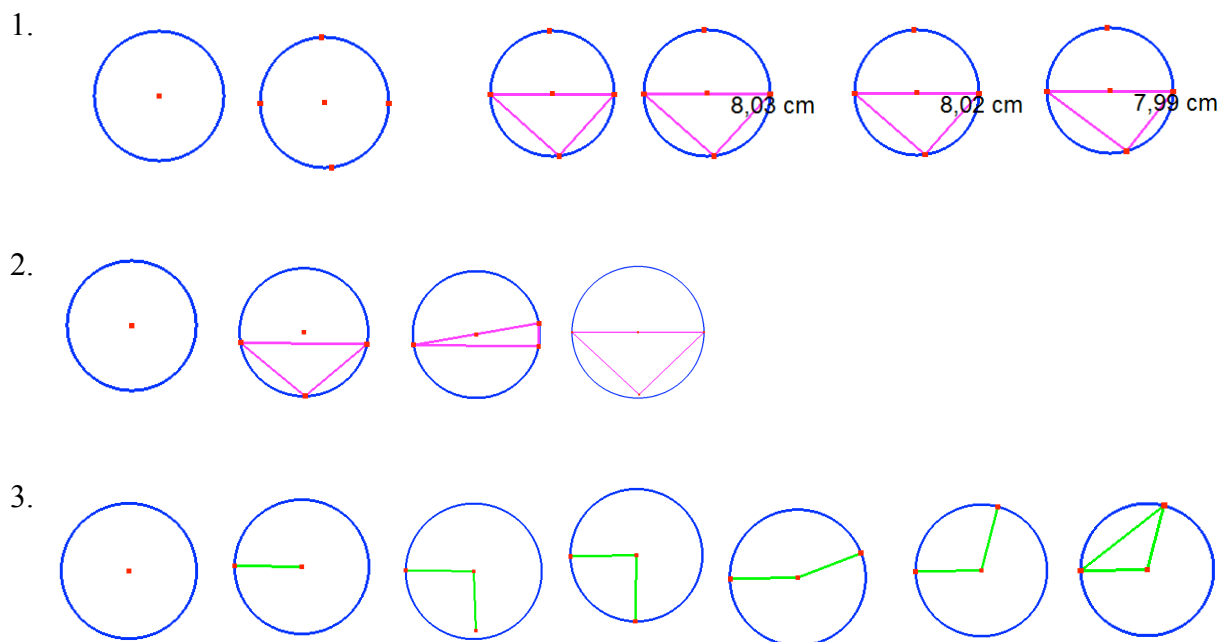


Figura 1. Estrategias de un estudiante del Nivel I, para construir un triángulo isósceles

La Figura 1 muestra la producción de un estudiante del Nivel I donde quedan registradas las estrategias utilizadas para resolver el problema de construir un triángulo isósceles usando Cabri. Como se ve, en las diferentes secuencias se involucra uso de la circunferencia; sin embargo, el primer intento obedece a una estrategia empírica pues consiste en dibujar un triángulo cualquiera sobre una circunferencia y medir hasta ajustar los lados del triángulo para conseguir que sea isósceles. La segunda y tercera estrategia evidencian que se supera la estrategia empírica y se avanza hasta llegar a una construcción que obedece a elementos teóricos.

Estrategia experimental: En ocasiones, los estudiantes suelen usar objetos geométricos que responden de manera perceptiva y no teóricamente a sus necesidades estratégicas. En esta fase, los estudiantes tienen claridad en cuanto al orden de uso o relación de dependencia entre las propiedades de los objetos, considerándose esta como una construcción débil ya que a diferencia

de la anterior no se basa directamente en procesos de medición y perceptivos, sino que muestra rasgos de un razonamiento un tanto deductivo.

La Figura 2 muestra las estrategias de solución al problema de construir un cuadrado a partir de triángulos congruentes. En todas ellas es evidente el uso de objetos geométricos (circunferencias, segmentos, rectas y rectas paralelas) que, al parecer, según como los ubiquen sirven para llegar a una construcción, siendo el arrastre proceso fundamental para la validación de las propias construcciones. De acuerdo con los procedimientos mostrados, los estudiantes cuentan con ideas no tan lejanas de cómo hacer la construcción de un cuadrado a partir de triángulos congruentes.

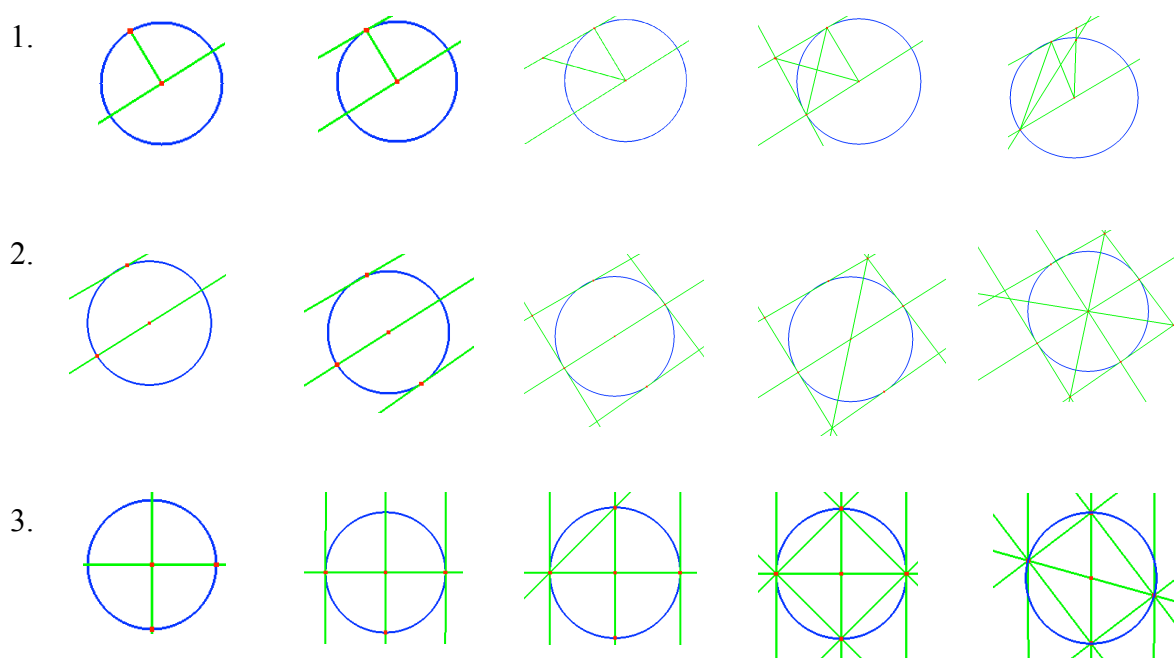


Figura 2. Estrategias de un estudiante del Nivel II, para construir un cuadrado a partir de triángulos congruentes

Estrategia deductiva: En el Nivel II cerca de 90% de los estudiantes usaron un razonamiento deductivo para resolver el problema de construir un cuadrado mediante triángulos congruentes, la solución se construyó a partir de los conocimientos adquiridos en actividades anteriores para llegar rápidamente a construcciones como la que se muestra en la Figura 3, allí inferimos que para ellos resultará fácil pasar a la fase de comunicar en forma oral o escrita el procedimiento seguido.

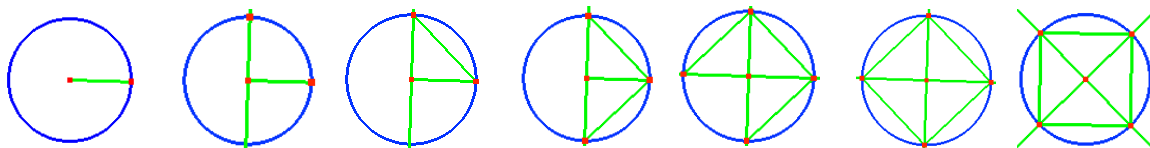


Figura 3. Diferentes estrategias de un estudiante del Nivel II para construir un cuadrado mediante triángulos congruentes

Procesos argumentativos

Experimento mental: Solo 10% de los estudiantes usa un ejemplo que contextualice el problema para organizar mejor sus ideas. Inferimos lo anterior del siguiente razonamiento en el que, al parecer, el estudiante asocia los segmentos con trozos de cinta o algo similar, para hacer consistente su justificación:

Profesor: Pruebe que $AB = DE$, dado que $AC = DF$ y $BC = EF$.



Estudiante: El segmento AC y DF son iguales o sea los 2 segmentos son iguales. Y la distancia que hay de BC y EF es la misma y como se dijo que los dos segmentos son iguales si imaginamos que la distancia o el segmento BC y EF no existen como los dos segmentos miden lo mismo son iguales, también se podría decir que la resta de AC y BC es la misma que la resta de DE y EF .

Pruebe que $\triangle IHG \cong \triangle FGH$ dado que:

$\angle FGH$ y $\angle IHG$ son ángulos rectos y
 $\angle 1 \cong \angle 2$

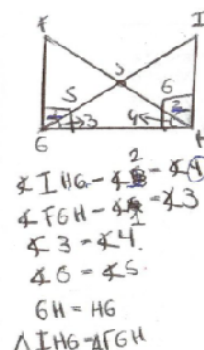
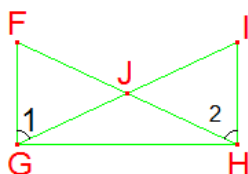


Figura 4. Demostración analítica o teórica de un estudiante de Nivel II sobre congruencia triangular

Analítica o teórica: Al finalizar nuestro trabajo en el Club, las soluciones planteadas por los integrantes del Nivel II se basan únicamente en razonamientos deductivos y operaciones mentales, abandonando el uso de ejemplos para sus argumentaciones, incluso no es necesario el uso del software Cabri para llegar a descubrir propiedades o pistas que les puedan ayudar (ver en página anterior la Figura 4).

Uso del lenguaje, escritura y comunicación

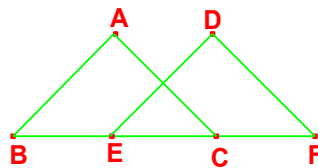
Las evidencias muestran el alto nivel de apropiación por parte de los estudiantes del lenguaje técnico, notación y terminología, para expresar y escribir sus razonamientos, a continuación se transcribe parte de un vídeo donde un estudiante presenta la solución al problema indicado:

Profesor: Pruebe que los segmentos BC y EF son congruentes, dado que:

$$\angle A \cong \angle D$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$



Estudiante: Esta es una paralela, entonces esta recta es infinita y esta también; y esto podría ser una secante, entonces este y este son ángulos correspondientes y serían iguales, entonces por ángulo lado ángulo se tiene.

CONCLUSIONES

Los estudiantes del Nivel I, típicamente adoptan varias estrategias de solución a un problema de construcción, enmarcadas por el tipo experimental y empírico; el software les permite combinar diferentes elementos, pero es el arrastre tipo test el que finalmente sirve de criterio para indicar si la solución es consistente. Hay avance en el proceso de comunicación oral pero aún hay limitación a la hora de presentar una justificación en forma escrita.

Los estudiantes del Nivel II son capaces de afrontar problemas que demandan una argumentación deductiva sin utilizar ejemplos o experimentación; al contar con un entrenamiento más amplio y un razonamiento lógico más avanzado (acorde a su edad) resultan ser más eficientes a la hora de escribir

una demostración deductiva, su actitud es más analítica que dependiente del uso del software.

En general, los integrantes del Club han mostrado, en un período corto, avances importantes en el desarrollo del razonamiento matemático, la capacidad argumentativa, el pensamiento lógico, la actitud crítica y la capacidad de comunicación, elementos indispensables para un desempeño exitoso tanto a nivel competitivo como de su futuro profesional.

REFERENCIAS

- Camargo, L. y Samper, C. (2014). *Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica*. En G. Arenas y S. Roa (Eds.), *Memoria VIII Simposio Nororiental de Matemáticas* (pp. 249-268). Bucaramanga, Colombia: Publicaciones UIS.
- Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración: implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.
- Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática* (pp. 27-44). Córdoba, España: SEIEM.
- Meece, J. (2000). *Desarrollo del niño y del adolescente. Compendio para educadores*. Mexico D.F., México: Secretaría de Educación Pública.

AMBIENTE INDAGATIVO Y ARGUMENTACIÓN EN UN CONTEXTO DE GEOMETRÍA DINÁMICA: UNA EXPERIENCIA EN GRADO SÉPTIMO

Julián Puentes

Universidad Pedagógica Nacional

jpuentesd@gmail.com

En este artículo se presentan los avances parciales de un experimento de enseñanza desarrollado en mi propuesta de trabajo de grado de maestría. En esencia, esta tiene como objetivo favorecer un ambiente indagativo en la clase de geometría y, así, posibilitar la participación y el protagonismo de los estudiantes en la validación y justificación de las soluciones a los problemas propuestos. Para poder alcanzar este objetivo, busco promover el uso de programas de geometría dinámica y la argumentación en un contexto de actividad demostrativa. Estoy convencido de que la combinación de estos dos ingredientes, sumada a la gestión del profesor, hacen posible la generación del ambiente indagativo y la cultura de la argumentación en la clase de geometría.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Actualmente existen diversos desafíos en la educación matemática que hacen evidente la necesidad de reflexionar sobre el quehacer del docente. Este contexto me ha llevado a cuestionar mi propia práctica como docente de matemáticas, y resultado de estas reflexiones he encontrado que mis clases de matemáticas no promueven un protagonismo de los estudiantes en la validación, justificación y producción de conocimientos. Además, si se hace un análisis de las prácticas usuales que se desarrollan en las clases de geometría de la educación media es evidente que en estas no se involucran la argumentación y la actividad demostrativa. Este panorama, sin duda, ha sido el punto de partida para mi propuesta de trabajo de grado. Esto porque un escenario en el que los estudiantes no juegan un papel determinante en la construcción y validación de sus conocimientos, y donde la actividad demostrativa –actividad fundamental y característica del saber matemático– no hace parte de las prácticas usuales de las clases de geometría pone de manifiesto una problemática digna de estudio por parte de quienes nos desenvolvemos como docentes de matemáticas y que demanda un cambio en los currículos y maneras de desarrollar la clase de matemáticas en las instituciones educativas.

Puentes, J. (2015). Ambiente indagativo y argumentación en un contexto de geometría dinámica: una experiencia en grado séptimo. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 171-178.

Así mismo, el hecho de que las tecnologías digitales no se hayan incorporado en las clases de matemáticas hace aun más evidentes los cuestionamientos, reflexiones y posibles cambios sobre la forma y esencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por tal razón, la propuesta que he venido desarrollando pretende poner de manifiesto estas preocupaciones y, en lo posible, plantear una ruta de acercamiento para la solución de los problemas antes mencionados. Con tal fin, mi propuesta de trabajo se soporta conceptualmente en los estudios realizados, en la línea de argumentación y prueba, por el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), y recibe apoyo financiero de la Secretaría de Educación Distrital. El grupo tiene como uno de sus supuestos que la interacción de los estudiantes con programas de geometría dinámica les posibilita el descubrimiento de propiedades de los objetos geométricos, lo que a su vez les da pie para proporcionar conjeturas relacionadas con los diferentes problemas que resuelven, conjeturas que mediante la gestión del docente se justifican con base en un sistema teórico local definido y diseñado para la solución de diversos problemas. En síntesis, y acudiendo a lo expuesto por Mariotti (2006), intento planear una intervención de enseñanza que garantice la interacción y el protagonismo de los estudiantes en la clase de geometría a través del uso de argumentos y hechos geométricos.

MARCO TEÓRICO

La presentación de los conceptos y referentes que estructuran mi propuesta la he dividido en dos apartados que ayudan a entender la naturaleza del trabajo realizado. De este modo, en el primero, planteo la definición de ambiente indagativo que adapté para mi investigación y, en el segundo, aludo a las condiciones y prácticas que, desde mi perspectiva, posibilitan la creación del ambiente indagativo.

Ambiente indagativo

Se define *ambiente indagativo* (i. e., ambiente para indagar en la clase de matemáticas) como el conjunto de circunstancias que propicia el profesor para que los estudiantes, a partir de la resolución de problemas, puedan llegar a participar en la clase de matemáticas mediante la expresión de ideas, la argumentación, la refutación y la gestión de acuerdos y reflexiones finales que apunten a la generación de conocimientos matemáticos (Goos, 2004). A partir

de esta definición, concibo que la creación de un ambiente indagativo se posibilita a través de la gestión del profesor y la interacción de los estudiantes con el conocimiento matemático y con las experiencias propias y las de los demás integrantes de la comunidad. De este modo, se crean escenarios en los que es necesario: intentar convencer a otros de la validez de la solución dada a un problema, complementar y utilizar los argumentos de los miembros de la comunidad del aula para llegar a acuerdos, y plantear contra argumentos que enriquezcan la indagación sobre el saber matemático. Esto, sin duda, es un ambiente propicio para fomentar la argumentación en la clase de geometría y promueve una nueva cultura en la clase de matemáticas.

Condiciones que favorecen la creación del ambiente indagativo

Argumentación y actividad demostrativa

Siguiendo a Krummheuer (1995), el acto de argumentar, entendido en un sentido amplio, refiere a un fenómeno social de interacción, que solo se hace evidente cuando se expresa de manera verbal y/o escrita, en el que una persona intenta convencer a otros de la validez de sus afirmaciones. Teniendo en cuenta lo anterior, se hace necesario configurar un escenario en el que los estudiantes puedan argumentar y que repercuta en el ambiente indagativo.

De igual modo, otro de los escenarios que contribuyen a la creación del ambiente indagativo es el contexto de actividad demostrativa. Este contexto involucra los procesos de conjeturación y justificación relacionados entre sí (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013), de manera que toda conjetura se justifica. En este contexto de actividad demostrativa se posibilita la argumentación como herramienta para pasar del proceso de construcción de la conjetura a la justificación y se hace evidente su repercusión en un ambiente de interacción e intercambio de ideas como lo es un ambiente indagativo.

Ahora bien, los procesos de construcción de la conjetura y producción de su justificación inducen a los estudiantes a dar, inicialmente, argumentos sustanciales, pero luego de la interacción con el lenguaje matemático y la gestión del docente ellos pueden dar argumentos analíticos. En este sentido, y referenciando a Toulmin (1958, citado en Krummheuer, 1995), se entiende por argumento sustancial el que carece de rigor matemático, es decir, carece de la estructura ternaria premisa–garantía–consecuencia, pero que resulta de la interacción con el problema planteado, el sistema teórico local y el programa de geometría dinámica. El argumento analítico posee la estructura ternaria

mencionada anteriormente, presenta el rigor matemático asociado a la deducción en matemáticas. La producción de este tipo de argumentos por parte de los estudiantes, es en esencia el objetivo de esta propuesta ya que presupone que su participación en la comunidad matemática será respaldada por el uso de hechos geométricos lo cual proporciona validez a las indagaciones que se producen en la comunidad.

Geometría dinámica

La mediación de la geometría dinámica en los procesos de construcción de conjeturas, argumentos y justificaciones es fundamental. Por ello, es necesario hacer referencia a los planteamientos de diversos investigadores que señalan a la geometría dinámica como una herramienta que posibilita un ambiente que favorece la argumentación en el contexto de actividad demostrativa y que deriva en insumos para el ambiente indagativo. En este sentido, Laborde (2001) plantea las bondades del uso de Cabri-Geometry, que van desde el ahorro de tiempo y la facilidad de hacer construcciones con el uso de las herramientas del programa, hasta el descubrimiento de propiedades geométricas que en un ambiente de papel y lápiz no se evidencian, a menos que se expliciten verbalmente. Las bondades de la geometría dinámica, sin lugar a dudas, posibilitan el diseño de tareas que apuntan a la interacción entre los estudiantes y que promueven su participación en la clase intentando resolver los problemas, para hacer un énfasis en los procesos y participaciones de los estudiantes en la solución de los mismos. De igual modo, configuro mi hipótesis de que el trabajo con Cabri-Geometry favorece la argumentación en la clase de geometría, referenciando el trabajo realizado por Camargo y Samper (2012), el cual pone de manifiesto las bondades de Cabri-Geometry para el diseño de tareas y problemas, ya que brinda herramientas de construcción, verificación y control con las cuales descubrir, verificar y justificar propiedades que se descubren en la resolución de los problemas; este tipo de tareas en la clase de geometría promueve la interacción de los estudiantes y el intercambio de argumentos y reflexiones, lo que es fundamental en el ambiente indagativo que se quiere fomentar.

METODOLOGÍA

La investigación que desarrollé se ubica en una perspectiva sociocultural de la educación matemática en la que se reconoce la incidencia de los factores sociales y culturales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las

matemáticas (Blanco, 2011). De igual modo, se reconoce también que cada interacción entre sujetos individuales los modifica mutuamente, produciendo caracteres nuevos y transformaciones en sus maneras de pensar (Rocher, 1996 citado en Blanco, 2011). Teniendo en cuenta estas características, la investigación en curso parte de la hipótesis de que es posible promover un ambiente indagativo en la clase de matemáticas (Goos, 2004) mediante el diseño de un escenario que tenga como protagonistas a los estudiantes y las interacciones de estos en un contexto de actividad demostrativa y el uso de programas de geometría dinámica. Para lograr los supuestos de nuestra hipótesis se hace necesario propiciar la creación de una cultura diferente en la clase de geometría, en la que los estudiantes tengan una mayor participación en la construcción y validación de los resultados que se obtienen en las diferentes actividades propuestas en la clase.

En esencia, la metodología utilizada en mi investigación tiene como fundamento las fases de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Por tal razón, para poder llevar a cabo la investigación se parte de una fase de diseño y planeación de la secuencia de problemas. Así, se diseñó una serie de seis problemas de exploración que se encadenan mediante los hechos geométricos que conforman un sistema teórico local. Los problemas propuestos partieron de la construcción de segmentos congruentes, puntos que equidistan de un punto fijo y triángulos isósceles mediante el uso de la circunferencia y la definición de la mediatriz como punto de llegada. El diseño de estos problemas nos permitió establecer una ruta hipotética de aprendizaje y de enseñanza, en la que suponemos lo que los estudiantes pueden llegar a responder, explorar y experimentar con los problemas planteados; en la ruta se prevén diferentes situaciones que el profesor debe tener en cuenta para ser un guía y facilitador para los estudiantes cuando no encuentran una estrategia para dar solución a los problemas o no aluden a los hechos geométricos que posibilitan las construcciones que pueden ser la solución a los problemas planteados. Tras esta fase inicial de planeación y diseño, se procede a ejecutar este diseño inicial y poner en juego el experimento. En esta fase se recoge la información que puede ser de interés para el análisis; por tal razón, mediante video cámaras se graba a los estudiantes interactuando en pequeños grupos, alrededor de los problemas planteados y con el uso del programa de geometría dinámica. De igual manera, en los momentos cruciales de puesta en común en los que se propicia el ambiente indagativo se graban las sesiones donde, en grupo grande y con la compañía

del profesor, se promueve una nueva cultura de clase en la que el protagonismo pasa del profesor a los estudiantes. En esta fase pueden encontrarse resultados parciales que generen ajustes sobre la marcha y que requieran de la modificación del diseño inicial, ajustes necesarios si se quieren obtener datos significativos y que evidencien el propósito de la investigación. Finalmente, se hace un análisis retrospectivo de la información recolectada, que incluye una depuración de la información para determinar los datos necesarios que serán analizados y que darán cuenta y razón de las hipótesis trazadas en la investigación y que, por tanto, revelarán los efectos que el experimento de enseñanza tuvo.

ANÁLISIS Y RESULTADOS PARCIALES

En este apartado esbozo uno de los análisis que he venido desarrollando, ya que al mismo tiempo en que ha sido escrito este artículo, estoy haciendo el análisis de la información que obtuve en mi investigación. De este modo, uno de los datos que puede mostrar un ambiente indagativo es la siguiente transcripción de un fragmento de la clase donde se ponen en común los resultados de la exploración de un problema planteado por el profesor, que consistía en caracterizar y justificar el por qué del comportamiento de varios puntos dispuestos en el programa de geometría dinámica. Unos de los puntos estaban sobre dos circunferencias, la intersección de estas dos o no estaban en las circunferencias, pero las circunferencias estaban ocultas.

- Profesor: [...] ¡Pero escuche acá!
- Quiero que reflexionen sobre algo que dijo Laura porque hay varios que están de acuerdo. [El punto] B es el centro de una circunferencia. ¿Todos están de acuerdo? ¿Sí o no?
- Coro: ¡Sí, profe!
- Profesor: Pero quiero que me digan ¿por qué creen que [el punto] B es el centro de una circunferencia?
- Daniel: Porque los otros [puntos] están a la misma medida
- Profesor: [Los puntos] Están a la misma medida ¿Cuáles [puntos]? ¿Cuáles están a la misma medida [del punto B]?
- Harold: [Los puntos] J , H y K
- Profesor: ¿Están de acuerdo [que los puntos J , H y K están a la misma medida de B] con lo que dice Daniel?

Coro: ¡Si!

Profesor: ¿Quiénes [qué puntos] están a la misma medida?

Coro: [Los puntos] J , H y K

Profesor: Entonces, ¿qué pasaba cuando ustedes movían [el punto] B ?

Coro: Se mueven todos [los puntos] J , H , K , L

Ronaldo: Pero cuando se unen [los puntos] B y F desaparecen [los puntos] C y L

El fragmento intenta ilustrar lo que puede llegar a obtenerse, en términos del ambiente indagativo, al promover una nueva cultura en la clase de matemáticas, en la que los estudiantes tienen una gran participación en el desarrollo de la clase y la validación del saber matemático. En el fragmento puede observarse que el profesor gestiona la discusión sobre un tema y que a partir de preguntas promueve en los estudiantes una cultura de argumentar y participar en la solución del problema planteado. Si bien este es uno de los primeros fragmentos que se ha analizado y contrastado con la teoría y los objetivos de la investigación, puede evidenciarse que el grupo de estudiantes con el que se llevó a cabo el experimento de enseñanza desarrolló prácticas diferentes a las que eran habituales en la clase, de modo que intentar convencer a otro o señalar un punto de vista a partir de argumentos matemáticos fue un aspecto que se puede destacar de la propuesta metodológica; esto es un indicio de la cultura que es posible propiciar en un ambiente indagativo en la clase de matemáticas, todo esto resultado de las condiciones previstas e implementadas para el desarrollo del mismo.

COMENTARIO FINAL

En un sentido muy general, pueden destacarse aspectos relevantes en la manera en que los estudiantes aluden a los hechos geométricos para argumentar y justificar la solución de los problemas planteados, no solo en pequeño grupo sino en las puestas en común en grupo grande. Si bien los estudiantes se refieren a los hechos geométricos con un lenguaje informal, cabe destacar que los estudiantes argumentaron. En este sentido, los beneficios que aporta el trabajo con programas de geometría dinámica son fundamentales, no solo porque permite que los estudiantes puedan explorar y llegar a conjeturar, sino porque promueven un ambiente indagativo que motiva a los estudiantes a participar en las prácticas que se desarrollan en la clase.

REFERENCIAS

- Blanco, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 59-66.
- Camargo, L. y Samper, C. (2012). *Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 258-291.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, EUA: Lawrence Erlbaum.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 75-88.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana. Un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA SIMETRÍA AXIAL A TRAVÉS DE SITUACIONES ADIDÁCTICAS, UTILIZANDO CABRI COMO MEDIO

Baltazar Ramón* y Martín Acosta**

**Colegio Las Américas – IED, **Universidad Distrital Francisco José de Caldas*
enlaces766@gmail.com, meacostag@udistrital.edu.co

Se presentan los avances que se han obtenido de una experiencia de aula relacionada con procesos de enseñanza y aprendizaje de la simetría axial a través de situaciones adidácticas mediadas con Cabri. Se muestra que los estudiantes han logrado diversas formas de aprendizaje por adaptación, planteadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas, y cómo persisten otros tipos de aprendizaje. También se muestran aciertos y dificultades del profesor. Además se tienen evidencias de cómo se modifican los roles del docente y de los estudiantes.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

De acuerdo con mi experiencia docente en matemáticas muchos estudiantes presentan dificultades y poco interés por la matemática. En particular, en geometría observo que hay muchas dificultades. Los estudiantes muestran conceptos y procesos geométricos muy limitados, no tienen suficiente claridad conceptual al definir diferentes objetos geométricos, no reconocen ni diferencian las propiedades importantes de dichos objetos.

Además, he observado que en la mayoría de instituciones educativas hay pocas horas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría; algunos docentes prefieren tomar un único período académico para intentar desarrollarla y otros manifiestan que no les gusta o prefieren no enseñar geometría; otros dicen que no están dispuestos a utilizar herramientas tecnológicas porque no se sienten preparados para hacerlo.

Esta situación es inaceptable y requiere una intervención adecuada. Por consiguiente, es urgente dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Cómo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en los estudiantes de educación básica?*

Los métodos de enseñanza actualmente utilizados no están produciendo los resultados esperados; por lo tanto, es necesario modificarlos. Se deben utilizar nuevas estrategias didácticas que permitan a los estudiantes una verdadera

Ramón, B. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la simetría axial a través de situaciones adidácticas, utilizando Cabri como medio. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 179-186.

construcción y asimilación del conocimiento geométrico. En muchos países, incluyendo Colombia, se están implementando políticas educativas que promueven el uso de computadores para apoyar los procesos de enseñanza (ver, por ejemplo, Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004).

Surge con esto un segundo aspecto por considerar: *¿Cómo usar las herramientas informáticas en el proceso de enseñanza para lograr un mejor aprendizaje de las matemáticas?*

La tarea de transformar las prácticas de enseñanza de la geometría utilizando tecnologías informáticas no debe hacerse de manera empírica. Se debe fundamentar este cambio desde una perspectiva teórica de la didáctica de las matemáticas. Por lo tanto, podemos formular una tercera pregunta: *¿Cómo orientar teóricamente las prácticas de enseñanza que se quieren desarrollar?*

El Proyecto Institucional de Uso de Geometría Dinámica, desarrollado en la Universidad Industrial de Santander (Colombia), responde las tres preguntas aquí formuladas: propone la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) como referente teórico para analizar las prácticas de enseñanza y organizar estrategias para lograr un mejor aprendizaje de la geometría, aprovechando el potencial del software Cabri Geometry. Por lo tanto decidimos replicar esa experiencia en el Colegio Las Américas, en la ciudad de Bogotá, para evaluar la transferibilidad e identificar ventajas y posibles dificultades de la propuesta.

REFERENTE CONCEPTUAL

Con base en la TSD, se busca producir un aprendizaje por adaptación, producto de la interacción del sujeto con el medio. Para que se produzca dicho aprendizaje el docente solicita a los estudiantes desarrollar una tarea. A la idea de aceptar la solicitud del profesor se le denomina *intención*; si se presentan algunos estudiantes que no quieren aceptar la solicitud, el docente debe motivarlos y hacerlos cambiar de decisión. Con la intención, el estudiante comienza a desarrollar la tarea por medio de *acciones* sobre el medio (software), modifica las condiciones iniciales del ambiente, este a su vez reacciona a través de *retroacciones*. Estas son respuestas a las acciones para permitir avances o bloqueos en el desarrollo de la tarea; se pueden diseñar gracias a las herramientas del software. Luego el estudiante *interpreta* sus acciones y las retroacciones del medio, desarrollando así un proceso de *validación* de la situación. Si la validación es positiva, es decir, si permite

avances en el desarrollo de su tarea, el estudiante refuerza sus acciones; en caso contrario, si la validación es negativa, el estudiante observa que sus acciones y las retroacciones del medio no le permiten avanzar en su tarea, entonces cambia o modifica sus acciones.

Los cinco elementos mencionados y resaltados hacen parte de una situación adidáctica propuesta desde la TSD (Brousseau, 2007). Dicha teoría plantea la posibilidad de lograr aprendizaje por adaptación. Este se produce cuando un sujeto (estudiante) interactúa con un medio, y se puede lograr proponiendo al estudiante una situación adidáctica. Durante el desarrollo de toda actividad adidáctica se pretende que el estudiante construya conocimiento o que aprenda a través de sus errores o dificultades, se espera que el profesor no intervenga en el desarrollo de esta tarea y que el mismo estudiante sea el que decida si su tarea quedó bien o mal.

Esta situación adidáctica está inmersa en una situación didáctica en la que se involucra el profesor con el propósito de relacionar el conocimiento adquirido por los estudiantes con el saber matemático que quiere institucionalizar. Con la institucionalización, los estudiantes dotan de sentido la relación entre el saber matemático, su conocimiento, y el medio; tal sentido se hace evidente en la actuación de los estudiantes al aplicar su conocimiento en el desarrollo de tareas similares a la inicial. Toda la interacción descrita se denomina situación didáctica. La Figura 1 resume el proceso.

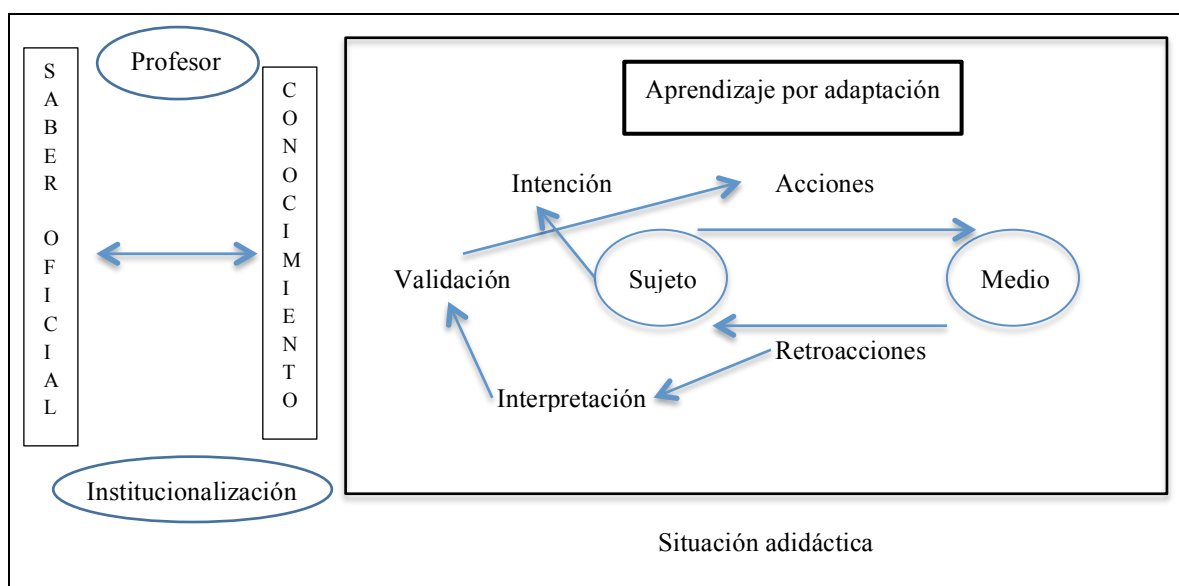


Figura 1. Esquema de la denominada situación didáctica

Es importante aclarar que durante el desarrollo de la situación adidáctica se pretende desarrollar el campo de la percepción de los estudiantes y cuando se desarrolla la actividad didáctica se hace un cambio para introducir procesos con fundamentación teórica. Cada una de las actividades propuestas pretendió desarrollar un equilibrio entre lo perceptivo y lo teórico con el fin de hacer una acertada institucionalización del saber matemático.

METODOLOGIA

Se adopta una metodología de ingeniería didáctica en la que se busca controlar el medio con el que interactúan los estudiantes y las formas de intervención del profesor.

Se grabaron las sesiones de clase enfocando la participación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades y tareas propuestas, para identificar sus aprendizajes. Se grabó la puesta en común enfocando las intervenciones del profesor y los estudiantes, con el fin de identificar aciertos y desaciertos en la apropiación de la teoría por parte del docente.

ANÁLISIS DE DATOS

Las evidencias de la experiencia se tienen en formato de video, información que actualmente se ha terminado de transcribir con el software Elan. Las transcripciones permitirán hacer el respectivo análisis. Además, se tienen evidencias, en formato escrito, provenientes de instrumentos de apoyo al desarrollo de las actividades.

Se pretende hacer el análisis *a posteriori* de los datos recolectados durante el desarrollo de la experiencia. Es aquí donde mediante un riguroso proceso de lectura y análisis de las transcripciones se quiere buscar evidencias de las categorías de análisis definidas para esta experiencia.

Para el análisis se consideran dos categorías: tipos de aprendizaje y apropiación de la teoría; en cada categoría se hace una clasificación y para cada clase se definen indicadores como se muestra a continuación:

CATEGORÍAS	CLASES	INDICADORES
Tipos de aprendizaje	Por adaptación	Tras una acción y la observación de la retroacción del medio, el estudiante cambia o refuerza la acción.
	Por imitación	Tras observar resultados de un compañero en una tarea, el estudiante cambia o refuerza la acción.
	Por autoridad	Tras recibir instrucciones del profesor o de un compañero, el estudiante replica las acciones.
Apropiación de la teoría	Comportamientos del profesor, coherentes con la TSD	<i>Durante la fase adidáctica</i> Solicita al estudiante que él mismo valide. Solicita al estudiante que ensaye diferentes acciones. Solicita al estudiante que tome conciencia de las retroacciones del medio.
		<i>Durante la puesta en común</i> Regula el comportamiento de los estudiantes para reforzar actitudes de escucha y respeto por la palabra. Solicita al estudiante que describa su experiencia con el software. Acepta que los estudiantes expresen sus conocimientos personales y hagan referencia a su experiencia con el software.
	Comportamientos del profesor, no coherentes con la TSD	<i>Durante la fase adidáctica</i> Interviene directamente: comunica al estudiante las acciones que debe realizar para resolver el problema. Juzga explícitamente el trabajo del alumno.
		<i>En la puesta en común</i> Descalifica las referencias que hacen los estudiantes a conocimientos personales o a su experiencia con el software. Espera que los estudiantes hagan referencia al saber.

Con estas categorías esperamos poder responder las siguientes preguntas:

¿Cuáles el impacto del uso del software en el aprendizaje de la geometría?

¿Cómo se transforma la enseñanza para potenciar el aprendizaje de la geometría por medio del uso del software?

Según la TSD, el software puede desempeñar un rol importante en el aprendizaje si funciona como un medio de interacción para producir aprendizaje por adaptación. Buscaremos, entonces, evidencias de tres tipos de aprendizaje como se muestra en la tabla. Por otro lado, buscaremos evidencias de la gestión de la clase para determinar si los comportamientos del profesor muestran o no una apropiación de la TSD durante la experiencia.

Se espera encontrar una cantidad considerable de evidencias de aprendizajes por adaptación, ya que la experiencia está fundamentada en la TSD; pero es probable la presencia, en menor cantidad, de aprendizajes por imitación y por autoridad. Se esperan aprendizajes por imitación debido a que en todo proceso de clase, los estudiantes tienden a compartir sus experiencias, sus formas de trabajo y siempre buscan apoyo en sus compañeros. Respecto de los aprendizajes por autoridad, se espera que el docente en algunos momentos deba intervenir para indicar cómo usar algunas herramientas o procedimientos debido a que los estudiantes no han tenido previamente ningún tipo de contacto con el software.

Respecto a la la apropiación de la TSD por parte del docente, se espera encontrar evidencias de comportamientos del profesor coherentes con los que promulga dicha teoría, tanto en la fase adidáctica como en la fase didáctica. Se buscarán comportamientos del docente no coherentes con la teoría, que den muestra de la falta de apropiación de dicha teoría.

Las puestas en común son espacios en los que la interacción principal ocurre entre el profesor y el grupo de estudiantes. Nos interesa determinar si el docente permite que los estudiantes expresen sus experiencias con el software y expliciten sus conocimientos, o si prevalece un ambiente de interrogación y juicio de parte del profesor. Por eso buscaremos indicadores variados que permitan ver si el profesor monopoliza la discusión, si el estilo del diálogo es pregunta-respuesta, si los estudiantes tienen la oportunidad de expresar lo que piensan y justificar sus afirmaciones, y si el profesor promueve la discusión entre los estudiantes.

Se quiere verificar si el docente hace uso adecuado de las intervenciones de los estudiantes, si escucha y reflexiona sobre las ideas y opiniones que ellos aportan, especialmente cuando utilizan su propio lenguaje y, posiblemente, en algunas expresiones no usan un lenguaje matemático como lo esperaría el docente.

Respecto a las intervenciones de los estudiantes, se espera que al iniciar la experiencia ellos vayan analizando e interpretando las situaciones, que luego expresen sus ideas en sus propios términos pero con la mayor exactitud posible; se espera que, poco a poco y especialmente en las etapas finales del proyecto, ellos manejen un discurso con términos más precisos y haciendo uso más formal de los conceptos y procesos relacionados con la simetría axial en términos matemáticos.

Esperamos encontrar evidencias que muestren las diferentes formas en que los estudiantes están de acuerdo o no con las respuestas del otro, la manera como el docente valora o maneja dichas intervenciones; y las formas como estudiantes y docente aprovechan las intervenciones para relacionar dichos aportes en pro de una construcción colectiva de conocimiento.

El profesor debe garantizar las condiciones para favorecer las intervenciones de los estudiantes; lo puede hacer a partir de las intervenciones individuales de ellos; también debe garantizar que sea posible el desacuerdo con otros, en términos respetuosos. Al mismo tiempo debe permitir involucrar otros aportes que muestren las diversas formas de razonamiento que presentan los estudiantes mientras se desarrollan las discusiones o se comparten ideas o estrategias. Todo esto con el propósito de lograr una construcción colectiva de conocimiento, para que luego el profesor logre formalizar el conocimiento matemático relacionado con la simetría axial.

PARA TERMINAR

En el análisis hecho hasta el momento se ha encontrado que los estudiantes han logrado la construcción de conocimiento geométrico a través de las situaciones adidácticas propuestas, y han desarrollado habilidades comunicativas, utilizan diversas formas de expresión y evidencian la asimilación de los conceptos y procesos geométricos relacionados con las actividades. Se observa un alto nivel de motivación y participación en los estudiantes y un buen ambiente de diálogo y respeto.

Respecto de las dificultades para el desarrollo del proyecto podrían mencionarse: problemas de disponibilidad de los recursos informáticos y tecnológicos necesarios para el desarrollo de la actividad (e. g., cámaras, proyector, sala de computadores). No se han experimentado dificultades en lo didáctico, metodológico o matemático.

Las oportunidades de interacción de los estudiantes con el software, el profesor y sus compañeros hacen posible el desarrollo de habilidades comunicativas y la construcción de conocimiento geométrico.

El diseño de las actividades permite que el docente abandone un rol de trasmisor de conocimiento y se convierta en un facilitador de la construcción de conocimiento en los estudiantes.

REFERENCIAS

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (1ª ed.). (D. Fregona, Tr.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Original publicado en 1986).
- Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: MEN.

ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA DE ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DEL COLEGIO PAULO VI - IED

Ana Rodríguez y Leonor Camargo

Universidad Pedagógica Nacional

eu.rodriguez@hotmail.com, lcamargo@pedagogica.edu.co

Se presentan avances de un trabajo de grado para optar al título de Maestría en Docencia de la Matemática, que tiene como propósito impulsar la actividad demostrativa de estudiantes de un colegio distrital, con el apoyo de un programa de geometría dinámica. El documento presenta un marco conceptual de referencia donde se definen el constructo actividad demostrativa y la argumentación. Se incluyen los elementos centrales del marco metodológico de la propuesta y un ejemplo ilustrativo del análisis realizado en el trabajo de investigación en el que se basa esta ponencia.

INTRODUCCIÓN

En este artículo presentamos avances de un estudio en curso que tiene como propósito impulsar la actividad demostrativa de estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria del colegio Paulo VI - IED, ubicado en la localidad de Kennedy en Bogotá (Colombia). Este estudio se interesa por la enseñanza de la geometría con mediación del programa de geometría dinámica Cabri, cuyo uso contribuye a la transformación de los ambientes de clase y favorece procesos de argumentación y justificación. La investigación contempla el diseño, la experimentación y la evaluación de una intervención de enseñanza relacionada con el estudio de propiedades de la circunferencia, congruencia de segmentos, perpendicularidad, simetría y propiedades de triángulos.

MARCO DE REFERENCIA

La actividad demostrativa, como la concibe el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional, es un constructo que articula los procesos de conjeturación y justificación por medio de los cuales se descubren hechos y validan propiedades en un ambiente que favorece la argumentación (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2012). El proceso de conjeturación tiene como

Rodríguez, A. y Camargo, L. (2015). La actividad demostrativa de estudiantes de grado octavo del Colegio Paulo VI - IED. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 187-194.

meta, según lo expuesto por Perry, Samper, Camargo y Molina (2013), la formulación de conjeturas, es decir, enunciados condicionales (tácitos o explícitos) de carácter general que se fundamentan “en la observación y análisis de indicios cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto, pero este tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad” (p. 17), y que pueden ser validados con hechos que se han aceptado previamente. Involucra otros procesos y acciones como: visualizar, explorar, formular una conjetura y verificarla.

El segundo componente de la actividad demostrativa corresponde a las acciones de justificación, que permiten encadenar argumentos con el fin de explicar matemáticamente lo que se piensa puede ser la validación de una conjetura formulada. Según Perry et al. (2013) el proceso de justificación incluye: identificar elementos, ya sean teóricos o empíricos, que puedan sustentar la afirmación en relación con las propiedades identificadas en la figura, organizarlos y formular un argumento, y construir una justificación deductiva. Tanto en los procesos de conjeturación como de justificación, los estudiantes elaboran argumentos, razón por la cual la actividad demostrativa promueve la argumentación. En el presente trabajo partimos del supuesto de que un argumento es un enunciado, oral o escrito, con el que se valida una aserción surgida a partir de una exploración. Diferenciamos dos tipos de argumentos, de acuerdo con Toulmin (citado por Krummheuer, 1995): argumento sustancial y argumento analítico. Generalmente, un argumento sustancial comienza con la aserción y continúa con la mención de los datos, como apoyo a la aserción. En un argumento analítico se mencionan los datos y la aserción pero, a diferencia del sustancial, la aserción se sostiene con un hecho geométrico previamente aceptado que constituye lo que Krummheuer (1995) denomina garantía.

METODOLOGÍA

La metodología de investigación corresponde a un enfoque cualitativo, descriptivo. El diseño es un experimento de enseñanza, de acuerdo con la perspectiva de McClain (2011). Se llevó a cabo con la participación de una docente investigadora que guía la clase y quien fue apoyada en el diseño de una secuencia de enseñanza, su aplicación y análisis por el equipo de investigación $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. El experimento de enseñanza se desarrolló en tres fases: diseño, experimentación y análisis retrospectivo.

ENUNCIADO	
P1	Dado un punto A , determine diez puntos que estén a la misma distancia de A .
P2	Construya dos segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, congruentes que tengan un punto en común.
P3	[Los estudiantes reciben un archivo en el que los puntos H, D, J giran alrededor de A , una circunferencia oculta de centro A . C y F son puntos libres, se mueven en cualquier dirección. G, E e I giran alrededor del punto B . Las circunferencias están ocultas.] Describa el comportamiento de cada punto, diciendo qué cambia y qué no cambia. Identifique las relaciones geométricas.
P4	Construya un segmento $\overline{AC}$ a partir de dos puntos A y B tal que B sea el punto medio del segmento.
P5	Construya un segmento $\overline{AB}$. A partir de este, construya un rectángulo $ABCD$.
P6	Dado un segmento $\overline{AB}$, úselo para encontrar puntos que equidisten de A y B .
P7	Dada una recta l y los puntos A, B y P , descubra y explique las características del comportamiento de B al arrastrar a A . [Los estudiantes reciben un archivo en el que se ha hecho la siguiente construcción, que no se les explica: A es simétrico de B con respecto a l . P pertenece a l .]
P8	Dada una recta l , un punto P que pertenece a l y un punto A libre, halle el punto C , simétrico de A con respecto a l , sin usar la opción “simetría axial de Cabri”.
P9	Dado dos puntos A, B y una recta l que contenga a B pero no a A , construya el simétrico de A con respecto a l y llámelo C . Caracterice y justifique el lugar geométrico de C cuando se arrastra l .

Tabla 1. Secuencia de problemas

La trayectoria de enseñanza involucra una secuencia de nueve problemas que estimulan la actividad demostrativa (ver Tabla 1). Los datos se obtuvieron a partir del registro de la interacción en clase durante nueve sesiones de trabajo; se realizó la recolección de los mismos en video y mediante la elaboración de un diario de campo que sirvió como registro para la discusión posterior con el grupo de investigación $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. El análisis de la información se realizó con base en las tres categorías surgidas a partir del marco teórico propuesto y una mirada preliminar a los datos. Para cada categoría se establecieron indicadores que nos permitieron describir e interpretar lo que los estudiantes decían o hacían (ver Tabla 2).

	CATEGORÍA	INDICADORES	CÓDIGO
Procesos que apoyan la actividad demostrativa	Visualización	Identifica elementos y propiedades que componen la figura.	Visual
	Exploración con geometría dinámica	Realiza una construcción auxiliar con herramientas de Cabri como circunferencias, rectas perpendiculares, rectas paralelas, triángulos, entre otras.	GD-ConstAux
		Utiliza la opción “traza” para obtener la trayectoria que describe un objeto al moverse.	GD- Traza
		Utiliza la opción “arrastre” para mover objetos.	GD-Arrastre
		Utiliza la opción “animación” para obtener el desplazamiento de un objeto de forma automática.	GD-Anima
		Usa la geometría dinámica para obtener medidas de longitud y de ángulos.	GD-Medidas
Actividad demostrativa	Actividad demostrativa (Conjeturación)	Detecta propiedades de las figuras en el proceso de construcción o exploración de las mismas.	AD-DetProp
		Verifica propiedades de las figuras haciendo uso de la geometría dinámica.	AD-VerProp
		Formula conjeturas en lenguaje informal al comunicar el resultado de una exploración.	AD-ForConj
	Actividad demostrativa (Argumentación para validar conjeturas)	Elabora argumentos de tipo sustancial.	AR-Sust
		Elabora argumentos de tipo analítico.	AR-Analit

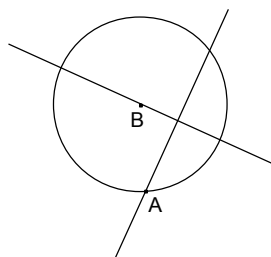
Tabla 2. Categorías de análisis

EJEMPLO ILUSTRATIVO DEL ANÁLISIS REALIZADO

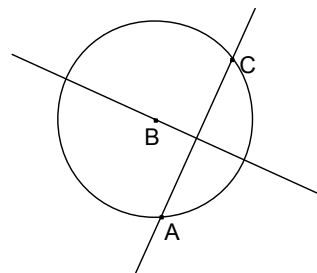
Para ilustrar el análisis (ver Cuadro 1), seleccionamos un extracto de un fragmento que corresponde a una discusión grupal en relación con la resolución del problema P. 8 de la secuencia, en donde los estudiantes, por medio de la

interacción en el aula con el grupo completo y con la profesora, generan argumentos de tipo sustancial y analítico. Previamente se había establecido la construcción de una circunferencia como herramienta auxiliar de verificación del movimiento del punto C .

- 9 Camila: [Realiza la construcción que indica Lina] [Figura 1] GD-ConstAux



- 30 Profesora: ¿Para qué utilizaron la recta perpendicular?
- 31 Jefferson: Para hallar el punto A , el punto C (corrige).
- 32 Profesora: ¿Para qué creen ustedes que utilizaron la recta perpendicular? AD- DetProp
AR-Sust
- 33 Lina: Con la recta [queríamos] formar un ángulo de 90 grados.
- 34 Coro: Para formar ángulos rectos de 90 grados.
- 35 Profesora: Ok, ¿Están de acuerdo con la construcción?
- 36 Coro: Sí.
- 37 Profesora: [...] ¿Dónde debe ir el punto C ?
- 38 Jessica: En la intersección de la circunferencia y la recta perpendicular. [Figura 2]



- 39 Profesora: Ubiquen el punto C .
- 40 Camila: [Completa la figura], [Figura 2] GD-ConstAux
- 41 Profesora: ¿Por qué creen que ahí debe ir el punto C ? AD-ForConjet

- 42 Lina: Porque equidista B de A y [de] C .
- 43 Profesora: ¿Y cómo saben que [B] equidista [de A y C]?
- 44 Jessica: Porque son radios de la circunferencia de centro B . AR- Analit

Cuadro 1. Ejemplo de análisis

En la interacción que se muestra en este fragmento, los estudiantes se valen del programa de geometría dinámica para identificar un procedimiento de construcción del punto C , simétrico del punto A . La actividad demostrativa corresponde a las acciones de exploración de la figura construida. Reportan a la profesora la construcción de una recta perpendicular a l que les permite ubicar el punto C , simétrico de A , en la intersección de la recta construida y la circunferencia de centro B . Los estudiantes conjeturan que B equidista de A y de C , y justifican por qué usan una circunferencia y una recta perpendicular para verificar las propiedades identificadas. El argumento que presenta inicialmente Lina (Figura 1) corresponde a un argumento sustancial porque los estudiantes justifican con base en lo que hicieron o en lo que pretendían, pero no en los hechos geométricos.

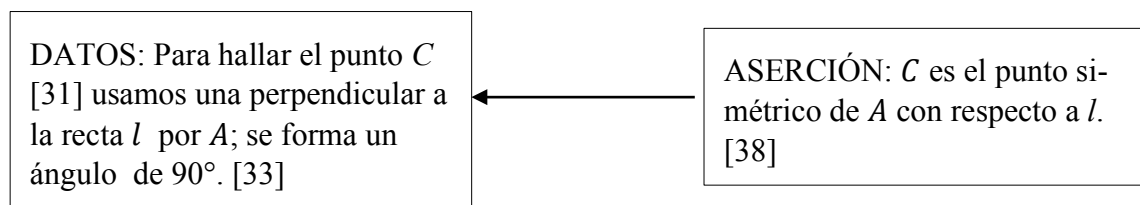


Figura 1. Argumento sustancial

En el siguiente argumento (Figura 2), en el que participan Lina y Jessica se combinan un argumento analítico y un argumento sustancial. El sustancial sucede cuando Lina explica que C es el simétrico de A porque “equidista B de A y [de] C ” refiriéndose a una de las propiedades de la simetría, pero no a la perpendicularidad del segmento $\overline{AC}$ con respecto a l . El argumento analítico sucede cuando Jessica responde a la profesora por qué puede decir que B equidista de A y de C : “Porque son radios de la circunferencia de centro B ” [44], con lo que se refiere a la congruencia de los radios de una circunferencia, hecho geométrico estudiado previamente.

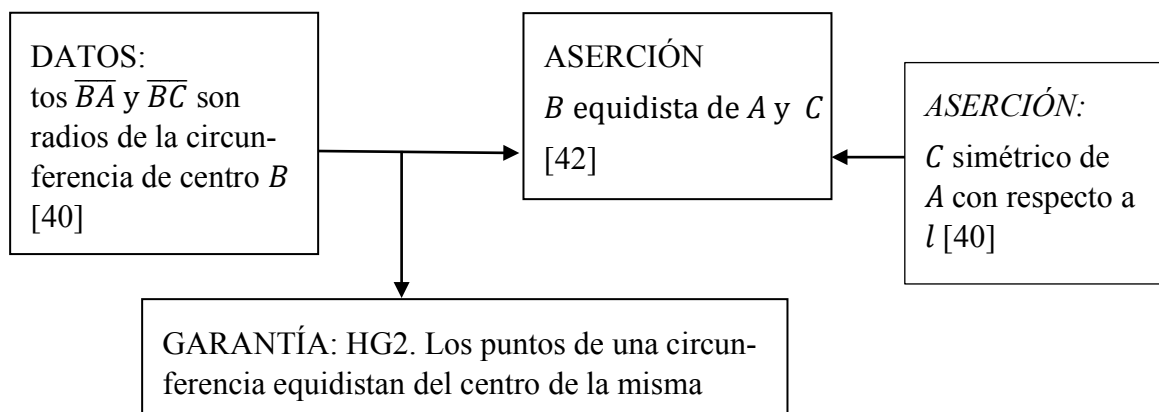


Figura 2. Argumento analítico

COMENTARIO FINAL

El impulso de la actividad demostrativa de estudiantes de educación básica es posible con la implementación de una intervención de enseñanza basada en una secuencia de problemas de construcción geométrica con el apoyo del programa Cabri de geometría dinámica. La actividad demostrativa en el aula favorece la producción de argumentos de tipo analítico en los estudiantes al posibilitar la proposición de conjeturas y la justificación de las mismas utilizando como garantía hechos geométricos previamente establecidos en el desarrollo de la aplicación de la secuencia de problemas.

Por medio de la aplicación de la secuencia de problemas diseñada se promovió un cambio en la forma tradicional de enseñar geometría en el colegio Paulo VI - IED. Se impulsó la utilización de la herramienta Cabri durante todo el proceso y se realizaron actividades de puesta en común que permitieron a los estudiantes comunicar las conjeturas y los argumentos producidos. La actividad demostrativa desarrollada en las clases permitió a los estudiantes familiarizarse con el lenguaje geométrico y generó la producción de argumentos de tipo sustancial inicialmente y analíticos a medida que se avanzaba en la secuencia de problemas.

REFERENCIAS

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

- McClain, K. (2002). A methodology of classroom teaching experiments. En S. Goodchild y L. English (Eds.), *Researching mathematics classrooms: A critical examination of methodology* (pp. 91-111). Westport, EUA: Praeger Publishers.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2012). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En L. Camargo (Comp.), *Investigaciones en educación geométrica* (pp. 127-148). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.



Pósteres



CONSTRUCCIÓN DE SECCIONES CÓNICAS APOYADA POR GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL Y GEOMETRÍA DINÁMICA

Sandra Gómez y William Cárdenas

Universidad Pedagógica Nacional

dma_sgomez913@pedagogica.edu.co, dma_wcardenas989@pedagogica.edu.co

Mediante un software de geometría dinámica se relacionan los pliegues por doblado de papel con las rectas tangentes en la construcción de las cónicas.

Ramírez y Jaramillo (2010) afirman que el doblado de papel es una alternativa que posibilita el mejoramiento del razonamiento geométrico a partir de la visualización y la experimentación, ya que permite al estudiante, por medio de los pliegues realizados en el papel, identificar algunos conceptos geométricos, y abre la posibilidad de justificar dentro de un sistema axiomático las construcciones hechas. Esta idea la argumenta Royo (2002, citado en Ramírez y Jaramillo, 2010, p. 340) cuando afirma que: “el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel”.

En este póster se mostrará, por una parte, el proceso de construcción de las secciones cónicas (i. e., parábola, elipse e hipérbola) recurriendo a la geometría del doblado de papel; por otra parte, haciendo uso de un software de geometría dinámica (Geogebra), se podrá ver la relación entre los pliegues generados en el papel y las rectas tangentes a dichas curvas.

Haciendo uso de la geometría dinámica y realizando en esta procedimientos análogos a los efectuados con la geometría de papel para cada cónica, es posible identificar los puntos, vértices y focos y además, comprobar que los pliegues trazados corresponden a las rectas tangentes de las cónicas construidas a partir de dichos puntos.

La Tabla 1 expone las construcciones de las secciones cónicas usando geometría del doblado de papel y también geometría dinámica.

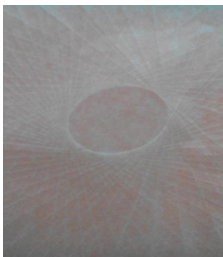
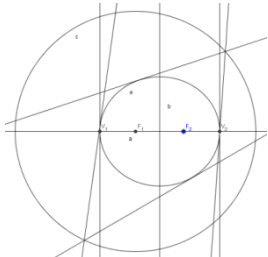
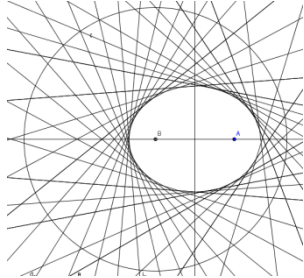
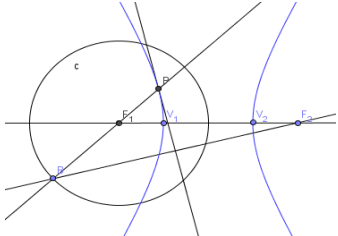
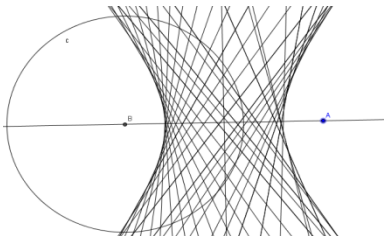
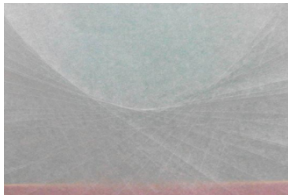
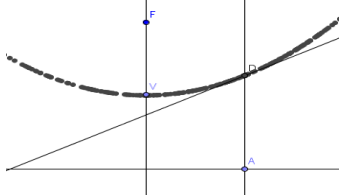
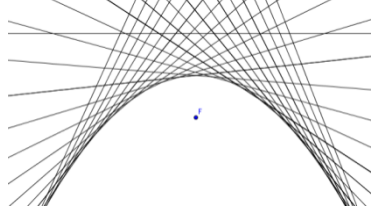
Construcción con papel	Construcción con geometría dinámica	
	Foco(s) y vértice(s)	Cónica formada
		
		
		

Tabla 1. Construcciones de cónicas con pliegues en papel y con geometría dinámica

REFERENCIA

Santa, Z. M. y Jaramillo, C. M. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 31, 338-362. Acceso: <http://revistavirtual.ucn.edu.co/>

UNA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE S_n^m

Miguel Hurtado

Gimnasio La Khumbre

dma.mhurtado@pedagogica.edu.co

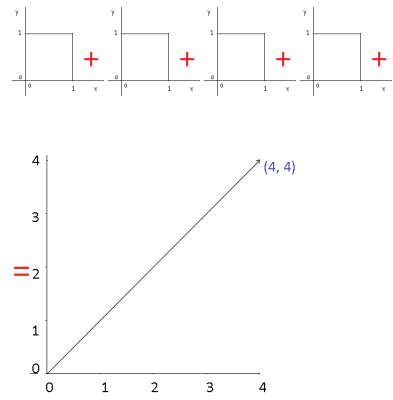
Se expone una representación geométrica de la suma de las potencias (S_n^m), mediante la integral definida, aprovechando que en el trabajo de grado titulado “Observaciones sobre la suma de las m -ésimas potencias de los primeros n enteros positivos y algunos otros resultados relacionados” (elaborado por el autor en 2013 en la Universidad Pedagógica Nacional) se encuentran nuevos métodos, mediante el cálculo, para obtener las fórmulas de estas sumas.

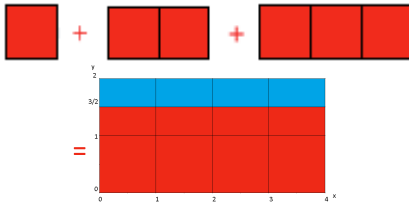
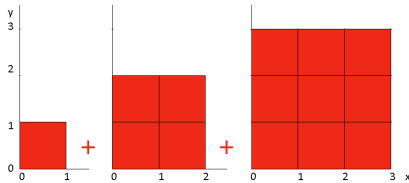
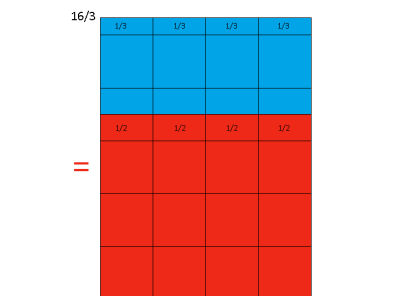
INTRODUCCIÓN

Una suma de la forma $S_n^m = 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \dots + (n-1)^m$, con m entero positivo, se llama la suma de las m -ésimas potencias de los primeros enteros positivos. Históricamente mediante estas sumas se obtuvieron métodos para solucionar algunas cuadraturas, lo que hoy en día se entiende como el área bajo la curva o la integral definida (González, 1995). De forma recíproca, en lo que sigue, se muestra una representación geométrica de estas sumas.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE S_n^m MEDIANTE LA INTEGRAL

La siguiente tabla muestra un procedimiento para obtener las fórmulas de S_n^m (Hurtado, 2013) y una representación geométrica de las mismas.

Procedimiento recurrente	Obtención de las fórmulas para S_n^m	Representación geométrica mediante la integral definida
Se multiplica por m a S_n^{m-1}, se cambia las variables i, n, por la variable x real, y se integra: Al lado izquierdo de la fórmula, desde límite inferior 0 hasta el límite superior i, y Al lado derecho de la fórmula, a cada potencia m de x, desde el límite inferior $\frac{1}{m+1}$ hasta el límite superior n.	$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$ En particular, para $n = 4$ se tiene que: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Y se representa de forma geométrica como sigue:	

$\sum_{i=0}^{n-1} \int_0^i 1 \, dx = \int_{\frac{1}{n^2}}^n x \, dx$ La sumatoria de las áreas bajo la curva de la función $y = 1$ en intervalos de $[0,1], [0,2] \dots [0, n-1]$ es igual al área bajo la curva de la función $y = x$ en $\left[n^{\frac{1}{2}}, n\right]$.	$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ De los términos, el primero representa el rectángulo de área mayor, y los de color, azul y rojo representan áreas correspondientes al mismo color.	 El área de color rojo siempre se suma, y el área de color azul se resta, de tal suerte que, el área roja resultante es la suma deseada.
$\sum_{i=0}^{n-1} \int_0^i 2x \, dx = \int_{\frac{1}{n^3}}^n x^2 \, dx - \int_{\frac{1}{n^2}}^n x \, dx$ La sumatoria de las áreas bajo la curva de la función $y = 2x$ en intervalos de $[0,1], [0,2] \dots [0, n-1]$ es igual al área bajo la curva de la función $y = x^2$ en el intervalo $\left[n^{\frac{1}{3}}, n\right]$ menos el área bajo la curva de la función $y = x$ en el intervalo $\left[n^{\frac{1}{2}}, n\right]$.	$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)$ Operando se tiene $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$	 
⋮	⋮	⋮

CONCLUSIÓN

Se obtiene una representación geométrica de S_n^m , mediante la integral definida.

REFERENCIAS

- González, P. (1995). *Las técnicas del cálculo: Fermat, Wallis y Roberval*. Actas del Seminario Oratova 2. Recuperado en octubre de 2013, de: http://fundacionorotava.org/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/act2_pdf_web/a2_c016w.pdf
- Hurtado, M. (2013). *Observaciones sobre la suma de las m-ésimas potencias de los primeros n enteros positivos y algunos otros resultados relacionados* (tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN ARQUITECTURA. CASO: CATEDRAL METROPOLITANA DE MEDELLÍN

Daniel Merchán y Marcela Echeverri

Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín

dmerchanc@unal.edu.co, maecheverrisa@unal.edu.co

Se realizó un estudio de la Catedral Metropolitana de Medellín, utilizando herramientas que nos proporcionan las geometrías descriptiva y euclidiana, para entender el planteamiento inicial del diseño arquitectónico, y las posibles relaciones intrínsecas que hay en su geometría. Partimos del hecho de que la catedral está construida en su totalidad. El análisis de índole hipotético realizado refleja el orden en la construcción, otorgándole identidad al espacio.

APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN EL ANÁLISIS FORMAL

El análisis de la geometría de un proyecto ya construido permite leer, interpretar y comprender el espacio arquitectónico desde su forma, y proponer hipótesis relacionadas con la concepción del proyecto. El objeto del análisis que se expondrá es la Catedral Basílica Metropolitana de la Inmaculada Concepción de María, ubicada en el Parque de Bolívar, en pleno centro de la ciudad de Medellín.

Su construcción es producto de un momento histórico de la ciudad, del crecimiento y afirmación de ella como centro poblacional principal; en ese contexto, la municipalidad plantea la necesidad de construir un espacio monumental para el culto religioso. Por los cánones típicos de la época, se utilizó el estilo románico (Figura 1).

Para iniciar el análisis formal de la catedral se utilizan, como bases teóricas y prácticas fundamentales para entender la organización de los espacios y la concepción del diseño, conceptos como la simetría, la composición (i. e., la forma como se distribuyen los espacios en su interior), la proporción, la sección áurea, la semejanza visual, la congruencia de objetos, la existencia de centros específicos y de circunferencias inscritas y circunscritas, la presencia de las distintas figuras geométricas planas y las relaciones entre ellas (Figura 3).

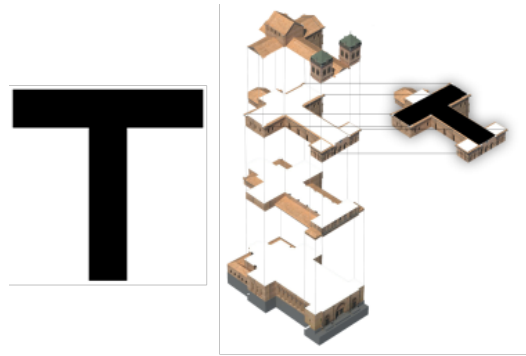


Figura 1. Perspectivas. Cortes a diferentes alturas con énfasis en la cruz, estilo románico

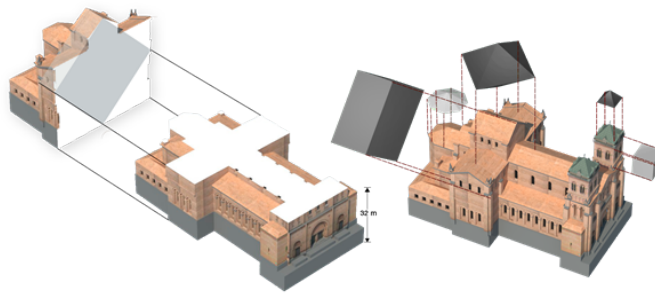


Figura 2. Sólidos presentes en la Catedral Metropolitana, según la geometría descriptiva

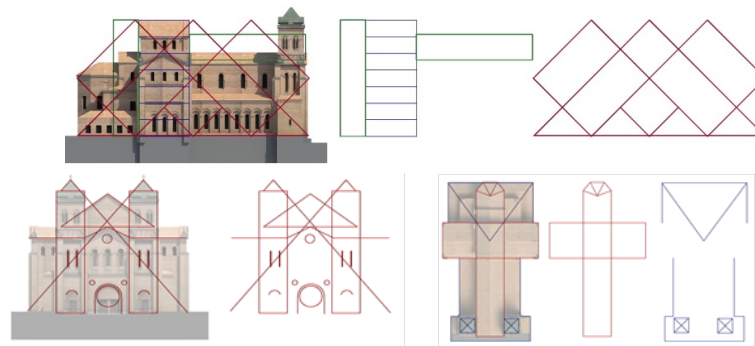


Figura 3. Geometría plana presente en fachadas y cubiertas

CONCLUSIONES

En el caso estudiado se observó la presencia de geometría (Figura 2), desde el inicio de la construcción, generando orden en el diseño, además de la visualización de armonía en toda su composición. Es así como la geometría es una herramienta fundamental para crear conocimiento, partiendo de formas planas simples y su relación con el espacio proyectual. En el análisis formal se infiere que hay una relación entre la totalidad espacial y la geometría plana.

ESTUDIO DE SUPERFICIES CON CURVATURA MEDIA $H = 0$ Y $H \neq 0$: UN ANÁLISIS MATEMÁTICO Y FÍSICO

Diego Pacheco y Leidy Suárez

Universidad Nacional de Colombia

lsuarezr@unal.edu.co, dapachecos@unal.edu.co

Se reporta un estudio, desde la geometría diferencial, sobre el problema de superficies con curvatura media $H = 0$ y $H \neq 0$, que se aplica a la geometría de películas y pompas de jabón. Como resultado del estudio, se obtiene la ecuación de Laplace-Young, de la cual podemos derivar el concepto de tensión superficial y mediante este comprender el fenómeno de capilaridad. Tal resultado, se contrasta con aproximaciones realizadas por la mecánica y la termodinámica, encontrando relaciones analógicas entre estas. Por otra parte, se analizan dos configuraciones de las películas de jabón, en forma de catenoide y como esfera. Para esta última configuración se discute el problema isoperimétrico.

Las pompas de jabón –juguete maravilloso y motivo para el arte– son también objeto de estudio en la matemática. Una pompa tiene la menor área posible, razón por la cual las superficies que obtenemos se denominan superficies minimales. Matemáticos como Laplace, Young y Gauss mostraron que la superficie de separación entre un líquido y un gas obedece a una ecuación que sugiere un concepto matemático: la curvatura media de una superficie (H). Según Deserno (2004) se cumple que una superficie es mínima si

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = 0.$$

Además del plano, las siguientes superficies son minimales: catenoide, helicoide, superficies de Scherk, etc. Cabe destacar que si se toman dos aros de alambre, muy juntos, se introducen en agua con jabón y, al sacarlos, se separan un poco se tendrá una superficie de forma de catenoide. Pero, no solo la matemática ha abordado este problema de las pompas de jabón, sino que tales deducciones matemáticas han sido usadas por la física. El principio por el cual la pompa tiene forma esférica se deriva del principio físico de la tendencia de cualquier sistema físico a buscar el estado de menor energía. En la película jabonosa, el estado de menor energía es la tensión superficial y es proporcional a su área. Así, la geometría diferencial permite entender el

concepto físico de la tensión superficial, siendo Laplace y Young quienes mostraron que la superficie de separación líquida obedece a la ecuación:

$$p_i - p_e = -2H\sigma$$

donde σ es la superficie que separa dos medios sometidos a ambos lados por presiones p_i y p_e . Con la fórmula de Laplace se puede dar una explicación del fenómeno de capilaridad, para explicar el ascenso de agua a través de un tubo de pequeño diámetro interno. De otra parte, se discute cuál es el volumen encerrado más pequeño por una superficie, problema isoperimétrico¹, que surge como consecuencia de la ecuación de Laplace-Young, con H constante.

RESULTADOS

En un pompa esférica con radio R , se demuestra la expresión

$$\Delta p := p_i - p_e = \frac{2\sigma}{R}.$$

Usando aproximaciones de termodinámica y mecánica clásica, se obtiene la expresión de Laplace-Young.

El aumento de líquido es por lo tanto inversamente proporcional al radio interno del capilar, y la presión también será constante, dada por:

$$h = \frac{l_c^2 \cos \vartheta}{R} \leq \frac{l_c^2}{R}, \text{ con } l_c = \sqrt{\frac{2\sigma}{g\Delta\rho}}.$$

En la presentación del póster, a partir del cálculo variacional y la geometría diferencial se analizará la forma de catenoide de las pompas, en una configuración particular, y se discutirá el problema isoperimétrico.

REFERENCIA

Deserno, M. (2004). *Notes on differential geometry with special emphasis on surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Original no publicado, Departamento de Química y Bioquímica, UCLA.

Rousseau, C. y Saint-Aubin, Y. (2008). *Mathematics and technology* (C. Hamilton, Tr.). New York, EUA: Springer. Recuperado el 27 de mayo de 2015, de <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~dnovikov/EngMath13/RMAT.pdf>

¹ Se pretende hallar entre todas las curvas cerradas y simples de perímetro L , la que encierra una región de mayor área (Rousseau y Saint-Aubin, 2008).

FLEXÁGONOS

Laura Ramírez, Andrés Acosta y Rafael Angarita

I.E.D. Villas del Progreso

mastervidepr@gmail.com, angaritacervantes@gmail.com

Queremos compartir las construcciones y caracterización de algunos flexágonos por medio de los diagramas de Tukey-Tuckerman. Desarrollamos el trabajo en el grupo de matemáticas Henry Hopf en el IED - Villas del Progreso (Bogotá, Colombia) para fundamentar desde lo manual la representación y creación de algunos fractales clásicos.

Para empezar, un flexágono es un objeto plano con forma de polígono: cuadrado, rectángulo, hexágono, generado a partir de tiras de papel, con la particularidad de cambiar su cara cuando se le dobla (Gardner, 1988/1959, p. 1). El interés que puede despertar desde el punto de vista matemático radica en su construcción a partir de una tira de papel que se pliega sobre la tira misma, con la pretensión de obtener la mayor cantidad de caras posibles. Los flexágonos se nombran indicando primero la cantidad de caras y luego su forma. Por ejemplo, un flexágono de forma hexagonal, de seis caras, se llama hexahexa-flexágono. Uno de los flexágonos más sencillos de construir es el trihexaflexágono.

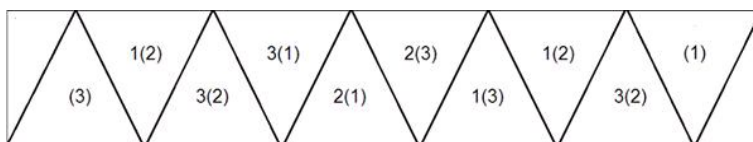


Figura 1. Plantilla para la construcción de un trihexaflexágono

La Figura 1 muestra el diagrama para construir un trihexaflexágono; los números indicados entre paréntesis se escriben en la cara posterior de la tira, los otros, en la cara anterior. El proceso de plegado consiste en doblar la tira por las líneas diagonales, colocando los triángulos, uno encima de otro, de manera que coincidan parejas de números iguales. Al finalizar, la pestaña marcada solo con (3) debe ubicarse de manera que las dos caras visibles tengan todos los triángulos respectivos con el mismo número (en particular, una de las caras debe mostrar seis treses). Con esto, basta plegar el flexágono de manera que podamos hacer visible la tercera cara.

El orden en que van apareciendo las caras, a medida que doblamos el flexágono, puede representarse por medio de los llamados diagramas de Tukey-Tuckerman. Por ejemplo, en el caso del trihexaflexágono, el diagrama queda como se indica en la Figura 2.

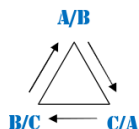


Figura 2. Diagrama de Tukey-Tuckerman para el trihexaflexágono

Una de las variaciones del diagrama de Tuckey-Tuckerman para el dodecahexaflexágono es el indicado en la Figura 3. ¿Puede usted obtener cada una de las caras de dicho flexágono?

El grupo Henry Hopf ha hecho un acercamiento, desde los flexogramas, a la representación de los procesos de contrucción de algunos fractales con el objetivo de hacer comprensible este tema en las clases de matemáticas.

Puede encontrar una plantilla de construcción del dodecahexaflexágono en la dirección electrónica <http://www.eighthsquare.com/12-gon.html>

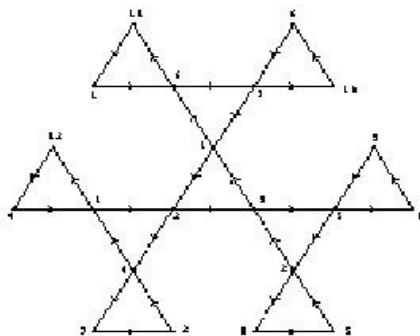


Figura 3. Diagrama de Tuckey-Tuckerman para el dodecahexaflexágono

REFERENCIAS

Gardner, M. (1988/1959). *Hexaflexagons and other mathematical diversions*. Chicago, EUA: The University of Chicago Press Edition.

ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN SUPERFICIES MÍNIMAS ELABORADAS CON PELÍCULAS DE JABÓN

Leidy Suárez y Diego Pacheco

Universidad Nacional de Colombia

lsuarezr@unal.edu.co, dapachecos@unal.edu.co

El trabajo que se reporta aquí busca implementar un “laboratorio” en la enseñanza de geometría usando figuras con películas y pompas de jabón. Se plantea que mediante la elaboración de tales configuraciones, el estudiante, a través de lo que visualiza, puede comprender qué es una superficie mínima y cómo se forman ciertas figuras (e. g., catenoide, helicoide, superficie de Scherk y cinta de Möbius). Así, el estudiante aprende geometrías poco usuales y muy usadas en arquitectura y tecnología. Se estudia, además, en las figuras con jabón, el problema de Jakob Steiner, el punto de Fermat, el cálculo del camino mínimo entre dos puntos y la aplicación de las leyes de Plateau. Estas leyes permiten solucionar problemas de recorridos mínimos aplicados a la vida cotidiana.

Las películas de jabón son estructuras formadas por una capa de agua y de jabón, determinadas por la tensión superficial; estas películas tienden a conseguir la configuración mínima de las superficies. Las superficies mínimas fueron objeto de estudio del matemático Joseph-Louis de Lagrange, y, más tarde, el físico Joseph Plateau fue uno de los primeros en experimentar estas superficies con películas de jabón. Durante estos experimentos se dio cuenta de que al sumergir una estructura cerrada en una disolución jabonosa siempre se forma una película de jabón, con lo cual en 1873 planteó el problema que lleva su nombre y que formula que para cada curva cerrada se puede hallar la superficie con área mínima (Muñoz, 2006). Si se realizan experimentos con placas paralelas y diferentes configuraciones de aristas verticales se observan películas de jabón rectangulares que se unen para formar caminos entre dichas aristas; al proyectar rectas a un plano superior se determina el recorrido mínimo para unir los vértices de un polígono; este recorrido tiene la propiedad del punto de Fermat.

Tal propiedad describe que la suma de las distancias de los vértices a dicho punto es mínima y los tres segmentos que se unen en él forman ángulos de 120 grados. Esta y otras observaciones experimentales llevaron a Plateau a

postular tres leyes que le permitieron describir la forma y configuración de las películas de jabón:

- Primera ley: Si varias láminas de jabón se cortan, lo hacen de tres en tres a lo largo de una línea y formando entre sí ángulos de 120 grados.
- Segunda ley: Cuatro de las líneas rectas, todas formadas por el corte de tres superficies, se cortan en un punto y el ángulo formado por cada par de ellas es de 109 grados y 28 minutos.
- Tercera ley: Una película de jabón que pueda moverse libremente sobre una superficie, se interseca con ella formando un ángulo de 90 grados.

Se han planteado numerosos problemas en los que se quiere minimizar la distancia entre tres o cuatro puntos; específicamente, el geómetra Jakob Steiner generalizó la situación a n puntos, enunciando el problema “*Dados n puntos en el plano, encontrar m puntos tales que los $n + m$ puntos se puedan unir con un conjunto de segmentos cuya longitud total sea mínima*”. En la actualidad, el problema de Jakob Steiner se aplica en diferentes ramas (e. g., diseño de circuitos integrados, diseño de redes de comunicación) (Bragado, 2009).

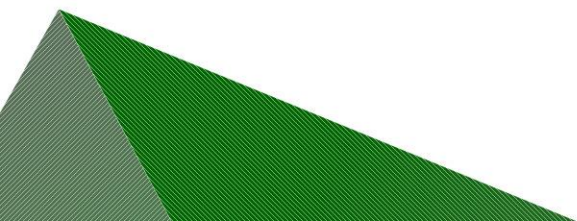
Utilizando herramientas de la geometría euclidiana se puede dar solución a diferentes problemas. Estos problemas pueden ser resueltos por estudiantes de secundaria o nivel universitario. Con la actividad que se desarrollará en la presentación del póster se busca que el estudiante, a través de la elaboración de las películas de jabón y la orientación teórica del docente, pueda comprender el concepto de superficie mínima y pueda recrear este tipo de superficies, además de saber por qué las pompas adoptan la superficie esférica.

REFERENCIAS

- Bragado, J. (2009). *Películas de jabón y superficies mínimas*. Denia, Alicante. Disponible en: <http://carnavaldematematicas.bligoo.es/peliculas-de-jabon-y-superficies-minimas>
- Muñoz, V. (2006). *Pompas de jabón*. Original no publicado, Universidad Autónoma de Madrid, España. Recuperado el 27 de mayo de 2015 de: https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/VicenteMunoz/pompa



Anexo



RESÚMENES DE CONFERENCIAS Y CURSILLOS DE INVITADOS QUE NO PRESENTARON ARTÍCULO

UNA TESELACIÓN DEL PLANO PARA WALLIS

Ernesto Acosta

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

ernesto.acosta@escuelaing.edu.co

A mediados del siglo XVII, los matemáticos estaban todavía preocupados por resolver el problema de la cuadratura del círculo. En el intento, John Wallis obtuvo un resultado sorprendente, que publicó en 1656 en su libro *Arithmetica Infinitorum*, el cual se conoce en la actualidad como la Fórmula de Wallis:

$$\frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \frac{6 \times 6}{5 \times 7} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

Se han dado muchas demostraciones de este resultado, usando diferentes herramientas del cálculo y de la variable compleja, varias de ellas propuestas por Euler. A finales de 2007, el matemático sueco Johan Wastlund, publicó en la revista *American Mathematical Monthly* una demostración de la Fórmula de Wallis usando herramientas del álgebra y la geometría elementales. En esta conferencia, se presentará una versión modificada de la demostración de Wastlund mediante la construcción de una teselación muy particular del plano.

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE PROYECTOS

María Aravena

Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

maravenadiaz@gmail.com; maravena@ucm.cl

La conferencia se enfoca en la modelación y proyectos para los distintos niveles del sistema educativo. Se ofrecen orientaciones para el diseño, la implementación y la evaluación, tomando como base la teoría de la actividad y unos principios matemáticos y didácticos que ayuden a fomentar en los alumnos el desarrollo de competencias globalizadoras. La evidencia empírica ha demostrado que los alumnos desarrollan la capacidad de resolver problemas con soluciones múltiples; los prepara a usar la matemática en contextos; fomenta el análisis crítico del rol de la matemática en la sociedad, ayuda a la comprensión de los conceptos y métodos y, sobre todo, eleva

significativamente su capacidad de razonamiento matemático, con lo cual es una metodología prometedora para Latinoamérica.

UNA CAJA DE GEOMETRÍAS PROVENIENTES DE DIVERSAS COMUNIDADES DE PRÁCTICA

Armando Aroca

Universidad del Atlántico

armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co

Meteré seis veces la mano en una caja y, cada vez, iré sacando un artefacto producido en una comunidad de práctica, esto a medida que avanzan las diapositivas. Primero, revelaré una mochila arhuaca tejida en la Sierra Nevada de Santa Marta; luego una copa o vaso ceremonial de los pastos y quillacingas cuyos originales reposan en Popayán; después sacaré una cimbra hecha en Palmira y con la ayuda del público la usaremos; posteriormente sacaré unos monederos y una panera de palma de iraca hechos por artesanos de Usiacurí; luego, saldrá rápidamente una cometa que lamentablemente no podremos volar, pero que, en algún momento, sirvió para pescar en Bocas de Ceniza en Barranquilla; y por último, sacaré de *la caja de geometrías* un mezclador, un trinche de dos dientes, un martillo y una bateíta de madera que elaboran artesanos en Córdoba, corregimiento de Buenaventura. Se preguntarán: ¿qué tiene que ver esto con la geometría y sus aplicaciones? Mostraremos los resultados de estas investigaciones desde un enfoque etnomatemático, teniendo presente que la actividad del *diseño* juega un papel esencial en lo que concebimos como geometría, y que esta es de carácter sociocultural. De esta forma, pretendemos dar respuesta a la pregunta anterior para no salir avergonzados del recinto.

BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONTROL GEOMÉTRICO

Leonardo Cano

Universidad Sergio Arboleda

leonardo.cano@usa.edu.co

En esta conferencia damos una breve introducción a los sistemas de control en un contexto geométrico tomando como eje de la misma dar una idea de la prueba del Teorema de Chow-Rashevskii.

TRAZAS REGULARIZADAS, DETERMINANTES REGULARIZADOS Y OTRAS HERRAMIENTAS DE LA GEOMETRÍA EN DIMENSIÓN INFINITA

Alexander Cardona

Universidad de los Andes

acardona@uniandes.edu.co

Durante esta charla comenzaremos recordando algunas ideas básicas del álgebra lineal y presentaremos un método de regularización, a través de la función zeta de Riemann, que permite definir y estudiar la geometría de espacios modelados localmente por espacios de dimensión infinita. También ilustraremos la relación que hay entre estas herramientas regularizadas (principalmente trazas y determinantes) y sus contrapartes finito-dimensionales, así como algunas de sus aplicaciones en física teórica y en el estudio de la topología de espacios de dimensión finita.

PRUEBA Y ARGUMENTACIÓN EN EL MARCO DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Nadia Douek

Université de Nice, Francia

ndouek@wanadoo.fr

En esta conferencia consideramos que la prueba es un tipo de argumentación, aunque otros tipos de argumentación intervienen en la producción de pruebas. Iniciamos con una reflexión sobre las actividades de producción y comprensión de pruebas inspirada en parte del análisis realizado por Lolli sobre los tipos de razonamiento en la actividad matemática. Presentamos una herramienta de análisis de la argumentación, articulando la elaboración de Toulmin sobre la argumentación y el análisis de la racionalidad propuesta por Habermas, adaptada a la actividad matemática por Boero y Morselli. Esta ¿herramienta? permite completar la reflexión sobre algunos puntos específicos de la geometría euclidiana.

Respecto a la enseñanza y el aprendizaje, y considerando la producción o la comprensión de pruebas como resolución de problemas en varios niveles, apuntamos al enfoque dialéctico entre creatividad y control. Eso en coherencia con el análisis de la actividad matemática presentada. A partir de algunas hipótesis sobre condiciones que favorecen la actividad y el aprendizaje de los alumnos, reflexionamos sobre la instrumentalización de las herramientas de

análisis mencionadas anteriormente, que ofrecen al docente medios para estimular el desarrollo de competencias argumentativas y de resolución de problemas de los estudiantes.

Concluimos con una propuesta de secuencia didáctica de producción de conjeturas y comprensión de prueba, diseñada teniendo en cuenta el marco teórico vygotskiano de la didáctica de los dominios de experiencia de Boero y Douek. Esto es una espiral dinámica de producción individual, debate colectivo e implementación de argumentos matemáticos de parte del docente que intenta desarrollar el manejo consciente de los alumnos de los diversos modos de razonamiento. Dicha espiral regresa a una actividad especial de narrativa de la prueba que apunta a la asimilación de la construcción colectiva con la guía del docente y la evaluación por el docente de esta asimilación.

MODELO PARA EL ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

Jorge Fiallo

Universidad Industrial de Santander

jfiallo@uis.edu.co

Con el objetivo de aportar herramientas para el análisis de los procesos de argumentación y demostración de los estudiantes, tanto para el profesor de matemáticas, como para el investigador en Educación Matemática, presentamos y ejemplificamos un modelo de análisis soportado en: la integración del modelo cK ϕ (de Nicolas Balacheff) al conocido modelo de argumentación de Toulmin; el método de análisis de las argumentaciones propuesto por Christinne Knipping; y los tipos de demostración propuestos por el autor de la conferencia.

GEOMETRÍA Y NANOCOSMOS

Édgar González

Universidad Javeriana

edgar.egonzalez@gmail.com

Se presenta el papel que está jugando la geometría en la transición hacia las nuevas dimensiones del conocimiento que ofrecen las nuevas tecnologías emergentes; en particular, las que se derivan de la gran revolución nanotecnológica. Las propiedades que exhibe la materia a estas escalas se en-

cuentran drásticamente determinadas, entre otros aspectos, por la forma geométrica. Así, el diseño y manufactura de nuevos materiales se hace a partir de la programación de la composición, la relación entre volumen y superficie, y por la forma geométrica. En esta era de transformación y transición hacia nuevas formas de adquirir y aplicar el conocimiento científico, la geometría se está convirtiendo en una de las componentes esenciales para favorecer el desarrollo de un pensamiento creativo e integral que se requiere para asumir, a partir de la ciencia y la tecnología, los desafíos que debe afrontar la sociedad del siglo XXI.

¿VERSIONES HISTÓRICAS NO MULTIPLICATIVAS DE LA PROPORCIONALIDAD?

Édgar Guacaneme

Universidad Pedagógica Nacional
guacaneme@pedagogica.edu.co

La Historia de las Matemáticas ofrece un ambiente sinigual para ampliar la visión usual sobre los objetos matemáticos y sobre las formas de pensar en Matemáticas. La historia de la proporcionalidad brinda la posibilidad de reconocer al menos dos teorías de la proporción que recurren a sendos tratamientos aditivos de las magnitudes geométricas. El estudio de aspectos centrales de estas dos teorías logra confrontar el saber matemático usual de los profesores e investigadores sobre las ideas de razón, proporción y razonamiento proporcional; ofrece opciones para un tratamiento curricular radicalmente innovador de la proporcionalidad; y abre una novedosa ventana a la investigación sobre el razonamiento proporcional aditivo.

ALGUNAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA

Élgar Gualdrón

Grupo de Investigación EDUMATEST, Universidad de Pamplona
elgargualdron@yahoo.es

La conferencia pretende exponer algunas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la proporcionalidad geométrica. Tales dificultades se evidenciaron al analizar los resultados obtenidos después de experimentar y evaluar una unidad de enseñanza diseñada sobre el tema y dirigida a estudiantes colombianos de noveno grado (14-15 años). Para el diseño de la unidad experimental se tuvo en cuenta el modelo de razonamiento

de Van Hiele, aspectos de la fenomenología de Freudenthal, y los trabajos de Hart y colaboradores en cuanto a proporcionalidad. Los resultados del estudio sugieren que los estudiantes presentan serias dificultades para comprender el concepto, principalmente comprender que la estrategia aditiva no es la correcta.

GEOMETRÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Mikhail Malakhaltsev

Universidad de los Andes

mikarm@uniandes.edu.co

¿Cómo resolver una ecuación diferencial ordinaria $F(x, y, y') = 0$? Resulta que “los trucos mágicos” que usamos para resolver varios tipos de estas ecuaciones, en el fondo, tienen la misma base: existencia de simetría. ¿Pero qué es una simetría de ecuación diferencial y cómo usar las simetrías para encontrar soluciones? Veremos que la geometría diferencial nos ayuda a responder estas preguntas de manera muy natural. Entonces, en la charla vamos a presentar una descripción geométrica de las ecuaciones diferenciales, explicar cómo encontrar sus simetrías y mostrar ejemplos prácticos de uso de las simetrías para resolver ecuaciones diferenciales. El contenido de la charla podría ser utilizado para seminarios con los estudiantes de universidad.

LA GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA ERA DIGITAL

Yves Martin

Université de la Réunion, Francia

yves.martin45@orange.fr

Así como la sociedad está cada vez más digitalizada, la geometría dinámica sigue ese movimiento haciendo evolucionar las interfaces y sus potencialidades. En la primera parte de la conferencia veremos las especificidades de CaRMetal y el interés didáctico de su uso en el aula. En la segunda parte abordaremos el software DGPad para tabletas táctiles, del mismo desarrollador de CaRMetal. Examinaremos la revolución de la interfaz, con sus nuevas paletas contextualizadas y sus posibilidades 3D. Finalmente, veremos las expresiones algebraicas de DGPad y la integración de widgets, y los usos pedagógicos de los mismos en el colegio.

MATRICES DE RIORDAN ASOCIADAS A LA COMBINATORIA Y A LA TOPOLOGÍA DE “JOINS” ITERADOS DE COMPLEJOS SIMPLICIALES

Manuel Morón

Universidad Complutense de Madrid, España

ma_moron@mat.ucm.es

Una de las herramientas principales para el estudio de la combinatoria de los complejos simpliciales es el f-vector (equivalentemente, el f-polinomio) del complejo que contiene toda la información sobre el número y la dimensión de las caras de dicho complejo. En esta conferencia queremos poner de manifiesto que ciertas construcciones iterativas en geometría y topología se pueden codificar por medio de matrices de Riordan muy simples, de hecho, de construcción muy similar a la del triángulo de Pascal. Demostraremos además que el patrón general de las matrices de Riordan aparece, no solo en el problema de contar caras, sino también en el cómputo de los números de Betti reducidos de dicho complejo. Mostraremos también una propiedad combinatoria que depende exclusivamente del complejo 0-dimensional en el que empezamos a iterar y cuya invariancia en el marco apropiado se prueba completamente aplicando propiedades simples de las matrices de Riordan. A lo largo de la charla también se pondrá de manifiesto cómo el “patrón Riordan” está presente en algunos otros aspectos del estudio combinatorio y topológico de los complejos simpliciales.

ESPACIOS TOPOLÓGICOS EXTREMADAMENTE TO

Néstor Pachón

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

nestor.pachon@escuelaing.edu.co

Usando el operador de super-interior, se presenta un nuevo axioma de separación, entre los espacios débilmente T_2 (*weakly* Hausdorff) y los espacios T_0 , pero que no está entre los débilmente Hausdorff y los T_1 , ni entre los T_1 y los T_0 . El estudio de axiomas de separación intermedios ha resultado ser de utilidad en distintos campos del conocimiento, como en aquellos que hacen uso de la topología digital. La conferencia tiene la intención de ofrecer el estudio de este tipo de espacios, como un tema de investigación para estudiantes interesados en estos temas.

LAS CUASI PROPORCIONES EN LA GEOMETRÍA DE MENGOLI

Leonardo Solanilla* y Ana Cely Tamayo**

**Universidad del Tolima, **Universidad de Medellín*

leonsolc@ut.edu.co, actamayo@udem.edu.co

En esta conferencia estudiamos la noción de cuasi proporción tal como aparece en la tercera parte de los *Elementos de Geometría Especiosa* del matemático italiano Pietro Mengoli (1626-1686). En primer lugar, presentamos los conceptos de razón cuasi infinita, razón cuasi nula y cuasi igualdad. Luego discutimos brevemente algunas propiedades de este tipo de razones. Finalmente, enunciamos un teorema fundamental sobre la cuasi igualdad de las potencias de un binomio y un polinomio de cierto grado. Estas conceptualizaciones y resultados ilustran el uso que Mengoli hace del infinito para aplicarlo, posteriormente, a la cuadratura de una clase de figuras planas.

LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA (ANALÍTICA, ALGEBRAICA, CATEGÓRICA) EN LA OBRA DE ALEXANDER GROTHENDIECK

Fernando Zalamea

Universidad Nacional de Colombia

fernandozalamea@gmail.com

Se resumirán en la charla los grandes giros que propuso Alexander Grothendieck (1928-2014) en los fundamentos de la geometría, enfatizando sus aportes en geometría analítica (Riemann-Roch generalizado, grupo de Grothendieck-Teichmüller), geometría algebraica (haces, esquemas) y geometría categórica (categorías abelianas, topos). La presentación será esencialmente conceptual, enlazando las ideas y las tensiones metodológicas mayores en juego, y resultará accesible a cualquier público con rudimentos mínimos de variable compleja, topología y álgebra abstracta.

ROTACIONES HIPERBÓLICAS EN EL PLANO CARTESIANO

Lorenzo Acosta

Universidad Nacional de Colombia

lmacostag@unal.edu.co

En este cursillo, utilizando una idea de Papy, se introduce una nueva noción de ortogonalidad en el plano euclidiano. Haciendo uso de esta noción, se definen las simetrías ortogonales y las rotaciones. En este caso, las rotaciones

centradas en un punto constituyen un grupo no abeliano y la órbita de un punto mediante la acción de este grupo es una “hipérbola doble”.

ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ALGORITMIA Y GEOMETRÍA, EN EL CONTEXTO DE LA RECURRENCIA, LOS SISTEMAS FORMALES Y LA MÁQUINA DE TURING

Juan Albornoz y Raúl Chaparro

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

jalbornoz09@gmail.com, raul.chaparro@escuelaing.edu.co

En este cursillo se presentará una propuesta, a manera de reflexión, para la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales y estrategias de solución de problemas en algoritmia y geometría elemental, en el contexto de sistemas formales, recurrencia y la máquina de Turing.

EL MODELO DE LOS VAN HIELE PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

María Aravena

Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

maravenadiaz@gmail.com; maravena@ucm.cl

El cursillo se enfoca en el estudio de los procesos geométricos, para lo cual se presenta una propuesta de aula para la enseñanza de la geometría, tanto en la formación de profesores como en la formación del alumnado de secundaria y primaria. Se ha considerado como referente teórico para enfrentar el diseño de actividades en diferentes temas geométricos, el modelo de razonamiento de los esposos Van Hiele. Este modelo que ha sido ampliamente difundido en diversos países, lo hemos utilizado en Chile en alumnos vulnerables y con bajos niveles de conocimiento en geometría, encontrando que estos elevan significativamente su nivel de razonamiento y conocimiento geométrico. El modelo presenta cinco niveles de razonamiento y unas fases de aprendizaje que ayudan a los docentes en la elaboración de las actividades y a regular el trabajo geométrico de los alumnos.

LA INTRODUCCIÓN DE LA TOPOLOGÍA DE LAS VECINDADES EN HILBERT, FRÉCHET Y HAUSDORFF

Luis Carlos Arboleda

Universidad del Valle

luis.carlos.arboleda@gmail.com

En este cursillo se trata de ilustrar cierto enfoque en el uso de la historia de las matemáticas en la formación de docentes. Se examinará la introducción que Fréchet hace de las primeras estructuras topológicas determinadas por la convergencia de sucesiones y la métrica (1904-1906). Así mismo, se estudiará la caracterización de la topología del espacio abstracto por la axiomática de las vecindades, realizada por Hausdorff, primero en 1912 bajo la influencia de una propuesta de Hilbert en 1904, y luego formalizada en su célebre obra *Mengenlehre* de 1914. Todo ello, en el contexto de las correspondientes filosofías de las prácticas matemáticas de estos autores.

¿QUÉ ES GEOMETRÍA?

Alberto Campos

Universidad Nacional de Colombia

acampos_s@yahoo.com.mx

En el cursillo se presenta información acerca del estudio epistemológico *Pensamiento geométrico*, que se apoya en investigaciones anteriores del cursillista. El estudio se ha desarrollado como implemento del programa de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, en la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá.

LA PIRÁMIDE VISUAL: EVOLUCIÓN DE UN INSTRUMENTO CONCEPTUAL

Carlos Cardona

Universidad del Rosario

carloscardona1959@gmail.com

El cursillo presentará el marco de un proyecto de investigación que pretende ofrecer una reconstrucción racional (ajustada a las categorías de Imre Lakatos) del programa de investigación que defiende la elaboración de un instrumento conceptual (pirámide visual) para plantear, explicar y resolver dificultades asociadas a la manera como percibimos visualmente objetos externos. El cursillo presenta el núcleo firme del programa de investigación y discute los

múltiples movimientos del cinturón protector que permiten evitar instancias de falsación del núcleo firme. Dada la naturaleza del Encuentro, el cursillo hará énfasis en la estructura y las dificultades geométricas que debe encarar el programa de investigación.

RAZONAMIENTO CON REGLA Y COMPÁS

Iván Castro

Universidad Nacional de Colombia

icastroc@unal.edu.co

Las temáticas que se abordarán en este cursillo son: concepto de conmensurabilidad entre los griegos, la no conmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado, el desmoronamiento de la teoría pitagórica y la gran crisis de la matemática griega, la teoría de Eudoxo de Cnido sobre razones iguales, la reconstrucción de la geometría griega, a partir de la teoría de Eudoxo, ejemplos de demostraciones empleando la teoría de Eudoxo versus el método empleado por los antiguos pitagóricos, cuadraturas de regiones poligonales, el concepto de lúnula, tipos de lúnulas, cuadraturas de lúnulas, criterios de no constructividad, los problemas clásicos: cuadratura del círculo, duplicación del cubo, construcción del heptágono regular, y la imposibilidad de trisecar un ángulo arbitrario.

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Alberto Donado*, Jorge Hernández y Reinaldo Montañez*****

**Universidad Pedagógica Nacional, **Universidad Distrital Francisco José de Caldas,*

****Universidad Nacional de Colombia*

adonado@pedagogica.edu.co, jahernandezp@udistrital.edu.co jrmontanezp@unal.edu.co

Haciendo uso de elementos históricos y de la tecnología, se presenta en el cursillo una propuesta de actividades de origen geométrico que pueden apoyar la enseñanza del cálculo en los niveles de la educación media y primeros cursos universitarios. Con un poco más de precisión, revisaremos los números reales y los conceptos de función, límite y continuidad a través de problemas no rutinarios de tipo geométrico que motivan la experimentación y la argumentación haciendo uso de la tecnología, herramienta muy potente para observar patrones, regularidades, invariantes y hacer conjeturas, que ayuden a formalizar las ideas y a desarrollar la teoría.

SOBRE LA PRODUCCIÓN DE CONJETURAS EN LA ESCUELA MEDIA

Nadia Douek

Université de Nice, Francia

ndouek@wanadoo.fr

El cursillo se centrará en el análisis de producciones de alumnos de la escuela media, específicamente, de la formulación de conjeturas y de sus narrativas de pruebas. Se intentará hacer un análisis crítico de la organización de la secuencia de producción de conjeturas.

En la primera sesión se presentará la perspectiva del análisis a priori; en la segunda, la perspectiva del análisis a posteriori y del análisis crítico.

GEOMETRÍA CON TODOS: DISEÑOS ACCESIBLES Y TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA PARA PREESCOLAR Y PRIMARIA

Olga León, Marcela Guilombo, Nelssy Jiménez, Sandra González, Natalia Palomá y Juan Castro

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

olgleon@yahoo.com, marcelaguilombo@gmail.com, nelssyj@yahoo.com, sandragonvel@gmail.com, napaba31@hotmail.com, man94990511@gmail.com

El cursillo presenta una articulación de cuatro investigaciones como respuesta a las exigencias de una educación matemática para todos. Es un ejercicio de reflexión y construcción didáctica de comunidades de profesores e investigadores, que se desarrolla a partir de los resultados sobre trayectorias de aprendizaje, hipotéticas y reales, y la fundamentación didáctica para la elaboración o uso de diseños accesibles para el aprendizaje de las formas geométricas. Desde la perspectiva del aprendizaje de la geometría, se profundiza en las relaciones: educación matemática y diversidad, educación geométrica con todos y para todos, tecnologías y accesibilidad, trayectorias de aprendizaje hipotéticas de la forma geométrica y el número para niños de preescolar y primaria, escolarización en la primera infancia y bilingüismo.

GEOMETRÍA TÁCTIL 2D Y 3D CON DGPAD, SOFTWARE PARA TABLETAS

Yves Martin

Université de la Réunion, Francia

yves.martin45@orange.fr

En la primera parte del cursillo se abordan la geometría 2D y las gráficas de funciones. Trataremos la interfaz de base, la utilización de expresiones para las gráficas de funciones. Abordaremos herramientas propias del software como la imantación, muy útil en el aula. En la segunda parte se trata la geometría 3D con DGPad. Aunque DGPad no es un software 3D plenamente, sus herramientas 3D son eficaces. Aprenderemos a utilizarlas para la enseñanza en secundaria. En la última parte, el foco está en los widgets y otros usos. Esta parte es un poco más técnica, consagrada al perfeccionamiento de figuras de simulación para trabajar con los estudiantes. Veremos varios desarrollos recientes del software.

Se trabajará con las tabletas entregadas por computadores para Educar.

NÚMEROS COMBINATORIOS, NÚMEROS DE STIRLING Y LA CARACTERÍSTICA DE EULER

Manuel Morón

Universidad Complutense de Madrid, España

ma_moron@mat.ucm.es

Bajo este título queremos, esencialmente, hacer una introducción muy básica a los complejos simpliciales tanto abstractos como geométricos. Siendo la finalidad principal la introducción, de la forma más intuitiva posible, de los grupos de homología de los complejos simpliciales. Una vez establecidos algunos resultados respecto a la invariancia topológica de la característica de Euler, nos centraremos en el cálculo del número de caras de la subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial. Apareciendo así, de forma natural, los números de Stirling en este contexto. Finalmente combinaremos los tres objetos clásicos en el título de este cursillo para dar una prueba de que la característica de Euler es, esencialmente, la única combinación lineal de los números de caras de cada dimensión de un complejo simplicial que es invariante topológico del poliedro subyacente. El proceso de demostración, donde aparecerán matrices infinitas triangulares inferiores, será la excusa para la breve introducción del grupo de Riordan que utilizaremos en la conferencia

en la que profundizaremos algo más en relaciones entre procesos iterativos en Topología y Geometría y matrices infinitas que también se pueden construir iterativamente.

MÉTRICA DE HAUSDORFF EN EL AMBIENTE DIFUSO

Carlos Ochoa y Laura Forero

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

oochoac@udistrital.edu.co, lvforerov@udistrital.edu.co

La distancia de Hausdorff corresponde, extiende y ajusta la noción de distancia entre subconjuntos no vacíos compactos en el ambiente de los espacios métricos, más exactamente en $(\mathbb{R}^n, d_u)$. De manera intuitiva, se ha establecido el concepto de conjunto como una colección distinta de elementos, esto es, un conjunto se determina vía la relación de pertenencia de un elemento de un universo al conjunto. La situación, por supuesto, es si pertenece o no pertenece; en un conjunto difuso a cada elemento del universo se asocia con un grado de pertenencia, que es un número entre 0 y 1. Los subconjuntos difusos se establecen como una correspondencia entre cada elemento del universo y un grado de pertenencia. Al combinar estas dos teorías, se genera un nuevo ambiente de estudio y de aplicación para las matemáticas.

RAZONAMIENTO DEMOSTRATIVO A TRAVÉS DE PUZZLES

JAPONESES GEOMÉTRICOS

Jairo Rodríguez, Dagoberto Olarte, Sandra Barbosa y Leonardo Sarmiento

Colombia Aprendiendo, Inem Francisco de Paula Santander

jaiorodriguez12@gmail.com

Este cursillo consiste en una serie de actividades, juegos lógicos geométricos, donde se ponen a prueba las habilidades de los asistentes para solucionarlas. Estas actividades son conocidas como puzzles japoneses de la misma clase de los sudokus. El trabajo con estas nos permiten mejorar capacidades de concentración, razonamientos deductivos, estudio de posibilidades, suposiciones. Las actividades que se trabajarán: Rectángulos, Galaxias, Nuricabe, Caminos Cerrados, Edificios, entre otras. Estos problemas sirven como actividades para el alistamiento de la demostración cuando lo hacemos frecuentemente con nuestros estudiantes.

LA CUADRATURA DEL CÍRCULO Y EL PROBLEMA DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Clara Helena Sánchez

Universidad Nacional de Colombia

chsanchezb@unal.edu.co

Con este cursillo pretendo revisar históricamente el famoso problema de la cuadratura del círculo y su relación con el problema de calcular el área de una superficie cualquiera. Aprovecharé el tema para hacer una aproximación filosófica y didáctica sobre el concepto de medida, de tan difícil manejo en los niveles de enseñanza básica y media.