Del 19 al 21 de junio de 2013

Memorias

21° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

Editora: Patricia Perry

Universidad Pedagógica Nacional

Universidad Industrial de Santander
UIS
Construimos futuro

Universidad Sergio Arboleda

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Publicado por la Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.

Memorias

21 O Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

Editora: Patricia Perry

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

MEMORIAS DEL 21º ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES

Editora

Patricia Perry

Diseño de logo

Benjamín Sarmiento, Carmen Samper

Diseño y diagramación de portada y portadillas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

ISSN: 2346-0539

Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Calle 72 No. 11 86
Bogotá, Colombia

PRESENTACIÓN

El *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* es un evento académico de carácter internacional que tradicionalmente ha organizado la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) con el apoyo de otras instituciones. El propósito ha sido convocar a matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Con el *Encuentro* se espera contribuir a: la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y docentes de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones; el fomento del estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

El *21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, evento dedicado a la memoria de Carlos Ruiz Salguero quien falleció el año pasado, ha sido organizado por la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad Sergio Arboleda, la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito y la Universidad Industrial de Santander. El grupo de invitados a participar cuenta con cuatro personas de reconocida trayectoria académica a nivel internacional: María Teresa Sánchez, de la Universidad de Málaga (España), Bettina Pedemonte, de Di-DiMa srl – Instituto para las Tecnologías Educativas (Italia), Víctor Sirvent, de la Universidad de Simón Bolívar (Venezuela) y Eric Hakenholz, creador de CaRMetal, del Collège Marcel Aymard (Francia). A nivel nacional, están invitados a participar profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas: Colombia Aprendiendo, Pontificia Universidad Javeriana, Universidad de los Andes, Universidad del Rosario, Universidad del Valle, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad Nacional de Colombia, y de las entidades organizadoras.

Para esta versión del *Encuentro*, las actividades académicas se relacionan con alguna de las siguientes temáticas: geometría en la educación matemática, geometría e historia, geometría y otras ramas de la matemática, geometría y artes, geometría y tecnología, y temas de geometría.

Las ponencias sometidas a consideración del Comité Académico del *Encuentro* fueron evaluadas por pares académicos. Este libro digital, que no es una compilación de documentos sino una obra editada, incluye sólo los documentos que además de haber sido aceptados por los evaluadores pasaron por un proceso adicional de evaluación y de edición académica, este último con la participación de los autores.

Comité Organizador
Bogotá, junio de 2013

Organización del Encuentro

Comité organizador

Universidad Pedagógica Nacional

Carmen Samper, Óscar Molina, Benjamín Sarmiento, Ingrith Álvarez

Universidad Sergio Arboleda

Julia Rojas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Carlos Álvarez

Universidad Industrial de Santander

Jorge Fiallo

Comité de revisión académica

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Bernarda Aldana, Carlos Álvarez, Alicia Guzmán, Édgar O'bonaga

Fundación AprendEs

Miriam Ortiz

Universidad de los Andes

Ángela Restrepo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Olga Lucía León

Universidad Industrial de Santander

Martín Acosta, Jorge Fiallo

Universidad Javeriana

Iván Castro

Universidad Pedagógica Nacional

Ingrid Álvarez, Orlando Aya, Leonor Camargo, Hernán Díaz, Alberto Donado, Armando Echeverry, Édgar Guacaneme, Luis Guayambuco, Óscar Molina, Jorge Páez, Patricia

Perry, Tania Plazas, Carmen Samper, Benjamín Sarmiento, Fabio Vélez

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Alfonso Jiménez, Clara Rojas

Universidad Sergio Arboleda

José Ramírez

Universidad del Valle

Luis Carlos Arboleda, Diego Garzón, Octavio Pabón

ENTIDAD DE APOYO ADMINISTRATIVO

Fundación Francisca Radke

ENTIDADES AUSPICIADORAS

Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería, Belpapel Ltda., Grupo Editorial Norma, Gimnasio Moderno

Tabla de contenido

Conferencias de invitados

Cursillos de invitados

COMUNICACIONES BREVES

Conferencias de invitados

LA NOCIÓN DE ROTACIÓN EN PLANOS DESARGUESIANOS

Lorenzo Acosta
Universidad Nacional de Colombia
lmacostag@unal.edu.co

Se presenta la noción de plano afín de acuerdo con el libro *Algébre Géométrique* de Artin y se explica el significado de plano desarguesiano. Siguiendo las ideas del *Mathématique Moderne 3* de Papy, se introduce una ortogonalidad en un plano afín desarguesiano, lo que permite definir simetrías ortogonales. A partir de estas simetrías se definen las rotaciones. Finalmente se da una explicación a la definición de ángulo de Papy: "Un ángulo es una rotación que ha perdido su centro".

Este trabajo se desarrolla en el contexto de los planos afines, de acuerdo con la definición de *plano afín* dada en Artin (1957/1978). A partir de tres axiomas básicos sencillos se puede desarrollar toda una teoría geométrica en la que aparecen de manera natural transformaciones que conducen a la utilización del álgebra para obtener resultados geométricos. Estas transformaciones, que envían líneas en líneas paralelas, se llaman *dilataciones* y se dividen en *traslaciones* (aquellas que no tienen un único punto fijo) y *homotecias* (aquellas que tienen puntos fijos). Los planos afines, en toda su generalidad, no son lo suficientemente buenos para obtener resultados atractivos con herramientas algebraicas básicas. La situación se pone interesante si se exige que haya suficientes traslaciones, es decir, que el grupo de traslaciones actúe transitivamente sobre el conjunto de puntos. A cada plano afín con esta condición de simetría se le puede asociar un cuerpo (no necesariamente conmutativo) de tal manera que el plano tiene estructura de espacio vectorial sobre él. Recíprocamente, cada espacio vectorial de dimensión dos sobre un cuerpo es un plano afín. Los planos afines que se obtienen de los cuerpos mediante este mecanismo son los planos donde se cumple el Teorema de Desargues (*planos desarguesianos*) y aquellos que corresponden a los campos (cuerpos conmutativos) son los planos donde se cumple el Teorema del hexágono de Pappus (*planos pappusianos*).

Acosta, L. (2013). La noción de rotación en planos desarguesianos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3-4). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Utilizando una idea de Papy (1967), en un plano afín se define la noción de *ortogonalidad* como una relación biyectiva, antirreflexiva y simétrica en el conjunto de las direcciones del plano. Un plano desarguesiano admite ortogonalidades siempre que sea de característica diferente de dos y, en este caso, hay en general varias de ellas. Una vez escogida una ortogonalidad, se definen las *simetrías ortogonales* y a partir de ellas las *rotaciones*. Se tiene que, en un plano desarguesiano con una ortogonalidad, el grupo de las traslaciones actúa por conjugación sobre el conjunto de las rotaciones, lo que permite dar significado a la definición de ángulo dada en Papy (1967): "Un ángulo es una rotación que ha perdido su centro".

Las ideas básicas se tomaron del Capítulo II de Artin (1957/1978) y de Papy (1967). Estos dos textos son de naturaleza y objetivos completamente diferentes. El primero está dirigido a personas con una formación matemática avanzada mientras que el segundo es un texto para estudiantes de educación media. El espíritu, sin embargo, es el mismo: desarrollar la geometría a través de las transformaciones, utilizando herramientas algebraicas.

La exposición está dirigida a un público general con conocimientos elementales de teoría de grupos y álgebra lineal.

REFERENCIAS

Artin, E. (1978). *Algèbre géométrique* (M. Lazard, Tr.). París, Francia: Gauthier-Villars (primera edición en inglés, 1957).

Papy, G. (con la colaboración de F. Papy). (1967). *Mathématique moderne 3. Voici Euclide*. Bruselas, Bélgica: Marcel Didier.

NOCIONES TOPOLÓGICAS EN COLECCIONES

Alberto Donado
Universidad Pedagógica Nacional
adonado@pedagogica.edu.co

A partir de la noción topológica de interior, se extiende la noción de abierto a colecciones arbitrarias de subconjuntos de un conjunto referencial X y se estudia la estructura algebraica de las colecciones de abiertos asociados con cada colección. Identificando como "pretopologías" a las colecciones que cumplen las propiedades de las colecciones de abiertos, se presentan como una categoría que refina la categoría (Col) de colecciones sobre un conjunto.

Con el objeto de dar respuesta a una pregunta, surgida en el Seminario Sabatino de Topología que dirigía el profesor Carlos J. Ruiz, acerca de la posibilidad de extender nociones topológicas como conexidad, compacidad, separación, cercanía, límite, etc., a colecciones arbitrarias de conjuntos, se presenta una propuesta a partir de la noción de punto interior.

En esta dirección se extienden las nociones de interior, exterior, frontera, adherencia y puntos de acumulación a colecciones de subconjuntos de un conjunto X, las cuales no necesariamente son una topología sobre X. A partir de allí se estudian los parecidos y diferencias con respecto al trabajo que se hace en topología.

A partir de la función interior se obtiene la noción de conjunto abierto asociado a una colección y se estudian las propiedades de la colección de abiertos que se genera, la cual se denominará una *pretopología* por cumplir las condiciones de ser estable por reuniones arbitrarias y contener siempre al conjunto vacío.

Se estudia la estructura algebraica de las pretopologías, demostrando que éstas forman un retículo completo con elementos máximo y mínimo y que no siempre tienen estructura de álgebra de Heyting.

Donado, A. (2013). Nociones topológicas en colecciones. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 5-6). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Al extender la noción topológica de continuidad se obtiene un refinamiento de la categoría COL presentada por el profesor Ruiz en el volumen XIII de *Lecturas Matemáticas* publicado en 1992.

Finalmente se presenta una generalización, utilizando el concepto de p-colección y al extender la noción de ser "más fina" a colecciones arbitrarias de subconjuntos de X, se vislumbra otro camino para llegar a la noción de pre-topología.

ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN

Jorge Fiallo
Universidad Industrial de Santander
jfiallo@uis.edu.co

Con el objetivo de aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración, analizamos la existencia de continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar que acaecen cuando los estudiantes desarrollan demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas. Como resultado del análisis, planteamos cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva que ayudan a comprender los logros y las dificultades en el proceso de demostración. En este artículo presentamos un ejemplo de una de las cinco categorías.

INTRODUCCIÓN

Algunas investigaciones han mostrado la discrepancia que existe entre los procesos de argumentación y de demostración (Duval, 1992-1993; Balacheff, 1988), mientras que otras (Boero, Garuti, Lemut y Mariotti, 1996; Douek, 1999; Pedemonte, 2002, 2005), desde una caracterización de la argumentación diferente a la de Duval, han resaltado la estrecha relación entre estos dos procesos y han propuesto la hipótesis de que la argumentación previa a una demostración puede resultar útil para la construcción de la misma. Nuestra caracterización de argumentación y demostración parte de aceptar las diferencias semántica, epistémica y funcional entre ellas, pero acepta las relaciones que se dan cuando la argumentación y la demostración se consideran como procesos. En este escrito presentamos un ejemplo de unidad cognitiva inductiva.

ARGUMENTACIÓN

Desde el punto de vista funcional decimos que la argumentación es una justificación racional, trata de convencer, se dirige a una audiencia universal y pertenece a un campo, en el caso de las matemáticas, al campo matemático (Pedemonte, 2002).

Desde el punto de vista estructural, un argumento está compuesto por un esquema (Toulmin, 1958) formado por (Figura 1):

Fiallo, J. (2013). Estudio de los procesos de argumentación y demostración. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 7-18). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

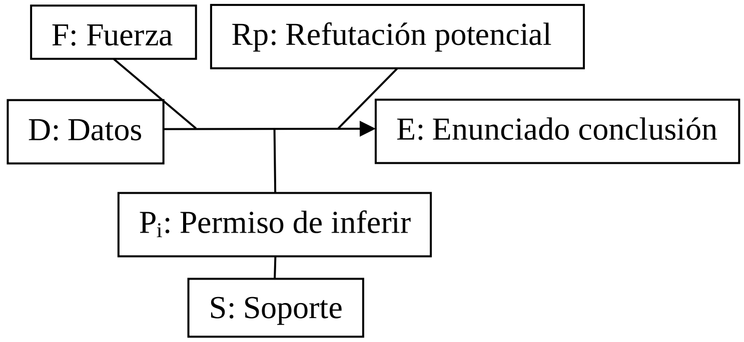


Figura 1: Modelo de Toulmin

- un *enunciado, E,* o conclusión que un interlocutor pretende justificar,
- unos *datos, D,* que sirven al interlocutor para justificar el enunciado,
- un *permiso de inferir, Pi*, que ofrece una regla, un principio general capaz de servir de fundamento a esta inferencia, de hacer de puente entre D y E.
- un indicador de *fuerza*, *F*, del argumento,
- una *refutación potencial*, *Rp,* del enunciado conclusión,
- un *soporte*, *S*, del permiso de inferir.

El primer paso en el argumento es la expresión de un punto de vista, es la conclusión, el objetivo del argumento. La argumentación debe apoyar esa afirmación, la cual se basa en un cierto número de datos que se producen para apoyar el enunciado. Para pasar de los datos al enunciado conclusión es necesario un permiso (regla o un principio general) que legitime ese paso, el permiso de inferir es la parte del argumento que establece la conexión lógica entre los datos y el enunciado conclusión. Si el argumento no se acepta, lo que se critica es el permiso de inferir (Pedemonte, 2005).

En general, las reglas y los datos no permiten inferir con un grado absoluto de certitud. Por eso se usa un indicador de fuerza que precisa la fuerza con la que la unión de datos al permiso de inferir permite alcanzar el enunciado. Es posible que ciertas circunstancias particulares impidan la aplicación del permiso de inferir al campo de los datos. Si hay excepciones al enunciado, disminuye la fuerza del permiso de inferir. Las condiciones de las excepciones o refutaciones potenciales se toman entonces en consideración (Pedemonte, 2005).

DEMOSTRACIÓN

La demostración es un caso particular de argumentación con unas características específicas. La demostración tiene como objetivo validar un enunciado, es convincente y se dirige a un auditorio universal, es relativa a un campo teórico que determina los criterios de aceptabilidad. En cuanto a las características estructurales, la demostración es una cadena deductiva de pasos constituidos por tres términos: *los datos*, *un enunciado conclusión* y *un teorema* que permite el paso de los datos a la conclusión. Por medio de una demostración, puede construirse un nuevo enunciado a partir de los axiomas y los primeros principios (Pedemonte, 2002).

En la clase lo que se puede considerar como demostración depende básicamente de las concepciones de demostración del profesor y de los estudiantes; es el profesor quien decide lo que puede considerarse como una demostración y cómo construirla, sin embargo el estudiante puede atribuir un valor de certeza a argumentos que no están necesariamente ligados a un sistema teórico. Los estudiantes buscan en una demostración una explicación, se esfuerzan en leer la demostración como herramienta para convencerse y convencer a otros; los profesores a menudo piden este esfuerzo (explícita o implícitamente), sin dar a los estudiantes las herramientas para ello. Una demostración no es un requisito previo de la convicción; al contrario, es más bien la convicción la que puede ayudar a la construcción de una demostración (de Villiers, 1993). El papel de una demostración no es solamente mostrar la validez de un teorema sino también mostrar las razones de esta validez. Una demostración debería permitir comprender el teorema, decir no solo qué es verdadero sino también por qué lo es. A veces los estudiantes tienen que hacer pruebas, comprobaciones empíricas después de una demostración porque la demostración no los convence (Healy y Hoyles, 2000). En el contexto didáctico, el papel explicativo de la demostración y su comprensión parecen más importantes que la aceptación de la validez de un teorema; en consecuencia, una demostración debe fomentar la comprensión y tener en cuenta el contexto de la clase y lo vivido por los estudiantes (Pedemonte, 2002). Los estudiantes prefieren las argumentaciones donde las relaciones matemáticas y los razonamientos se describen en el lenguaje común, que utilizan diagramas y ejemplos, porque son más próximas a su manera de expresar una justificación (Healy y Hoyles, 2000, p. 425).

Teniendo en cuenta las ideas expuestas en los párrafos anteriores, consideramos la *demostración* como *el proceso que incluye todos los argumentos plan-*

teados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismos, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

RELACIONES ENTRE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN

Para superar la dicotomía entre argumentación y demostración se han llevado a cabo estudios que plantean la noción de *unidad cognitiva* (Boero, Garuti, Lemut y Mariotti, 1996), la cual se dirige a vincular argumentos espontáneos y argumentos matemáticamente aceptables. Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte (2005) plantea una herramienta basada en la integración del modelo cK¢[1] (Balacheff, 1995; Balacheff y Margolinas, 2005) en el modelo de Toulmin (Figura 2).

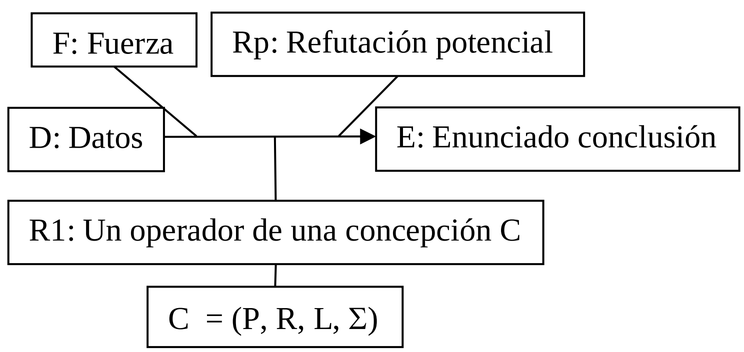


Figura 2: Integración del modelo cK¢ al modelo de Toulmin

El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia –*unidad cognitiva referencial*– que toma en cuenta los sistemas de representaciones expresivas como el lenguaje, las heurísticas sobre el dibujo, etc. y los sistemas de conocimientos como las concepciones (Balacheff, 1995) y los marcos (Douady, 1986) que están en juego durante la construcción de una conjetura y el desarrollo de su demostración. Como la demostración hace referencia a una teoría matemática, el sistema de referencia representa una tentativa de organizar ciertos elementos que intervienen durante la argumentación para poder relacionarlos y compararlos con la teoría matemática que interviene durante la

[1] cK¢: "conception, knowing, concept" (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 105).

demostración. El análisis estructural –*unidad cognitiva estructural*– puede ser realizado con el modelo de Toulmin.

Se puede decir que hay *continuidad referencial* entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos, teoremas usados en la demostración también se han usado en la argumentación para dar soporte a la conjetura. Hay una continuidad estructural entre la argumentación y la demostración si algunos pasos deductivos o inductivos usados en la argumentación están presentes también en la demostración. De lo contrario, si la estructura de la argumentación es inductiva y la demostración es deductiva, entonces hay una distancia estructural entre los dos (Pedemonte, 2005).

La argumentación puede estar relacionada con el planteamiento de una conjetura en dos formas: la *argumentación constructiva* contribuye a la construcción de una conjetura, así es que precede al enunciado, mientras que la *argumentación estructurante* justifica una conjetura, previamente construida como un hecho, y así es que ella viene después (Pedemonte, 2002).

EJEMPLO DE UNIDAD COGNITIVA INDUCTIVA

Usando un archivo de geometría dinámica (Figura 3) donde se representan las seis razones trigonométricas con vectores, se les plantea a los estudiantes la siguiente tarea:

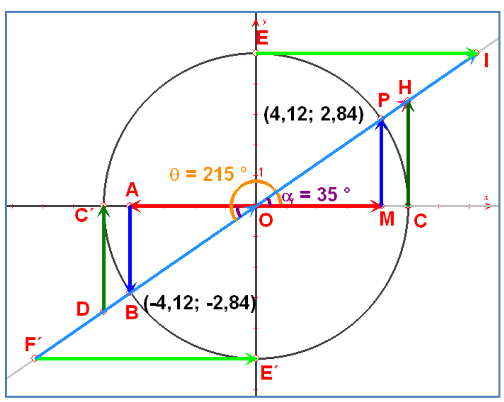


Figura 3: Imagen del archivo dinámico

3.6.7 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $cos(180 + \alpha)$ y $\cos(\alpha)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.6.8 Demostrando

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.6.7.

Proceso de argumentación

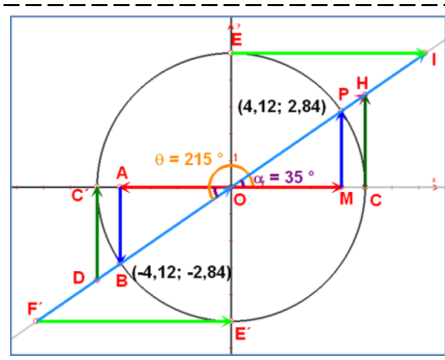
1 Mabe: Yo creo que uno puede hablar de eso en el tercero y en el primero, o sea, cuando el ángulo θ está en el tercer cuadrante, porque ya cuando está en otro cuadrante θ no es $180 + \alpha$.

2 Inv.: Necesariamente θ debe estar en el tercer cuadrante.

3 Inv.: ¿Qué relación encontraron?

4 Mabe: Que $\cos(180 + \alpha) = -\cos(\alpha)$

D₁:



Archivo

D_2: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

E_1: $\cos(180 + \alpha) = -\cos(\alpha)$[4]

R_1: α es el ángulo de referencia de θ [6]
R_2: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180 - \alpha)$ tienen signos contrarios [7]
R_3: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [9]

Marco perceptivo

5 Inv.: ¿Por qué?

6 Mabe: Porque el ángulo α es el ángulo de referencia de θ.

7 Mabe: Entonces como el coseno es positivo solo en el primero y en el último, enton-

ces tienen signo contrario.

8 Inv.: ¿Los ángulos α son congruentes?

9 Mabe: Sí, porque son opuestos por el vértice.

Análisis y comentarios del proceso de argumentación

Podemos considerar que el grupo "ve" la relación a través de los vectores OM y OA (Figura 3), e intenta buscar argumentos en el diagrama dinámico para justificar el enunciado.

Los operadores R_1 a R_3, se refieren a relaciones válidas entre los ángulos y las razones trigonométricas percibidas en el diagrama dinámico, que no justifican matemáticamente la relación planteada.

El sistema de representación va del uso del diagrama dinámico (L_1) para visualizar las relaciones, al uso del lenguaje natural (L_2) para expresar verbalmente lo que observan en el diagrama.

El control perceptivo (Σ_1) es ejercido por las continuas visualizaciones de las relaciones en el diagrama dinámico.

La forma de argumentación es estructurante y la estructura de la conjetura es inductiva.

Proceso de demostración

10 Inv.: ¿Para que la relación quede matemáticamente demostrada, qué hay que hacer?

11 Mabe: ¿Si uno tiene que los ángulos son opuestos por el vértice, tiene que demostrar que los triángulos son congruentes?

12 Inv.: Sí, ¿Qué es coseno?

13 Mabe: Esto [señala el vector rojo en el primer cuadrante (Figura 3)]

14 Inv.: Ahí la estamos visualizando, pero, ¿cuál es la definición?

15 Cata: Adyacente sobre hipotenusa.

16 Inv.: Adyacente sobre hipotenusa o x sobre r, ¿cierto?, entonces, sí es necesario demostrar que los x son iguales.

17 Mabe: Es que los ángulos son iguales, por opuestos, y los radios son iguales, ¿qué

más puedo decir sin utilizar medidas? Porque si no cogería las coordenadas y ya.

18 Inv.: ¿Cómo es el otro ángulo?

19 Cata: Recto.

20 Mabe: Uno recto y el otro ya es igual, entonces, ya con eso son iguales.

21 Inv.: Con eso, los dos triángulos son congruentes. Entonces, ¿si los dos triángulos son congruentes, qué pasa con la distancia en x, o con el adyacente?

22 G2A: Es la misma.

23 Mabe: ¿Entonces, en la conjetura solo que son opuestos, y lo otro para la demostración?

24 G2A: [Escriben en la hoja de trabajo: "θ está ubicado en tercer cuadrante, α es un ángulo agudo en el primer cuadrante. Como el coseno es positivo en el I y IV cuadrante, el $\cos(180+\alpha)$ tiene el mismo valor absoluto que su ángulo de referencia α, pero con signo contrario (–)"]

D$_1$:

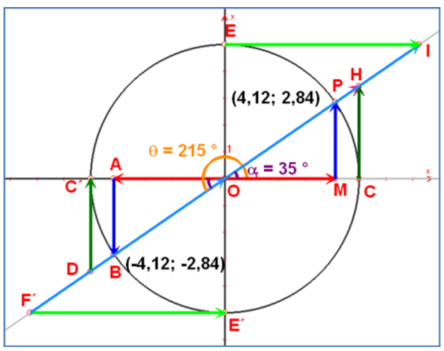


Figura 1: Archivo 3.4.1

D$_2$: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

D$_3$: coseno es el vector rojo ($\overrightarrow{OM}$) [13]

D$_4$: $\cos(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa}$ [15]

D$_5$: E_{1I} $\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ [16]

E1: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$[4]

R$_4$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [17]

R$_5$: $OP = OB$ por ser radios [17]

R$_6$: $\angle OMP = \angle OAB$ por ser rectos [20]

R$_7$: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$ [20] – [22]

R$_8$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios [24]

Marco perceptivo

Análisis y comentarios del proceso de demostración

El grupo sigue en el terreno perceptivo, intentando encontrar propiedades en el diagrama dinámico para justificar la relación, pero no recurre a la definición de coseno en el plano, a pesar del dato (D_5) suministrado por el investigador. La atención la centran en justificar la congruencia de los triángulos. Al final justifican en el lenguaje natural la relación E_1.

Los operadores siguen siendo relaciones visualizadas en el diagrama dinámico, apuntado a demostrar la congruencia de los triángulos AOB y MOP.

El sistema de representación sigue siendo el diagrama de Cabri y el lenguaje natural para expresar lo que ven.

El control sigue siendo el diagrama dinámico.

El tipo de demostración es un ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2010), basado en la generalización de las propiedades que ven en el ejemplo cuando α en el primer cuadrante y θ en el tercer cuadrante.

En este episodio se evidencia la dificultad que se presenta para poder establecer conexiones entre los marcos geométrico, algebraico y analítico, necesarios para la construcción de una demostración deductiva. El grupo se queda en el terreno de lo perceptivo geométrico y no es capaz de relacionar las propiedades observadas con las definiciones y propiedades de las razones trigonométricas en el plano cartesiano.

Análisis de la unidad cognitiva

Esquema global de la argumentación	Esquema global de la demostración
D_1g, D_2rang, D_3repgcos, D_4deftr, D_5defpc → E_1itrig R_1rang, R_2rsigpc, R_3rang	D_1g, D_2rang, D_3repgcos, D_4deftr, D_5defpc → E_1itrig R_4rang, R_5relt, R_6rang, R_7rlt, R_8rsigpc

deftr:	definición en el triángulo rectángulo	repgcos:	representación geométrica de coseno
itrig:	identidad trigonométrica	relt:	relación lados del triángulo
rang:	relación entre ángulos	rsigpc:	relación de signos en el plano cartesiano

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E**$\mathbf{E_1}$: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$			**DEMOSTRACIÓN** $\mathbf{E_1}$: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES $\mathbf{R_1}$: α es el ángulo de referencia de θ. $\mathbf{R_2}$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen signos contrarios. $\mathbf{R_3}$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice.	**SIST. DE REPR.** $\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico. $\mathbf{L_2}$: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).	**E. DE CONTROL** $\mathbf{\Sigma_1}$: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).	**OPERADORES** $\mathbf{R_4}$: coseno es el vector rojo. $\mathbf{R_5}$ $\cos(\alpha) = \frac{ady}{hip}$ $\mathbf{R_3}$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice. $\mathbf{R_6}$: $OP = OB$ por ser radios. $\mathbf{R_7}$: $\angle OMP = \angle OAB$ por ser rectos. $\mathbf{R_8}$: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$. $\mathbf{R_9}$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios	**SIST. DE REPR** $\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico. $\mathbf{L_2}$: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).	**E. DE CONTROL** $\mathbf{\Sigma_1}$: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).
Marco perceptivo – geométrico			Marco perceptivo – geométrico		
CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA					

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva perceptiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EGA**: Los argumentos están basados en propiedades matemáticas visualizadas en el ejemplo cuando θ está en el tercer cuadrante.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Aunque usan algunos datos y operadores nuevos en el proceso de demostración, estos están relacionados con los usados en el proceso de argumentación.

El sistema de representación sigue siendo el diagrama dinámico de Cabri (L_1) y el lenguaje natural (aunque en el esquema se escriben algebraicamente).

El control sigue siendo perceptivo, caracterizado por la identificación de los elementos geométricos y las relaciones entre ángulos y triángulos en la construcción de Cabri.

La continuidad estructural se da porque las argumentaciones de los estudiantes siguen basadas en lo observado en el ejemplo genérico y no en teoremas.

Consideramos que en este ejemplo la continuidad del sistema de referencia es favorable, puesto que los datos y operadores usados en la conjetura no están apoyados en datos numéricos, sino en relaciones matemáticas descubiertas en el diagrama dado que pueden llegar a ser generalizadas, de tal manera que el control sea teórico. La ruptura estructural puede lograrse a través de algunas refutaciones potenciales y datos (definiciones y teoremas) que ayuden a completar de manera general el proceso de demostración.

CONCLUSIONES

Esta unidad cognitiva no favorece la construcción de demostraciones deductivas. Las dificultades que se presentan para la demostración son las siguientes: el uso de ejemplos o propiedades observadas en el diagrama dinámico no posibilitan un control teórico que permita el cambio de una concepción perceptiva-numérica del proceso de argumentación a un marco algebraico o analítico en el proceso de demostración. Dada esta continuidad del sistema de referencia, no es posible la ruptura estructural. Otra dificultad detectada en este caso es la imposibilidad de poder establecer conexiones entre los marcos geométrico, algebraico y analítico.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 113-120).Valencia, España: Universidad de Valencia.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. En I. Schwank (Ed.), *Proceeding of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (vol. 1, pp. 125-139). Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble, Francia.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(3), 313-348.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-29.

Toulmin, S.E. (1958). *The uses of argument*. Reino Unido: Cambridge University Press.

La proyección estereográfica y deformación conforme de métricas en la bola

Gonzalo García y **Álvaro Ortiz**
Universidad del Valle
Gonzalo.garcia@correounivalle.edu.co, alvaroortizlugo@yahoo.com

La proyección estereográfica de la esfera, desde uno de sus puntos *N* a un plano que toca a la esfera en un punto *S*, diametralmente opuesto al punto *N*, preserva ángulos y envía circunferencias a rectas o a circunferencias. En esta conferencia, conservando sus propiedades, extenderemos la proyección estereográfica a una función ϕ de la bola unitaria en un semiespacio σ de R^3. Usando la función ϕ construiremos una familia de métricas planas sobre la bola euclidiana conformes con la métrica euclidiana.

La proyección estereográfica

Definición. Consideremos la esfera unitaria S^2 y un punto N sobre ella. Sea *S* el punto en la esfera diametralmente opuesto a N y sea π el plano tangente a S^2 en el punto *S*. Sea M un punto de S^2 diferente de N y sea NM la recta determinada por los puntos M y N. Sea M' el punto de intersección de la recta NM con el plano π. Diremos que M' es la proyección estereográfica del punto M de S^2 al plano π. Esta correspondencia define una función biyectiva entre $S^2 / \{ N \}$ y el plano π.

Las siguientes son dos propiedades fundamentales de la proyección estereográfica.

Proposición. La proyección estereográfica envía circunferencias que no pasan por el punto de proyección en circunferencias y envía circunferencias que pasan por el punto de proyección en rectas.

Proposición. La proyección estereográfica conserva ángulos; es decir, la proyección estereográfica envía los ángulos formados por curvas de la esfera en ángulos iguales formados por las curvas proyectadas por el plano π.

Sea R^3 el espacio euclidiano tridimensional y sea la esfera unitaria S^2 con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si tomamos la proyección estereográfica, con centro

García, G. y Ortiz, Á. (2013). La proyección estereográfica y deformación conforme de métricas en la bola. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 19-21). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

el polo norte $N(0,0,1)$, sobre el plano $Z=-1$, encontramos que la proyección envía un punto $M(x,y,z)$ en la esfera, distinto de N, en un punto $M^{'}(\mathrm{u},\mathrm{v},-1)$, donde

$$u=\frac{2x}{1-z} \qquad\qquad v=\frac{2y}{1-z}$$

La proyección estereográfica es una función inyectiva sobre el plano $Z=-1$, con inversa la función

$$x=\frac{4u}{u^2+v^2+4} \qquad y=\frac{4v}{u^2+v^2+4} \qquad z=\frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}$$

DE LA BOLA A UN SEMIESPACIO DE R^3

En esta conferencia extenderemos la función estereográfica a una función definida sobre la bola unitaria 3-dimensional con centro en el origen, de tal forma que conserve las dos propiedades enunciadas de la proyección estereográfica.

Proposición. Sea B^3 la bola unitaria con centro en el origen y sea el semiespacio $R^3_- = \{(x,y,z)\in R^3 : z\leq -1\}$. La función $\phi = B^3 \to R^3_-$ definida por

$$\phi(x,y,z)=(\frac{4x}{x^2+y^2+(z-1)^2},\frac{4y}{x^2+y^2+(z-1)^2},\frac{x^2+y^2+(z+1)^2-4}{x^2+y^2+(z-1)^2})$$

es una extensión conforme de la proyección estereográfica.

MÉTRICAS CONFORMES A LA MÉTRICA EUCLIDIANA EN R^3

Si (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) son dos vectores de R^3 entonces el producto interno usual se define por $(x_1,y_1,z_1).(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Recordemos que los vectores $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ y $e_3=(0,0,1)$ forman una base de R^3 y que $e_i.e_j=\delta_{ij}$ donde δ_{ij} es igual a uno si $i=j$ e igual a cero si $i\neq j$; por esta razón denotaremos al producto interno anterior por δ_{ij}. Así, si (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) son dos vectores de R^3 entonces podemos escribir

$$\delta_{ij}((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2+\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2+\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2 .$$

En general, definiremos métricas riemannianas sobre R^3 así:

Definición. Diremos que g es una métrica riemanniana sobre R^3 si g es una función diferenciable que asigna a cada $p \in R^3$ un producto interno $g(p)$ simétrico y definido positivo entre pares de vectores de R^3 aplicados en el punto p.

Definición. Sea δ_{ij} la métrica euclidiana y sea $f : R^3 \to R^3$ una función diferenciable con $Df(p)$ biyectiva para todo $p \in R^3$. La función f define una nueva métrica en R^3, denotada por $f^*(\delta_{ij})$, por la fórmula

$$f^*(\delta ij)(u,v) = \delta ij(\mathrm{Df}(u), \mathrm{Df}(v))$$

donde u y v son vectores aplicados en un punto p de R^3 y Df envía vectores en p a vectores en $f(p)$. La restricción de la función f a la bola B^3 define una métrica sobre ella.

Definición. Diremos que una métrica g sobre la bola euclidiana es puntualmente conforme a la métrica euclidiana δ_{ij} si existe una función positiva f tal que $g = f\delta_{ij}$.

En esta conferencia, usando la función ϕ, construiremos una familia de métricas en B^3 conformes a la métrica euclidiana δ_{ij}, tal que si g pertenece a dicha familia entonces g se puede escribir de la forma $g = u^4 \delta ij$, donde u es una función positiva que satisface el siguiente problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \quad B^3 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}u^3 \quad \text{sobre} \quad S^2,$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}).(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$$

es la derivada con respecto a la normal exterior $\eta = (x, y, z)$.

Esto implica que, en particular, la esfera con la métrica g tiene la misma curvatura media de la esfera euclidiana S^2.

REFERENCIAS

Cannon, J., Floyd, W., Kenyon, R. y Parry, W. (1997). Hyperbolic geometry. En S. Levy (Ed.), *Flavors of geometry* (pp. 59-116). Cambridge, EUA: Cambridge University Press.

Ortiz, A. (2010). *Soluciones subcríticas en el problema de prescribir curvatura media sobre la bola* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

TRES EJEMPLOS PARA DISCUTIR LA EXISTENCIA DE OBJETOS GEOMÉTRICOS

Édgar Guacaneme
Universidad Pedagógica Nacional
guacaneme@pedagogica.edu.co

Se presentan tres ejemplos, extraídos de sendas experiencias, a través de los cuales se abre un panorama para discutir la existencia de objetos geométricos más allá de sus posibilidades ostensivas. El primer ejemplo incorpora el carácter elusivo de la representación de la idea matemática de razón, entendida como relación entre tamaños de magnitudes geométricas homogéneas. El segundo ejemplo alude a una aproximación a la idea de mediatriz como un lugar geométrico que no satisface una condición lógica, ni su condición "opuesta". El tercer ejemplo se refiere a la imposibilidad de construcción de una parábola a través de una heurística de regla y compás, a pesar de la determinación por esta vía de varios de sus puntos.

INTRODUCCIÓN

La existencia de los objetos geométricos ha sido un asunto de preocupación de la Filosofía de las Matemáticas quizá desde sus inicios como actividad intelectual; varios académicos (v.g., Acerbi, 2011; Cassou-Nogués, 2005; Gardies, 2004; Harari, 2003; Radford, 2006) presentan sugestivas aproximaciones a tal problemática. Desde la perspectiva curricular de las matemáticas escolares, la discusión sobre la existencia en Matemáticas encuentra un ámbito particular de discusión en el segundo capítulo de los *Lineamientos Curriculares*, especialmente en el apartado en que se propone una "reflexión sobre diferentes concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas" (MEN, 1998, pp. 21-25). En los procesos educativos de formación de profesores de Matemáticas este asunto se está abordando como parte de las discusiones metamatemáticas que de manera más frecuente e intencional incorporan los programas de formación y sus formadores, particularmente en actividades que propenden a la formación del conocimiento histórico-epistemológico del profesor de Matemáticas (Torres y Guacaneme, 2011a, 2011b).

Guacaneme, É. (2013). Tres ejemplos para discutir la existencia de objetos geométricos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 23-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Para aportar a tal discusión, a continuación se presentan tres ejemplos, extraídos de sendas experiencias, a través de los cuales se abre un panorama para discutir la existencia de objetos geométricos más allá de sus posibilidades ostensivas. El primer ejemplo incorpora el carácter elusivo de la representación de la idea matemática de razón, entendida como relación entre tamaños de magnitudes geométricas homogéneas. El segundo, alude a una aproximación a la idea de mediatriz como un lugar geométrico que no satisface una condición lógica, ni su condición "opuesta". El tercer ejemplo se refiere a la imposibilidad de construcción de una parábola a través de una heurística de regla y compás, a pesar de la determinación por esta vía de varios de sus puntos.

EL CARÁCTER ELUSIVO DE LA REPRESENTACIÓN DE LA IDEA MATEMÁTICA DE RAZÓN

Este primer ejemplo tiene como contexto de surgimiento la tesis doctoral que actualmente desarrollamos en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Educación Matemática (sede Universidad del Valle), y algunos trabajos de grado dirigidos en programas de formación de profesores en la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

En trabajos previos (Guacaneme, 2012; Quintero, Molavoque y Guacaneme, 2012), al examinar las ideas de *razón* y *proporción* en los Libros V y VI de *Elementos*, hemos discutido brevemente el asunto de la representación de estas en el ámbito de las magnitudes geométricas.

Retomemos, entonces, inicialmente la definición de la idea de razón propuesta por Euclides en el Libro V:

> Definición V.3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. (Euclides, 1994, p. 9)

Este enunciado establece un aspecto central: la razón es una relación. Cabe entonces preguntarse ¿cómo se representa una relación en la geometría euclidiana? o, de manera más concreta, ¿cómo Euclides representa la razón entre dos magnitudes homogéneas?

Para aproximar una respuesta a estas preguntas, desde la óptica de las figuras o los dibujos (entendidos como forma de representación), hay que advertir que algunos historiadores y epistemólogos (v.g., Gardies, 1997, pp. 127-155) reconocen en *Elementos* el uso de dos tipos de figuras para representar los objetos geométricos: propias e impropias. Las primeras representan magnitudes geométricas específicas u objetos específicos (v.g., segmentos, ángulos, triángulos, cuadriláteros, círculos); las figuras impropias las utiliza para representar números o magnitudes geométricas en general. En la Figura 1 (izquierda) hemos incluido la figura propia que Euclides presenta para la proposición 13 del Libro VI[1]; en la Figura 1 (derecha) presentamos la figura impropia de la proposición 14 del Libro V[2].

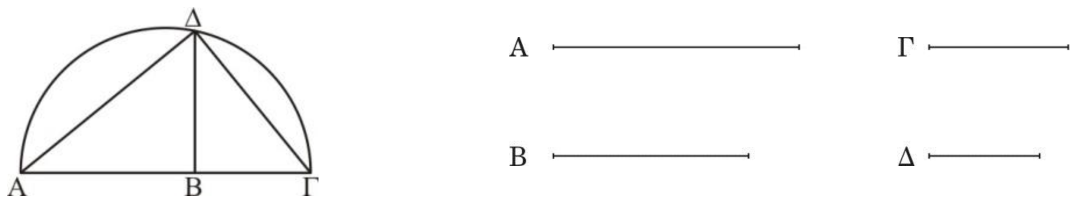


Figura 1: Figura propia y figura impropia en los Libros VI y V de *Elementos*[3]

En el Libro VI, Euclides emplea figuras propias; si allí se refiere a triángulos o paralelogramos, los dibujos contienen efectivamente figuras usuales de tales objetos geométricos. En cambio, en el Libro V si el autor griego alude a magnitudes geométricas en general (i.e., longitudes, superficies, volúmenes, y amplitudes angulares –simultáneamente) el dibujo contiene trazos rectilíneos (que no hay que interpretar como segmentos ni como longitud de segmentos, exclusivamente).

Con esta caracterización de las figuras, nos hemos dado a la tarea de identificar figuras (propias o impropias) que representen la idea de razón; sin embargo, no hemos encontrado figura alguna en los Libros V y VI –ni en *Elementos* (Euclides, trs. 1991, 1994, 1996), ni en otra de las obras atribuidas a Euclides (McDowell y Sokolik, 1993)– que constituya una representación de la razón. Con base en esto, nos atrevemos a afirmar que no existe en la geometría euclidiana representación, mediante figuras, de la razón, concebida como relación.

---

[1] VI.13. “Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.” (Euclides, tr. 1994, p. 74)

[2] V.14. “Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si es menor, menor.” (Euclides, tr. 1994, p. 40)

[3] Tomadas de Euclides (tr. 1994, pp. 75, 40).

Si dirigimos la atención al discurso verbal de la obra euclidiana en cuestión, y específicamente al uso de palabras, expresiones verbales y notaciones, relacionadas con la idea de razón, reconocemos un amplio espectro de expresiones que incorporan la palabra razón (v.g., guarda razón, guardan la misma razón, razón mayor, razón duplicada, razón triplicada, razón por alternancia, razón por inversión, composición de una razón, separación de una razón, conversión de una razón, razón por igualdad), pero no logramos identificar en ninguna de ellas una manera de representar la razón. Quizá lo más cercano a una representación de la razón esté en el reconocimiento implícito en la obra euclidiana de la existencia de un *antecedente* y un *consecuente* en cada razón, cuya relación con respecto a su tamaño es precisamente la razón. No obstante lo anterior, somos conscientes de que esto no constituye un representación. El panorama no cambia mucho al examinar las notaciones para la idea de razón, pues en *Elementos* no hay uso de notación simbólica (ni nominal) alguna para la idea de razón. Las notaciones más ampliamente difundidas para la razón entre dos magnitudes (v.g., $a{:}b$ o $\frac{a}{b}$) son relativamente modernas[4].

De lo anterior es fácilmente deducible que en *Elementos*, Euclides no emplea representación alguna de la idea de razón y, en consecuencia para el asunto de interés de esta conferencia, la existencia de las razones (e incluso su comprensión) no reside ni se deposita en –o a través de– sus representaciones. Pareciera entonces que la existencia de esta emerge exclusivamente del discurso matemático hipotético deductivo o, si se prefiere, su existencia es netamente discursiva. En este sentido el siguiente diálogo, entre un discípulo de Euclides y su maestro, surgido de nuestra imaginación cobra sentido:

— Euclides, por favor, muéstrame una razón.

— No puedo, pero si lees mi magistral obra (*Elementos*) la encuentras.

Este hecho nos lleva a un estado de incertidumbre acerca de cómo un individuo (cognitivo, epistémico, social) puede lograr comprensión de un objeto geométrico que se presenta discursivamente sin representación ostensiva alguna. Esta incertidumbre persiste tanto en una postura platónica (en la cual, a riesgo de ser simplista, las ideas matemáticas preexisten y el acceso a las mismas se da a través del trabajo mental con sus representaciones) como en

---

[4] Grattan-Guinness (1996) refiere que la notación “::” procede del siglo XVII y la atribuye a William Oughtred.

una postura empírica (en la cual las expresiones perceptivas de los objetos juegan un papel fundamental para el conocimiento de los mismos).

Esta incertidumbre puede llegar a constituir un problema docente legítimo, es decir, un problema que configura –o debiera configurar– un reto para el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas y que de manera concreta se puede expresar, entre otras opciones, en la pregunta ¿puedo promover procesos de aprendizaje de la idea matemática de razón, sin poner en contacto a mis estudiantes con representaciones de tal idea?

Para abordar tal inquietud parece conveniente indagar por la existencia de representaciones de la idea de razón. Quizá la primera que venga a la mente de un profesor sea alguna de las expresiones simbólicas usuales: $a\!:b$ o $\frac{a}{b}$. La primera de ellas menos empleada que la segunda, y en cierto sentido en desuso; la segunda, completamente análoga a la notación de fracción y, por tanto, propensa a conllevar la identificación de dos ideas (i.e., razón y fracción) sustancialmente distintas o de naturaleza epistémica diversa[5]. A más de estas notaciones, es bastante probable que ninguna otra idea ilumine la mente del profesor. Sin embargo, si un profesor recuerda algunos de los conocimientos del curso de Teoría de Conjuntos de su formación inicial (en caso de que lo haya habido), particularmente aquellos que refieren a las relaciones entre conjuntos entendidas como subconjuntos del producto cartesiano de estos, puede aceptar que la siguiente gráfica (ver Figura 2), y particularmente el punto, representa ostensiblemente la razón de la magnitud *a* y la magnitud *b*, es decir, la relación entre sus tamaños.

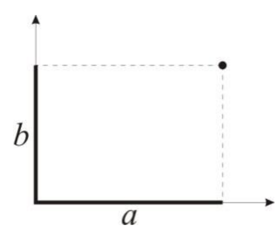


Figura 2: Representación cartesiana de la razón entre los tamaños de las magnitudes *a* y *b*

Bajo esta representación cartesiana se podría comprender la discusión que propone que entre las razones no debe establecerse una *igualdad*, pues una razón sólo es igual a sí misma (o en lo gráfico, cada punto sólo es igual a sí

[5] Esta idea la plantea magistralmente Hans Freudenthal en su capítulo sobre razón y proporcionalidad (Freudenthal, 1983/2002).

mismo). También, puede comprenderse cuándo cuatro magnitudes son proporcionales, o cuándo *guardan la misma razón* dos a dos; ello se puede lograr estableciendo si los dos puntos, correspondientes a sendas razones, y el origen del sistema cartesiano son colineales. No obstante la existencia de esta posible representación de las razones, se debe ser consciente de que la misma exige una homogenización de las magnitudes geométricas (i.e., la representación a través de trazos rectilíneos finitos, de cualquier tipo de magnitud geométrica), asunto trivializado –y hasta subvalorado– en las matemáticas escolares.

Por otra parte, recientemente, en un trabajo de grado (Barón y Barragán, 2013), que tuve la fortuna de dirigir, se realizó el estudio de un artículo (Berghout, 1974, 1975) en el cual, al tratar el asunto de la evolución histórica de las razones hacia una perspectiva numérica, y particularmente la contribución del trabajo de Oresme en tal dirección, se incluyen unos dibujos de segmentos rectilíneos que podrían representar razones (ver Figura 3).

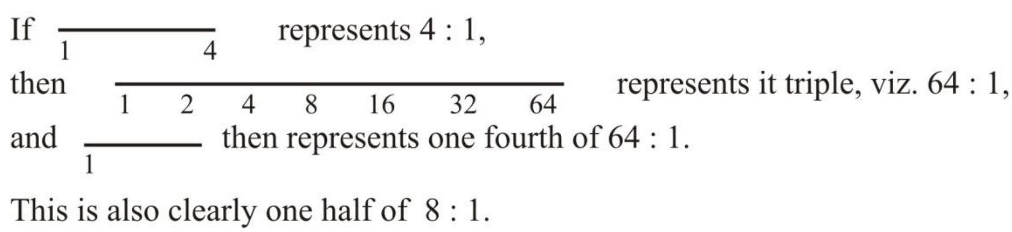


Figura 3: Uso de segmentos rectilíneos para representar razones[6]

Comprender aspectos básicos del funcionamiento de esta representación constituyó un reto al conocimiento matemático personal, fundamentalmente porque el sistema de representación usual de longitudes en una recta coordenada condiciona la lectura de la representación en cuestión; sin embargo, una simple transformación de tal recta, a través de incorporar potencias de 2 (ver Figura 4) nos ayudó a comprender, entre otros asuntos, que el segmento que representa la razón 64:1 es el triple del que representa la razón 4:1, asunto totalmente relacionado con la idea de razón triplicada[7] expresada en *Elementos*.

[6] Facsímil tomado de Berghout (1975, p. 70); por ello ni las longitudes de los segmentos ni la distribución de los números es muy precisa.

[7] Definición V.10. “Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.” (Euclides, tr. 1994, p. 14)

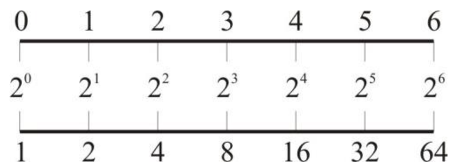


Figura 4: Transformación de una recta usual a través de las potencias de 2

A pesar de la comprensión lograda hasta acá, debemos reconocer la existencia de nuevos retos matemáticos como aquel que supone la ubicación en este mismo *eje* de *cualquier razón*, reto que puede llegar a ser trivial si se asume una correspondencia a través de la función de variable real definida por la expresión $f(x) = 2^x$ (o si se prefiere, de su función inversa, f^{-1}). Más allá de este tipo de retos, surgen otros relevantes para el asunto del presente artículo, relacionados con el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas; uno de ellos se puede expresar a través de una pregunta, similar a una ya planteada antes: ¿puedo promover procesos de aprendizaje de la idea matemática de razón, poniendo en contacto a mis estudiantes con alguna de las dos representaciones de tal idea, presentadas inmediatamente antes?

UNA APROXIMACIÓN A LA IDEA DE MEDIATRIZ COMO LUGAR GEOMÉTRICO

El segundo ejemplo tiene como contexto de surgimiento un fragmento del curso titulado “Incorporación de la geometría analítica en primaria y secundaria”, a cargo del doctor Carlos Hernández Garciadiego del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, desarrollado en el marco de la “Escuela-seminario Internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática”, conocida como CANP-2012 (*Capacity & Networking Project*) que tuvo lugar en San José de Costa Rica del 6 al 17 de agosto de 2012. En este curso el doctor Hernández presentó, entre otros, algunos aspectos del software GeoLab[8], del que es coautor y presentó algunas propuestas de aula para usarlo en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Una de tales propuestas se refirió a la construcción de la idea de mediatriz, como lugar geométrico constituido por los puntos que equidistan de dos puntos dados, a través de la experimentación que posibilita el software. Para ello se ubicaron dos puntos dados o *fijos* (*A* y *B*) en el plano y un punto genérico o

[8] http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/geolab/html/intro.html

móvil (P); luego se estableció el valor de las distancias entre los puntos dados y el punto genérico y se construyó una condición lógica a través de la expresión $\mathrm{d}(A,P) < \mathrm{d}(B,P)$. De esta manera, el punto P sería visible solo si su ubicación respecto de los puntos A y B satisface la condición lógica. Posteriormente, se empleó la herramienta de lanzar aleatoriamente puntos que satisficieran la condición lógica, obteniéndose en la pantalla lo que aparece en la Figura 5. A partir de ello se sugirió que se espera que los aprendices construyan una imagen mental asociada a la idea de mediatriz, que eventualmente en un futuro co-actúe con una definición de esta como lugar geométrico.

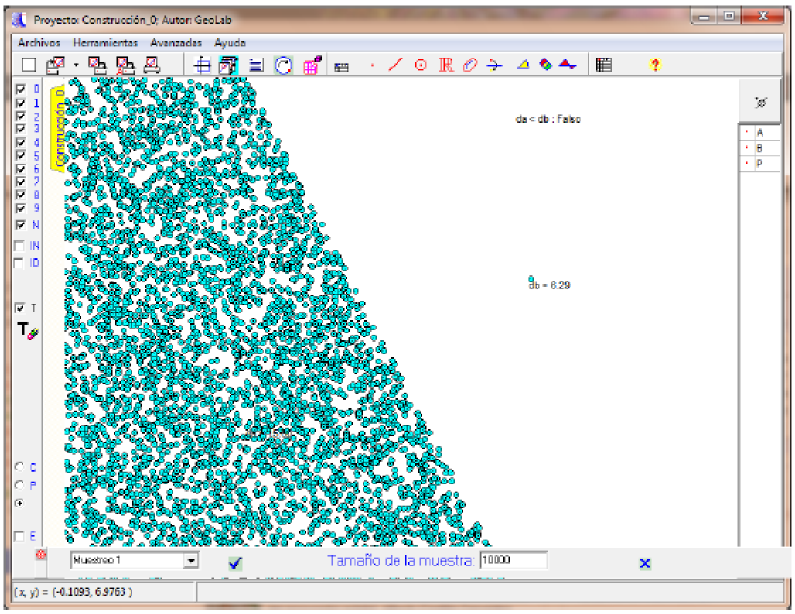


Figura 5: Imagen del software GeoLab relacionada con la construcción de la idea de mediatriz

Los puntos destacados en la pantalla de la Figura 5 corresponden a aquellos cuya distancia al punto A es menor que su distancia al punto B, pero no precisamente los de la mediatriz en cuestión. Si la condición lógica hubiese sido la “opuesta”, es decir $\mathrm{d}(A,P) > \mathrm{d}(B,P)$, la situación sería análoga, pues los puntos que se destacarían en la pantalla tampoco serían los de la mediatriz. Así, la existencia de la mediatriz está dada, no por los puntos equidistantes, sino por los no equidistantes que el software ha dibujado aleatoriamente.

Desde nuestra perspectiva, la situación acá descrita ofrece entonces un ejemplo de existencia de un objeto geométrico, no porque se exhiban los puntos que lo constituyen, sino precisamente por lo contrario. La mediatriz existe por la negación de las dos condiciones lógicas, a saber: $\mathrm{d}(A,P) < \mathrm{d}(B,P)$ y

$d(A, P) > d(B, P)$. Esto, en términos de su representación, implica que el aprendiz debe "ver" el lugar geométrico no en su representación ostensiva, sino a través de unas representaciones de "su negación", asunto llamativo para la discusión sobre la existencia de objetos geométricos en ausencia de su representación.

IMPOSIBILIDAD DE CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA A TRAVÉS DE UNA HEURÍSTICA DE REGLA Y COMPÁS

El tercer ejemplo tiene como contexto uno de los cursos realizados con los estudiantes del Énfasis en Historia y Educación Matemática de la cohorte 2013 del programa de Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Allí, el profesor Jhon Bello, a cargo de dirigir el curso que pretende abordar la discusión acerca de la mediación instrumental en la construcción de conocimiento matemático, desde una perspectiva histórica, propuso una tarea cuyo enunciado era: "Construya una parábola usando regla y compás".

Una vez que los estudiantes consultaron diversos documentos, organizaron la presentación de la respuesta a la tarea y expusieron *sus* resultados, es decir, la comprensión que habían logrado de los procesos que habían encontrado y estudiado. En la Figura 6 se presenta la imagen de uno de tales procedimientos.

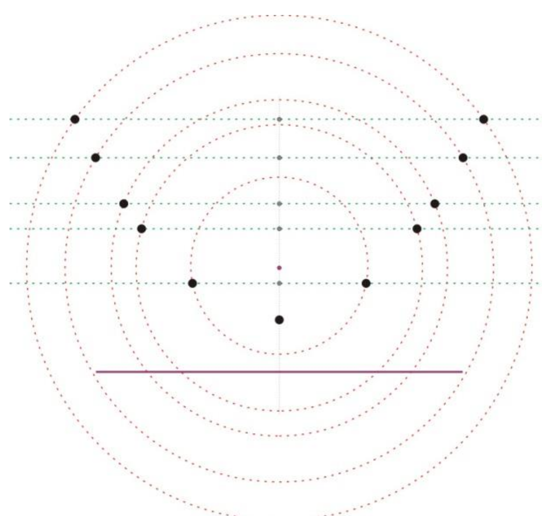


Figura 6: Construcción con regla y compás de *algunos* puntos de una parábola

En todos los procesos presentados se incluyó una definición de la parábola como lugar geométrico; así mismo, todos los procesos circunscribían el trabajo con regla y compás (i.e., el trabajo con rectas y circunferencias) y tenían en común que permitían construir un conjunto finito de puntos que efectivamente pertenecen a la parábola, pero ninguno de los procedimientos exhibía una construcción que permitiera “trazar la curva en su totalidad” o al menos trazar un fragmento de la misma de manera “continua”. Este hecho constituyó entonces el centro de discusión de un fragmento de la sesión de clase donde se expresaron puntos de vista acerca de lo que efectivamente es una construcción con regla y compás, así como la potencial imposibilidad de construir una parábola dentro de una heurística determinada por estos instrumentos.

Sin embargo, para esta conferencia el episodio comentado antes interesa en la medida en que nos ofrece un ambiente para proponer y dar sentido a la pregunta si la existencia discreta de algunos puntos, dados por la construcción, garantiza la existencia de la parábola en cuestión, o si la existencia de la parábola depende de la posibilidad de construcción a través de una heurística específica (v.g., la regla y el compás).

Esta cuestión ofrece también la oportunidad de discutir si efectivamente el conjunto finito de puntos constituye una “buena” representación del lugar geométrico o si su carácter discreto y finito no ofrece un buen ambiente para la representación del carácter continuo de la curva en cuestión.

APERTURA A UNA DISCUSIÓN

Lo presentado hasta acá no pretende ir más allá del título del artículo y, en consecuencia, constituye tan solo un punto de partida para que los profesores de Matemáticas, formadores de profesores e investigadores en Educación Matemática emprendamos una discusión metamatemática, como lo es la discusión acerca de la existencia de los objetos geométricos, a partir de la cual seamos un poco más conscientes de cómo tal existencia puede emerger en situaciones matemáticas escolares o puede tener implicaciones en la comprensión que de las Matemáticas van logrando nuestros estudiantes. Es esta pues, una sencilla invitación a una discusión totalmente abierta en donde las diferentes voces se deben pronunciar y escuchar, para favorecer el conocimiento *sobre* las Matemáticas (y no solo *de* las Matemáticas) tan necesario para el ejercicio docente en Matemáticas, para la misión de educar a los profesores de Matemáticas y para la ardua tarea investigativa en los campos de la Educación Matemática y la Educación de los profesores de Matemáticas.

REFERENCIAS

Acerbi, F. (2011). The language of the ‘givens’: Its forms and its use as a deductive tool in Greek mathematics. *Archive for History of Exact Sciences, 65*(2), 119-153.

Barón, O. y Barragán, P.J. (2013). *Una teoría antigua vista con los ojos del hoy: influencia sobre el profesor de matemáticas* (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Berghout, R.F. (1974). The historical development of magnitudes, ratios and proportions. *Australian Mathematics Teacher, 30*(5), 184-196.

Berghout, R.F. (1975). The historical development of magnitudes, ratios and proportions. *Australian Mathematics Teacher, 31*(2), 66-76.

Cassou-Nogués, P. (2005). Gödel and ‘the objective existence’ of mathematical objects. *History and Philosophy of Logic, 26*(3), 211-228.

Euclides (1991, trad.). *Elementos. Libros I-IV* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Euclides (1994, trad.). *Elementos. Libros V-IX* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Euclides (1996, trad.). *Elementos. Libros X-XIII* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Freudenthal, H. (2002). Ratio and proportionality. En *Didactical phenomenology of mathematical structures* (pp. 178-209). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers (primera edición, 1983).

Gardies, J.-L. (1997). L’organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède. París, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Gardies, J.-L. (2004). *Du mode d’existence des objets de la mathématique*. París, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid’s *Elements*: How did he handle them? *Historia Mathematica, 23*(4), 355-375.

Guacaneme, É.A. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. En O.L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99-135). Bogotá, Colombia: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Harari, O. (2003). The concept of existence and the role of constructions in Euclid’s *Elements*. *Archive for History of Exact Sciences, 57*(1), 1.

McDowell, G. y Sokolik, M. (1993). *The data of Euclides*. Baltimore, EUA: Union Square Press.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia: Autor.

Quintero, A.L., Molavoque, M.J. y Guacaneme, É.A. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de Ciencias, 16*, 75-85.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*, 103-129.

Torres, L.A. y Guacaneme, É.A. (2011a, julio). *Aproximación a las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas*. Ponencia presentada en XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

Torres, L.A. y Guacaneme, É.A. (2011b, octubre). Caracterización de las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas. Ponencia presentada en IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas y V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria, Escuela Colombiana de Ingeniería "Julio Garavito", Bogotá, Colombia.

DGPAD Y LA NUEVA GEOMETRÍA DINÁMICA DE LAS TABLETAS TÁCTILES

Eric Hakenholz
Creados CaRMetal
Eric.hakenholz@laposte.net

Presentaré el software DGPad a partir de ejemplos de utilización en clase de matemáticas. Con base en esos ejemplos mostraré los elementos de interfaz gráfica, enfatizando en los aportes de esos cambios desde un punto de vista didáctico. También mostraré cómo la ausencia de un periférico multifacético como el ratón (clic izquierdo y derecho, rueda, cursor permanente) puede obligar, para la concepción de un software de geometría dinámica, a buscar soluciones simples y ergonómicas que permitan a los alumnos hacer geometría sin tener que preocuparse por el aspecto técnico.

El concepto de geometría dinámica no puede separarse de la tecnología informática específica en la que se implementa. Cuando apareció el ratón a mediados de los años 1980, el equipo de Cabri-Geometry lo aprovechó para crear una interfaz gráfica según los principios generales de "manipulación directa", tal como los estableció Ben Shneidermann en 1983. Durante decenas de años, las interfaces evolucionaron, pero todos los avances realizados tienen en común la gestión de eventos del ratón.

El mundo de las pantallas táctiles constituye una ruptura con muchas costumbres de uso. Pasar por ejemplo de la continuidad (contacto permanente del ratón) a la discontinuidad del dedo (tocar aquí o allá) necesita replantearse la interfaz gráfica, especialmente pensando en su uso para la clase.

Todas las preguntas planteadas por ese cambio de herramienta, sobre la nueva forma de interacción hombre-máquina, me llevaron a producir un nuevo software de geometría dinámica, DGPad, en lugar de simplemente adaptar CaRMetal para que funcionara en las tabletas.

Hakenholz, E. (2013). DGPad y la nueva geometría dinámica de las tabletas táctiles. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 35-36). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Por supuesto, CaRMetal sigue su desarrollo, y tomaré también tiempo, para retomar el ratón y mostrar cómo ese software “clásico” va a evolucionar, especialmente con respecto a la 3D y la utilización en red.

THE ROLE OF CONCEPTIONS IN ARGUMENTATION AND PROOF

Bettina Pedemonte
DiDiMa srl – ITD (CNR)
bettina.pedemonte@gmail.com

In this article an analysis concerning the role of students' conceptions in solving a geometrical problem is presented. Even if conceptions do not usually appear in the final proof, they strongly affect the argumentation activity. The main aim of this paper is to show this influence. In particular, through the use of Toulmin's model, we show how conceptions can affect the modal qualifier and the rebuttal of argumentation.

INTRODUCTION

As highlighted by Balacheff (2009) mathematical knowing and proving cannot be separated. Engaged in mathematical problem-solving, learners proceed based on their understanding of mathematical concepts and related process. This activity is a tangle of intuitions, know-how, knowledge and a variety of mental constructs, which allow learners to make choices and take decisions. Proving activity is strictly connected to the on-going argumentation activity involved in solving a problem (Boero, Garuti and Mariotti, 1996). When students construct their argumentations in order to construct a proof they use their conceptions (Balacheff, 2009) that are at the basis of argumentation activity (Pedemonte, 2008) even if in the proof (considered as final product in the proving activity) they are usually not present.

As stated from Balacheff (2009) a conception is not a kind of property or state of knowledge ascribed to a learner, but a property or state of knowledge of a learner in a situation; a conception is a situated mental construct. Furthermore for a given piece of mathematical concept, a learner may not have one conception, but a set of conceptions likely to be mobilized depending on the situations in which he or she is involved. A deeply analysis explaining how conceptions affect the construction of an argumentation is important to compare knowledge used in the argumentation with theorems used in the proof.

Pedemonte, B. (2013). The role of conceptions in argumentation and proof. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 37-48). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Some previous researches (Pedemonte, 2005) have shown that, if the conception corresponds to the application of a mathematical rule there will probably be continuity between argumentation and proof because this rule can be replaced in the proof with a theorem. Obviously, if the conception is not correct, it cannot be replaced by a theorem in the proof phase. In this case, three possibilities can be identified: the proof is not constructed by the student because he is not able to replace the conception by a theorem; an "incorrect proof" is constructed and it is based on the conception used in the argumentation; the argumentation based on the conception is abandoned and another argument is constructed. As a consequence, it is very important the kind of conceptions mobilized in the argumentation because the construction of the proof strictly depends from it.

The present paper can be considered as a continuation of the previous study in that it analyses the role of the qualifier and the rebuttal in the argumentation. Through the use of Toulmin's model, we show how conceptions intervene in the construction of argumentation when students solve a geometrical problem. In particular, the Toulmin's model allows us to show where conceptions intervene in the students' argumentation (as warrant, backing, rebuttal or qualifier). It is quite obvious that conceptions affect the warrant and the backing in the argumentation (Pedemonte, 2005) if we assume that conceptions lead the construction of the argumentation. On the contrary, concerning the qualifier and the rebuttal some clarifications occur. Indeed, as highlighted by research (Inglis, Mejía-Ramos and Simpson, 2007) the modal qualifier and the rebuttal have an important role in the argumentation activity. They show that it is important to learn to pair intuitive arguments with appropriate modal qualifiers and rebuttals. This is crucial in the process of solving the problem and in particular to produce an appropriate proof.

The aim of this paper is to show that the strength of an argument strongly depends from the mobilized conceptions and the rebuttal can be developed as a related consequence.

In the following sections, after a brief presentation about Toulmin's model, we analyze two students copies taken from a set of data collected from a teaching experiment. This analysis shows how conceptions can affect the modal qualifier and the rebuttal of students' argumentations.

TOULMIN'S MODEL

Toulmin's model (1958/1993) has been used by several researchers in mathematics education (Lavy, 2006; Stephan and Rasmussen, 2002; Hollebrands, Conner, Smith, 2010; Knipping, 2008) to examine students' mathematical argumentations. In this report, Toulmin's model is used to analyze student's argumentations (Pedemonte 2007, 2008).

In any argumentation the first step is expressed by a standpoint (an assertion, an opinion). In Toulmin's terminology the standpoint is called the claim. The second step consists of the production of data supporting the claim. The warrant provides the justification for using the data conceived as a support for the data-claim relationships. The warrant can be expressed as a principle, a rule and it acts as a bridge between the data and the claim. This is the base structure of an argument, but auxiliary elements may be necessary to describe an argumentation. Toulmin describes three of them: the qualifier, the rebuttal and the backing. The force of the warrant would be weakened if there were exceptions to the rule, in that case conditions of exceptions or rebuttal should be inserted. The claim must be weakened by means of a qualifier. A backing is required if the authority of the warrant is not accepted straight away.

Then, Toulmin's model of argumentation contains six related elements as showed in the Figure 1.

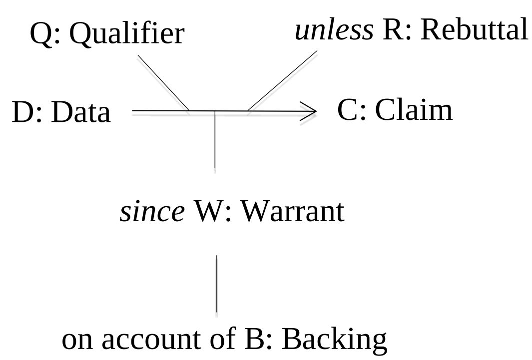
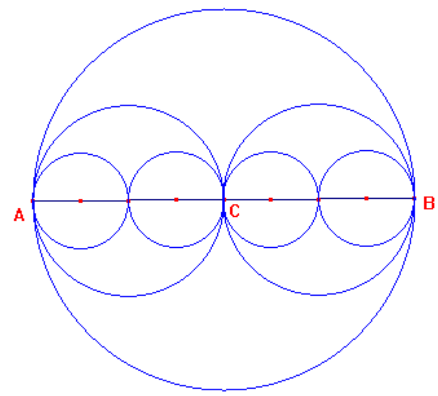


Figure 1: Toulmin's model

EXPERIMENTAL DESIGN

The following examples are taken from a set of data collected in two classes – 11th and 12th grade– in Italy, and in one 12th grade class in France. In total we have analyzed 16 students. The students worked in pairs on a computer running the Cabri-Geometry software. The experiment lasted about an hour and a half. The problem proposed was the following:

Construct a circle with AB as a diameter. Split AB in two equal parts, AC and CB. Then construct the two circles of diameter AC and CB... and so on. How does the perimeter vary at each stage? How does the area vary?



To solve the problem students usually calculate the perimeter and the areas of each curve for the first three or four stages. They consequently observe that the perimeter is constant in each stage while the area is each times the half of the precedent.

In this paper we analyze how conceptions of students lead the solution of the problem and the construction of the proof. To solve the problem students have to establish a relationship between two different settings (Douady, 1985): the spatio-graphic setting (where they see how the radius change from a stage to the following one) and the algebraic setting (where they manipulate formulas). To accept an argumentation as valid the conception should provide the means to account for the coherency between the two settings. Only in this case the modal qualifier of the argumentation is strong enough to allow students to consider the construction of a proof; although in some cases it could not be enough (see Example 1). Furthermore, because students worked in pair, it was easier for us to observe the interactions of different conceptions. Indeed, when students construct different and contrasting argumentations (see Example 2) they are obliged to make a choice to construct a proof.

In the following section we present two examples to show how the students' conceptions affect their argumentations:

- Example 1: the conception leads the student to consider a rebuttal in its own argumentation (rebuttal inside the argument).

- Example 2: the conception mobilized by a student becomes a rebuttal in the classmate's argumentation (rebuttal outside the argument).

The solution protocols are based on transcriptions of audio recordings and on the students' written productions. The assertions produced by students were selected and the argumentative steps were reconstructed. The indices identify each argumentative step. The student's text is in the left column while comments and analyses are reported in the right column. The texts have been translated from Italian/French into English.

Example 1

Nicola and Stefano attend the 12th grade in an Italian school. Nicola is the student who seems to have a "leader role" in solving the problem. He talked much more than his classmate Stefano. At this moment students are trying to understand how change the area of the curve at the second stage (constituted from the two circles) in respect to the area of the first curve (the circle).

6. N: …the area is πr^2, so 7. S: the area 8. N: here it becomes the half of the previous one… the sum of these two circles (*Nicola shows the second curve*) is the half to the first one, the sum of the four circles (*he shows the third curve*) is the half to the second one … it is the radius…yes, the area is the half because we have cut the diameter of the first curve in two parts and consequently the diameters of the two curves are the half of the first curve's diameter… and so the area of the two curves is the half of the area of the first curve. 9. S: yes because 10. N: because the sum of the two little radii is equal to the radius of the first circle, and so the area of these two circles here, is the half of the area of the first circle. 11. S: Ok, we can write…	*Students know the formula of the area of the circle and Nicola understands the relationship between the radius and the number of circles: the radius of one circle of the second curve is the half of the radius of the first curve.* D_1: the area of the first curve is πr^2 → C_1: the area of the second curve is the half of the area of the first curve W: The radius of the second curve is the half of the radius of the first curve Formula of area B: Spatio-graphic and algebraic settings *Note that the students reasoning "lives" in both settings: the algebraic and the spatio-graphic ones.*

Even though both students solved the problem, and they have all elements necessary to construct proof, they decided to measure the areas. The qualifier of the argument is not strong enough to pass to the construction of the proof. Students need to measure the areas to be sure about their reasoning. There is an implicit rebuttal in the student argument; the calculus of the computation should confirm students reasoning.

16. N: wait, wait a moment, we have to measure the areas to be sure… measure the radius and calculate the areas *The students measure the radius and they calculate the areas of the circles using the specific tool in Cabri-Geometry.*	R: unless the calculus obtained measuring areas provide different results Q: Probably D_1: the area of the first curve is πr^2 → C_1: the area of the second curve is the half of the area of the first curve W: The radius of the second curve is the half of the radius of the first curve Formula of area B: Spatio-graphic, algebraic and arithmetic settings *In this case the reasoning is performed in the symbolic arithmetic setting. Nicola needs to check his argument to be sure it is correct. The arithmetic setting represents a "sure" domain that could strength the qualifier of the argument.*

Only when the calculus of the computation confirm theirs reasoning the two students decide to construct a proof. It is interesting to observe that here the reasoning lives in three different settings: algebra, spatio-graphic (drawings), and symbolic arithmetic. Only after measuring the area Nicola is satisfied with his reasoning.

The Rebuttal R is developed from the students (calculus obtained measuring areas have to be compatible with the algebraic results) because if the results of the computation do not provide the results students are waiting for, the argument could be false.

For the perimeter their reasoning is quite similar: they see that in the three cases the perimeter is the same and they verify calculating it with the measurement tool of Cabri-Geometry.

Example 2

Vincent and Ludovic are two 12th grade French students. They promptly see that radius in each curve is divided by two, so using the perimeter and area formulas, they construct the conjecture: the perimeter is always the same and the area of each curve is the half of the area of the previous curve.

9. V: The perimeter is $2\pi r$ and the area is πr square 10. L: yes 11. V: but how does the radius evolve? r is divided by two 12. L: yes, the first perimeter is $2\pi r$ and the second is $2\pi r$ over 2 plus $2\pi r$ over 2 … then it is the same 13. V: then yes… 14. L: and it is always the same… look at that... we name r the first, r is the radius of the first curve, the perimeter of the first circle is…. 15. V: $2\pi r$ 16. L: $2\pi r$ and the sum of the perimeter for the second curve is $2\pi r$ over 2 17. V: plus $2\pi r$ over two, that means $2\pi r$… and so on. The next one is $2\pi r$ over 4 but for 4 times 18. L: then the sum is always $2\pi r$ 19. V: it is always the same perimeter….	*The students consider the radius for each curve and they note that it is always divided by two. They construct the conjecture* D_1: the perimeter of the first curve is $2\pi r$ → C_1: the perimeter of the second curve is $2\pi r$ W: The radius is divided by 2 for each subdivision but the number of circles is double Formula of perimeter B: Spatio-graphic and algebraic settings *As in the previous example, the backing includes the Spatio-graphic and the algebraic settings. However, it is interesting to observe that the reasoning is probably developed observing the drawing but it is generalized in the algebraic setting.*

	D_2: C_1 → C_2: the perimeter of the third curve is $2\pi r$ W: The radius is divided by 2 for each subdivision but the number of circles is double Formula of perimeter B: Spatio-graphic and algebraic settings *Students see that the radius is divided by two for each subdivision (not only for the first curve to the second one).* *Then students generalize their results and construct the conjecture.* D_3: $D_1 \rightarrow C_1$, $D_2 \rightarrow C_2$ → C_3: the perimeter is always $2\pi r$ W: Generalization on the process

In the same way the students consider the areas and they construct their conjecture.

20. L: on the contrary the area is πr square 21. V: in this case … 22. L: hem…. It is divided by two… 23. V: yes, πr over two at the second power plus πr over two at the second power is equal… 24. L: is equal to … πr at the second power over two 25. V: yes, if we divide by two 26. L: yes, the area is always the half of the previous one *Vincent write the area for the third curve and he observe that it is the half of the pre-*	D_4: the area of the first curve is πr^2 → C_4: the area of the second curve is $\pi r^2/2$ W: The radius is divided by 2 for each subdivision but the number of circles is double Formula of area B: Spatio-graphic and algebraic settings

vious one 31. V: the area is divided by two each time….	D_5: $D_4 \rightarrow C_4$ $\longrightarrow$ C_5: the area is divided by 2 each time W: Generalization on the process

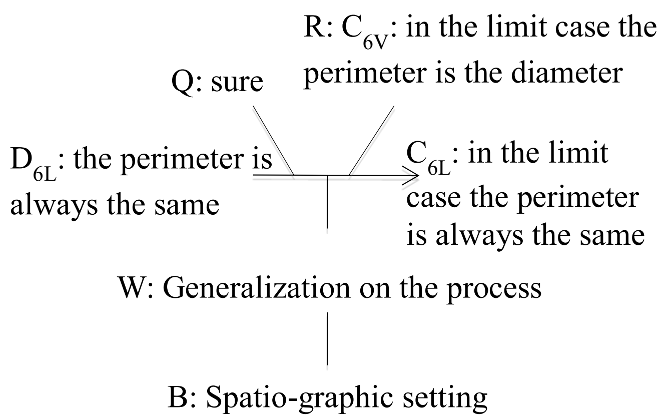
The students conjectured that the perimeter is constant while the area decreases to zero. With no hesitation both students solved the problem, and until now it seems that both of their conjectures were validated in the two settings: the algebraic setting and the spatio-graphic setting.

Actually this was probably not the case. Let's see the following part where students decide to consider the limit case.

It is interesting to observe that Vincent and Ludovic have two different conceptions with respect to the limit case. The Vincent's conception is mobilized in the spatio-graphic setting (drawing): Vincent "sees" the perimeter becoming the diameter of the circle. On the contrary, Ludovic' conception is mobilized in the algebraic setting: at the limit the perimeter is $2\pi r$.

37. V: yes, then the perimeter? 38. L: non, the perimeter is always the same 39. V: but in the worst case, the perimeter becomes twice the segment 40. L: what? 41. V: It falls in the segment... the circle are so small 42. L: Hmm... but it is always $2\pi r$ 43. V: Yes, but when the area tends to 0 it will be almost equal... 44. L: no, I do not think so 45. V: If the area tends to 0, then the perimeter also... I don't know … 46. L: I will finish writing the proof. *Silence… Ludovic writes the first proof and he does not pay attention to the Ludovic idea.*	*The two students produce two different arguments.* *Ludovic argument can be represented as follows:* D_{6L}: the perimeter is always the same $\longrightarrow$ C_{6L}: in the limit case the perimeter is always the same W: Generalization on the process B: Algebraic settings *W is constructed by Ludovic observing the regularity of the results at each stage: if for each curve the result is $2\pi r$ then at the limit case the result should be the same The Ludovic reasoning is in Algebra.* *For Vincent the limit case is the diameter because he sees the drawing:* C_{6V}: at the limit case the perimeter is the diameter

The two students don’t agree to each other; they have two different conceptions that lead them to two different claims. Vincent’s statement runs as a rebuttal in the Ludovic argument. Nevertheless, it is not strong enough to modify the argument. Indeed, while Vincent’s conception is based on perceptive aspects, Ludovic argument is based on Algebra.

Vincent is not really convinced that at the limit case the perimeter is also the same. 47. V: But if the area is close to 0 at the limit case, also the perimeter should be close to twice… to the diameter of the first curve 48. L: it is different, the perimeter is constant 49. V: ah ok…	

Although Vincent and Ludovic collaborate well and seem to share the mathematics involved, the types of reasoning they develop on their problem-solving activity differ. Ludovic is working in the algebraic setting, his reasoning is provided by his verification of the correctness of the symbolic manipulation and his knowledge of elementary algebra. For Vincent the reasoning comes from a constant confrontation between what the formula “tells” and what is displayed in the drawings. Both students understood the initial situation in the “same” way, both syntactically manipulated the symbolic representations (i.e., the formulas of the perimeter and of the area), but their reasoning were different, revealing that the conceptions they mobilized were also significantly different.

CONCLUSION

In this paper we have analyzed the role of students’ conceptions (Balacheff, 2000) in the construction of a proof. The use of Toulmin’s model highlighted some important aspects of this relationship. First of all, we have observed that the conception strongly affect the modal qualifier of an argumentation.

Furthermore, we have observed that the rebuttal can have two different roles: it can be developed inside the argumentation, if it is developed from the arguer himself, or it can be outside the argumentation if it is developed from someone else.

In the first case (Example 1) the rebuttal is constructed to strength the argumentation. If the rebuttal is rejected the conception is validated in another representation system making the qualifier of the argument stronger than before.

In the second case, the rebuttal is constructed because the two conceptions are in opposition. In Example 2, when students consider the limit case, we observed that the two students' conceptions are based on different settings. Algebra is stronger in respect to the spatio-graphic setting, this is why the rebuttal is rejected and the argumentation can be transformed into a proof in a mathematical sense.

REFERENCES

Balacheff, N. (2000). A modelling challenge: Untangling learners' knowing. In *L'apprentissage, une approche transdisciplinaire* (pp. 7-16). Orsay, France: Institut des Sciences Cognitives et de la Communication. Retrieved from http://telearn.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/02/92/PDF/Balacheff2000.pdf

Balacheff, N. (2009). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H.N. Jahnke and H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics. Philosophical and educational perspectives* (pp. 115-135). New York, USA: Springer.

Boero, P., Garuti, R. and Mariotti, M.A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In L. Puig and Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. II, pp. 121-128).Valencia, Spain: University of Valencia.

Douady, R. (1985). The interplay between the different settings, tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. II, pp. 33-52). Utrecht, Germany: State University of Utrecht.

Hollebrands, K., Conner, A. and Smith, R.C. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 324-350.

Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P. and Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3-21.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes. *ZDM*, *40*(3), 427-441.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(2), 153-169.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *25*(3), 313-348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23-41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM*, *40*(3), 385-400.

Stephan, M. and Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 459-490.

Toulmin, S.E. (1993). *The uses of arguments*. Cambridge, UK: University Press (First published, 1958).

Cursillos de invitados

ESTUDIANDO EXPERIMENTALMENTE LAS CÓNICAS CON ESPEJOS

Martín Acosta
Universidad Distrital
meacostag@udistrital.edu.co

En este cursillo trabajaremos una propuesta de ingeniería didáctica para el estudio de las cónicas como lugares geométricos a partir de un trabajo experimental con espejos y su modelación con geometría dinámica.

REFERENTE TEÓRICO

La Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998/2007) propone el concepto de situación a-didáctica como un modelo de interacción entre un sujeto y un medio, en la cual se construye un conocimiento como estrategia óptima de solución de un problema. El medio se concibe como un antagonista del sujeto, que impone restricciones a sus acciones, y también ofrece posibilidades de acción. El elemento fundamental de esta interacción sujeto/medio, desde el punto de vista del aprendizaje, es la posibilidad de validación (Margolinas, 2009), es decir la posibilidad que tiene el sujeto de decidir si sus acciones lo conducen o no a la solución del problema.

Una situación a-didáctica es productora de sentido del conocimiento, en tanto que este surge de las preguntas del sujeto y se configura como respuesta a esas mismas preguntas. Ese conocimiento, producto de la situación a-didáctica, necesariamente es personal y contextualizado, pero tiene el potencial de ser descontextualizado y generalizado para alcanzar el estatus de saber matemático.

En la geometría escolar, generalmente se presentan las cónicas como lugares geométricos en el contexto de la geometría analítica y, por lo tanto, se privilegia la manipulación de ecuaciones. Esta presentación no posibilita darle sentido a algunas propiedades de las cónicas relativas a los focos, y su uso como herramientas de la vida moderna.

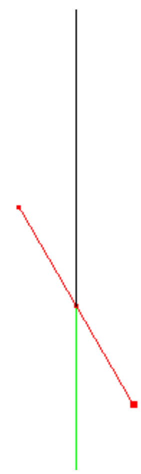
METODOLOGÍA

En esta ingeniería didáctica proponemos partir de una situación experimental de reflejar rayos de luz con espejos planos, y trabajar su modelación con soft-

Acosta, M. (2013). Estudiando experimentalmente las cónicas con espejos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 51-52). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

ware de geometría dinámica (Cadavid y Restrepo, 2011), durante la cual se plantean y resuelven algunos problemas de esa modelación con herramientas geométricas como la simetría axial. El software de geometría dinámica como medio a-didáctico nos permitirá amplificar las capacidades de experimentación, realizando validaciones e invalidaciones gracias al arrastre y la referencia al experimento físico. Los procesos de superación de los problemas de modelación utilizando conceptos geométricos permitirán construir la parábola y la elipse como lugares geométricos con propiedades particulares de reflexión.

EJEMPLO DE PROBLEMA



La semirrecta negra representa el rayo láser, el segmento rojo representa el espejo. Construya el rayo reflejado.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (2007). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (primera edición en francés, 1998).

Cadavid, S. y Restrepo, C. (2011). *El proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas* (Martín Acosta y Jorge Fiallo, Trs.). Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander (primera edición en francés, 1993).

Formalización de razonamiento con Geometrix

Martín Acosta
Universidad Distrital
meacostag@udistrital.edu.co

En este cursillo trabajaremos una propuesta de utilización del software Geometrix como asistente para la construcción de demostraciones formales a partir de problemas de construcción.

Referente teórico

El Proyecto Institucional de Uso de Geometría Dinámica, formulado por el grupo Edumat-UIS, propone la organización de un currículo de geometría como la evolución del trabajo geométrico de los alumnos pasando por cuatro etapas. La primera etapa, llamada Geometría de las Formas, es en la que se trabaja el reconocimiento y la clasificación de formas geométricas. Es la geometría trabajada en el pre-escolar y los primeros grados de primaria, basada en la construcción y utilización de imágenes mentales prototípicas. La segunda etapa es llamada Geometría de las Propiedades; a diferencia de la primera etapa, se trabaja la descomposición de las formas en objetos de dimensión inferior (deconstrucción dimensional, Duval, 1992-1993), y el reconocimiento y producción de relaciones geométricas entre esos objetos, como el paralelismo o la congruencia. La tercera etapa es llamada Geometría de las Justificaciones; a diferencia de la etapa anterior, que pone el énfasis en la construcción de figuras a partir de las propiedades, en esta etapa se hace énfasis en el razonamiento geométrico como justificación de los procedimientos de construcción que garantizan que se cumplan determinadas propiedades. La cuarta etapa es llamada Geometría de las Demostraciones, y se caracteriza por el énfasis en la formalización de los razonamientos; ya no solamente se trabajan justificaciones informales, sino que se explicita la forma de los enunciados, de las reglas teóricas y del encadenamiento de los mismos.

Para el paso de la Geometría de las Formas a la Geometría de las Propiedades y de esta a la Geometría de las Justificaciones, el Proyecto Institucional propone el uso del software Cabri para la solución de problemas de construcción, utilizando la validación o invalidación por arrastre como una herramienta di-

Acosta, M. (2013). Formalización de razonamiento con Geometrix. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 53-54). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

dáctica que permite identificar las propiedades geométricas como invariantes de movimiento. Además, al resolver problemas de construcción, los estudiantes van acumulando procedimientos de construcción que se convierten en reglas teóricas para justificar otras construcciones.

Pero el paso a la Geometría de las Demostraciones es un poco más complejo, pues el hecho de considerar los enunciados de las proposiciones y de las reglas teóricas y sus encadenamientos, requiere un elemento de rigor en el lenguaje que obliga a considerar diferentes combinaciones y reformulaciones de las proposiciones. Para estudiantes que inician este proceso de formalización puede resultar confusa esa exigencia en la forma, hasta vaciar de significado el proceso de construcción de demostraciones. Algunos autores consideran indispensable relacionar las actividades de exploración y argumentación con los procesos de demostración (Camargo, Samper y Perry, 2006), como una estrategia para evitar esa situación.

Por nuestra parte consideramos que el uso de un asistente de demostración como Geometrix, que toma a su cargo la producción y transformación de los enunciados a partir de la construcción, y controla las relaciones entre los enunciados y las reglas teóricas, apoyando este proceso con el trabajo sobre la figura, puede resultar benéfico para el aprendizaje de la demostración formal (Richard y Fortuny, 2007).

METODOLOGÍA

Trabajaremos problemas elementales de construcción en Geometrix, y sus correspondientes demostraciones, identificando a la vez los diferentes elementos de la interfaz del software y la posibilidad de integrarlo como una herramienta que ayude a conceptualizar la demostración formal de un enunciado.

REFERENCIAS

Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas* (Número especial), 371-383.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37-61.

Richard, P. y Fortuny, J. (2007). Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 12, 83-116.

CONSTRUCCIÓN DE ESCENARIOS PARA EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN INFORMÁTICA Y GEOMETRÍA

Juan Albornoz, Raúl Chaparro y Alfonso Meléndez
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
jalbornoz09@gmail.com, raul.chaparro@escuelaing.edu.co, alfonso.melendez@escuelaing.edu.co

En este cursillo se presentará una alternativa para la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales y estrategias de solución de problemas en informática y geometría elemental, basada en escenarios que incorporan la experimentación con modelos físicos y virtuales de juegos discretos, GeoGebra y los sistemas formales.

INTRODUCCIÓN

La experimentación es una actividad que le permite a la persona ser protagonista de su propio aprendizaje (Albornoz y Chaparro, 2005). Generalmente esta actividad no está en el presupuesto de las didácticas para el aprendizaje de los conceptos fundamentales y estrategias de solución de informática y geometría.

DESCRIPCIÓN GENERAL

En este cursillo se pretende mostrar un enfoque basado en escenarios que permitan el aprendizaje de conceptos y estrategias de solución de problemas de informática y geometría (Albornoz y Chaparro, 2009). Se desarrollará por medio de talleres en los que los participantes tendrán la oportunidad de experimentar y desarrollar algunas actividades que están íntimamente relacionadas con conceptos, estrategias y principios, cuyo conocimiento es fundamental para la solución de problemas en informática y matemáticas. Por otro lado, en cada actividad se hará una reflexión sobre los aspectos pedagógicos y didácticos correspondientes y después de la puesta en común se sacarán conclusiones con base en los aportes de los participantes. En la última sesión, discutiremos y ampliaremos globalmente el enfoque de una didáctica basada en escenarios,

Albornoz, J., Chaparro, R. y Meléndez, A. (2013). Construcción de escenarios para el aprendizaje de conceptos fundamentales y estrategias de solución de problemas en informática y geometría. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 55-58). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

y se invitará a los participantes a unirse a esta propuesta y a permanecer en contacto con los profesores del cursillo.

ACTIVIDADES DEL CURSILLO

Taller 1. Escenarios para aprendizaje de geometría. Módulo GeoGebra

Objetivos

- Aprender a modelar un problema geométrico en GeoGebra.
- Entender la diferencia entre un modelo visual y un modelo geométrico (Mason, Burton y Stacey, 1982/1988).
- Encontrar invariantes del problema (Schoenfeld, 1985).
- Formalizar los invariantes con ayuda de GeoGebra.

Talleres 2 y 3. Escenarios para aprendizaje de informática: los juegos discretos para estudiar sistemas formales (axiomas, teoremas, demostraciones y juegos discretos)

Objetivo

Estudiar y comprender:

- los sistemas formales y sus elementos,
- los sistemas formales y el razonamiento deductivo (Polya, 1945/1965),
- los sistemas formales y los juegos discretos,
- el modelamiento con sistemas formales en el computador.

Conclusiones generales

Después del desarrollo de los talleres de geometría e informática, tenemos un referente para una reflexión sobre lo siguiente:

- ¿Qué es un escenario como estrategia para el aprendizaje de conceptos y la solución de problemas en informática y geometría?

- ¿Cómo se diseñan y se construyen los escenarios?
- ¿Cuál es el valor agregado del enfoque de aprendizaje basado en escenarios?

Propuesta pedagógica

Tradicionalmente, el proceso de enseñanza se inicia cuando el profesor da una explicación global y abstracta de una técnica o estrategia, tal vez apoyándose en algunas representaciones gráficas generales; luego, él mismo ejemplifica su uso mediante la solución de algún problema en el cual la técnica aplica y funciona de forma clara y efectiva; finalmente, los estudiantes consultan referencias bibliográficas donde encuentran casi lo mismo que dijo el profesor y resuelven, o más bien intentan resolver, algunos de los problemas propuestos en los textos. Solo por citar un ejemplo, en alguno de los cursos de programación de computadores se explica la estrategia conocida como *dividir y conquistar*, y se muestra su uso en la solución de un problema clásico conocido como *el problema de las Torres de Hanoi*. Una situación parecida se presenta cuando se estudian conceptos fundamentales en informática como *inducción*, *recursión* e *invariante* (Polya, 1945/1965), entre otros, que están muy relacionados con las estrategias de solución de problemas mediante algoritmos.

La experiencia nos permite afirmar que para la mayoría de los estudiantes, tanto las estrategias como su ejemplificación, lo mismo que varios conceptos fundamentales para su formación, no quedan bien entendidos (Albornoz y Chaparro, 2009). Creemos que esto se debe, en buena parte, a que las explicaciones de los textos y del profesor no son suficientes. Estos vacíos conceptuales entorpecen y afectan sus procesos de aprendizaje posteriores, pueden retrasar la culminación de sus estudios, provocar una pérdida de confianza en sus capacidades para resolver problemas de índole informático y matemático y, por otra parte, dificultar la labor de los profesores de los cursos en los cuales el dominio de esos conceptos y técnicas de solución de problemas es un requisito.

Basados en los resultados de pequeños experimentos pedagógicos realizados durante los dos últimos semestres (Albornoz y Chaparro, 2005), creemos viable la creación de ambientes de enseñanza que corrijan el problema planteado y que adicionalmente tengan las siguientes características:

- Permitan que el estudiante se aproxime gradualmente a los conceptos, los reconstruya y los interiorice; en contraposición a que los reciba como un conocimiento ajeno, complicado, ya elaborado, terminado, inmodificable y en algunas ocasiones descontextualizado.
- Provean el contexto necesario para que el estudiante y el profesor se hagan preguntas acerca de lo que estudian, expongan nuevas ideas, propongan otras situaciones y problemas diferentes a los que normalmente se presentan en las clases o en los libros.
- Faciliten el proceso mental de abstracción mediante la utilización de modelos o artefactos que permitan la manipulación de los elementos del problema, la experimentación con casos particulares, el descubrimiento de propiedades invariantes en el problema (Mason, Burton y Stacey, 1982/1988), etc.
- Favorezcan la experimentación, la reflexión y la creatividad.

REFERENCIAS

Albornoz, J. y Chaparro, R. (2005). The learning of fundamental concepts and problem solving strategies in informatics, through the experimentation and classroom research with physical and virtual models of the Turing machine. En *Information technology based higher education and training. 6th International Conference*. doi 10.1109/ITHET.2005.1560295

Albornoz, J. y Chaparro, R. (2009). La computación a través de los juegos discretos. *Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería*, *1*(3), 159-173.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente* (Mariano Martínez Pérez, Tr.). Barcelona, España: Centro de Publicaciones del MEC - Editorial Labor (primera edición inglesa, 1982).

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (Julián Zugazagoitia, Tr.). México D.F., México: Editorial Trillas (primera edición en inglés, 1945).

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, EUA: Academic Press.

AMBIENTES CATEGÓRICOS PARA LA TOPOLOGÍA

Alberto Donado, Jorge Hernández y Reinaldo Montañez
Universidad Pedagógica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Universidad Nacional de Colombia
adonado@pedagogica.edu.co, jahernandezp@udistrital.edu.co, jrmontanezp@unal.edu.co

Las categorías topológicas aparecen como una generalización del estudio del funtor olvido de estructura, definido de la categoría de los espacios topológicos a la categoría de los conjuntos, en particular, de las propiedades relacionadas con las topologías iniciales y finales que tiene dicho funtor. En este trabajo se estudian algunas propiedades de las categorías topológicas y se muestran algunas formas de construcción. En particular, las categorías de las colecciones, de los espacios completamente regulares, de los espacios uniformes y los espacios de proximidad son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos, y la categoría de los espacios topológicos punteados lo es sobre la categoría de los espacios topológicos punteados.

INTRODUCCIÓN

La teoría de categorías aparece como una rama de las matemáticas que unifica el trabajo de las diferentes áreas de la misma. Para el caso que nos ocupa, es posible realizar en muchas categorías construcciones propias de la categoría de los espacios topológicos, entre otras las relacionadas con la homotopía, homología y cohomología. En este punto, es de anotar que, en particular las teorías mencionadas no serán el centro de atención del trabajo sino que se constituye más bien en la motivación del mismo. Con un poco más de precisión, al retener algunas de las propiedades de la categoría de los espacios topológicos se generan otras categorías, donde es posible realizar algunas de las construcciones como las anotadas arriba. Por ejemplo, al relacionar conceptos como fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles se da origen a las llamadas categorías modelo donde se muestran ambientes distintos a la topología para rehacer la teoría de la homotopía (ver Dwyer y Spalinski, 1995). Ahora bien, al pensar en un universo donde existan exponenciación, un objeto de partes y ciertos tipos de límites, como por ejemplo uniones e intersecciones, se generan los topos; de esta manera un topos puede ser pensado como un espacio generalizado, en el que se estudian, entre otras cosas, aspectos de la homo-

Donado, A., Hernández, J. y Montañez, R. (2013). Ambientes categóricos para la topología. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 59-62). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

logía y la cohomología (ver Johnstone, 2002). Finalmente para citar otro ejemplo, al retener como concepto fundamental las topologías iniciales y finales, se generan las categorías topológicas. Es de anotar que las categorías topológicas son el centro de atención del trabajo.

Podría decirse que llevó tiempo a los investigadores encontrar una teoría de categorías apta para los topólogos, puesto que la disponible era apta para los algebristas, y la topología categórica inicia con Bourbaki y es en su primer libro donde aparecen las nociones que la inspiran como las de topologías iniciales y finales. Trabajos muy completos y más recientes se encuentran en Preuss (1988) y Adamek, Herrlich y Strecker (1990).

Finalmente, el cursillo que se propone es de carácter básico, se presenta de forma autocontenida y pretende solo mostrar algunos aspectos de la teoría general de las categorías topológicas, sus fundamentos, sus propiedades, algunos métodos de construcción y algunos ejemplos básicos. Para abordarlo solo se requieren conceptos básicos de la topología general y de la teoría de categorías y todos se presentarán a lo largo del cursillo.

CONTENIDO

1. Conceptos básicos en teoría de categorías: categorías, funtores. 2. Conceptos básicos en topología general: topologías iniciales y finales, ejemplos de construcciones, la cinta de Möbius, el toro y la botella de Klein. 3. Categorías topológicas: la estructura de categoría topológica de Top. La categoría de las colecciones, las categorías de las relaciones, la categoría de los espacios topológicos punteados, la categoría de los espacios uniformes. 4. Construcción de categorías topológicas. Construcción de categorías topológicas a partir de topologías iniciales y finales. La categoría de los espacios completamente regulares, la categoría de los espacios secuenciales.

ASPECTOS TEÓRICOS

En la categoría de los espacios topológicos tiene sentido hablar de topologías iniciales y finales, ejemplos de estas construcciones son por ejemplo el toro, la cinta de Möbius y la botella de Klein, además en particular, la colección de topologías sobre un conjunto arbitrario tiene estructura de retículo completo. Estas consideraciones hacen ver que la categoría de los espacios topológicos está fibrada sobre la categoría de los conjuntos mediante un funtor de olvido

$O: Top \to Conj$ y que poniendo las cosas en un contexto categórico es el funtor el que permite las construcciones mencionadas. Un funtor $F: C \to D$ es topológico si permite las construcciones mencionadas arriba por el funtor O; en tal caso se dice que C es una categoría topológica fibrada sobre D, o simplemente cuando no haya lugar a confusión se dice que C es una categoría topológica, en particular, cuando D es la categoría de los conjuntos se dice que C es un constructo topológico. Nociones equivalentes de categoría topológica se pueden encontrar entre otros en Ardila, Montañez y Ruiz (2000). Entre los resultados alrededor de las categorías topológicas, cabe mencionar en primer lugar que dado un funtor topológico, C es completa (cocompleta), si y solamente si, D es completa (cocompleta) y que si C tiene clasificador de subobjetos entonces el funtor en cuestión es un isomorfismo. Son ejemplos de constructos topológicos, la categoría de los espacios uniformes y la categoría de los espacios de proximidad (ver Adamek, Herrlich y Strecker, 1990; Willard, 1970), pero por ejemplo la categoría de los grupos no es una categoría topológica pues la construcción de estructuras iniciales y finales no dan estructura de grupo. En este punto es importante anotar que un ejemplo que consideramos importante lo constituye la categoría de las colecciones (ver Donado, 1999), pues como se verá es el contexto apropiado para hablar de una manera más general de los conceptos clásicos de la topología, abierto, cerrado, conexo etc. En este punto es importante anotar que no todas las subcategorías de Top son categorías topológicas, por ejemplo la categoría de los espacios de Haussdorf.

Ahora bien, haciendo uso de topologías finales se genera una clase especial de funtores que resultan idempotentes y que hemos denominado funtores *elevadores de estructura*. Los puntos fijos de estos funtores forman categorías topológicas (ver Hernández, 2012; Ruiz y Montañez, 2006), pero otro trabajo en esta dirección es el de Oostra (1995). De manera natural se tienen las construcciones duales y ejemplos de estas construcciones son las categorías de los espacios completamente regulares y de los espacios secuenciales (ver Ruiz y Montañez, 2006). Cabe anotar que los hechos mencionados antes son de un carácter más general, pues en el fondo un elevador es un funtor que asigna a un espacio topológico otro con el mismo conjunto subyacente, así que hay otros elevadores que son objeto de trabajo y que serán estudiados en particular en la categoría de los espacios topológicos punteados (ver Hernández, 2012).

Finalmente, la categoría de los espacios topológicos no tiene exponenciación, es decir no hay una manera natural de asignar a dos espacios topológicos X y Y un espacio topológico X^Y con la propiedad universal requerida (ver por ejemplo Adamek, Herrlich y Strecker, 1990); tampoco tiene un objeto clasificador, en otras palabras un objeto que rescate los subespacios de un espacio dado, hecho que sí sucede en la categoría de los conjuntos. Pues bien, por carecer de estas construcciones Top no es un topos, categorías que realmente unifican las diferentes áreas de las matemáticas. Sin embargo, hay categorías topológicas que tienen exponenciación y con más precisión son cartesianas cerradas pero no tienen objeto clasificador, estas son denominadas cuasitopos; algunas referencias para el estudio de estas categorías son Dubuc (1979) y Wyler (1991).

REFERENCIAS

Adamek, J., Herrlich, H. y Strecker, G. (1990). *Abstract and concrete categories*. Nueva York, EUA: John Wiley and Sons Inc.

Ardila, V., Montañez, J. y Ruiz, C. (2000). Nociones equivalentes de categorías topológicas. *Boletín de Matemáticas*, *7*(1), 19-28.

Donado, A., Luque, C. y Páez, J. (1999). *Topología y colecciones. Notas de Matemática y Estadística*, 39, 31-48.

Dubuc, E. (1979). Concrete quasitopoi. *Lecture Notes in Mathematics*, 753, 239-254.

Dwyer, W.G. y Spalinski, J. (1995). Homotopy theories and model categories. En James, I.M. (Ed.), *Handbook of algebraic topology* (pp. 73-126). North Holland, Holanda: Elsevier Science.

Hernández, J. (2012). *Sobre las subcategorías reflexivas y correflexivas en la categoría de los espacios topológicos* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Johnstone, P.T. (2002). *Sketches of an Elephant. A topos theory compendium* (vols. 1-3). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Oostra, A. (1995). Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales. *Lecturas Matemáticas*, 16, 63-72.

Preuss, G. (1988). *Theory of topological structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Ruiz, C. y Montañez, R. (2006). Elevadores de estructura. *Boletín de Matemáticas*, *13*(2), 111-135.

Willard, S. (1970). *General topology*. Massachusetts, EUA: Adisson Wesley Publishing Company.

Wyler, O. (1991). *Lecture notes on topoi and quasitopoi*. Singapur: World Scientific Publishing.

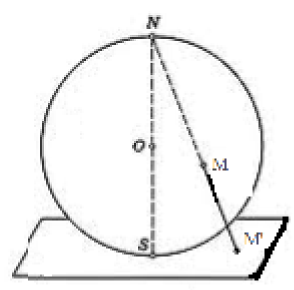
LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Gonzalo García
Universidad del Valle
gonzalo.garcia@correounivalle.edu.co

En este cursillo estudiaremos la proyección estereográfica. Dicha función es una proyección de la esfera, desde uno de sus puntos *N*, a un plano que toca a la esfera en un punto *S* diametralmente opuesto al punto *N*. Demostraremos que la proyección estereográfica preserva ángulos y envía circunferencias a rectas o a circunferencias. Analizaremos la relación entre la proyección estereográfica y la inversión respecto a una circunferencia. Finalmente definiremos el plano de Lobachevski y mostraremos cómo, mediante una proyección estereográfica especial, se puede obtener un modelo de este plano sobre un plano común conocido como el modelo de Poincaré para la geometría hiperbólica.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Consideremos la esfera unitaria S^2 y un punto N sobre ella. Sea *S* el punto en la esfera diametralmente opuesto a N y sea π el plano tangente a S^2 en el punto *S*. Sea M un punto de S^2 diferente de N y sea NM la recta determinada por los puntos M y N. Sea M' el punto de intersección de la recta NM con el plano π. Diremos que M' es la proyección estereográfica del punto M de S^2 al plano π. Esta correspondencia define una función biyectiva entre $S^2 / \{N\}$ y el plano π.



Tomemos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares $Oxyz$ en el espacio. Sea la esfera unitaria S^2 con ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. Consideremos la proyección estereográfica, con centro el polo norte $N(0,0,1)$, sobre el plano $Z=-1$. Sea $M(x,y,z)$ un punto en la esfera distinto de *N*. La imagen del punto *M* por la proyección estereográfica es el punto $M'(u,v,-1)$ donde

García, G. (2013). La proyección estereográfica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 63-66). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

$$u = \frac{2x}{1-z} \qquad\qquad v = \frac{2y}{1-z}$$

Claramente la proyección estereográfica es una función inyectiva sobre el plano $Z=-1$, con inversa la función

$$x = \frac{4u}{u^2+v^2+4} \qquad y = \frac{4v}{u^2+v^2+4} \qquad z = \frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}$$

Proposición. La proyección estereográfica envía circunferencias que no pasan por el punto de proyección en circunferencias y envía circunferencias que pasan por el punto de proyección en rectas (Rosenfeld y Sergeeva, 1977; Cannon, Floyd, Kenyon y Parry, 1997).

Demostración. Las circunferencias se obtienen al intersecar la esfera con un plano de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Entonces

$$A\frac{4u}{u^2+v^2+4} + B\frac{4v}{u^2+v^2+4} + C\frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4} + D = 0$$

y por lo tanto

$$(C+D)(u^2+v^2) + 4Au + 4Bv + 4(D-C) = 0$$

Si el plano dado pasa por el polo norte, entonces $C+D=0$, y la anterior es la ecuación de una recta en el plano $Z=-1$. Si el plano dado no pasa por el polo norte, entonces $C+D\neq 0$ y la ecuación anterior corresponde a una circunferencia en el plano $Z=-1$.

Proposición. La proyección estereográfica conserva ángulos; es decir, la proyección estereográfica envía los ángulos formados por curvas de la esfera en ángulos iguales formados por las curvas proyectadas en el plano π (Rosenfeld y Sergeeva, 1977; Cannon, Floyd, Kenyon y Parry, 1997).

Demostración. Sean

$$\alpha_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), i = 1, 2$$

dos curvas en la esfera unitaria que se intersecan en el punto

$$\alpha_i(0) = M(x, y, z).$$

Sea Φ el ángulo entre las curvas en el punto *M*. Es decir, Φ es el ángulo formado por las rectas tangentes a las curvas en dicho punto. Por lo tanto

$$\cos\Phi = \frac{x_1'(0)x_2'(0) + y_1'(0)y_2'(0) + z_1'(0)z_2'(0)}{\sqrt{(x_1'(0))^2 + (y_1'(0))^2 + (z_1'(0))^2}\sqrt{(x_2'(0))^2 + (y_2'(0))^2 + (z_2'(0))^2}}.$$

Por otro lado, el ángulo ϕ formado por las curvas proyección de las curvas α_i satisfacen

$$\cos\phi = \frac{u_1'(0)u_2'(0) + v_1'(0)v_2'(0)}{\sqrt{(u_1'(0))^2 + (v_1'(0))^2}\sqrt{(u_2'(0))^2 + (v_2'(0))^2}}.$$

Derivando las funciones α_i con respecto a *t* y usando las ecuaciones de la función inversa de la proyección estereográfica encontramos que

$$\cos\Phi = \cos\phi$$

y por lo tanto, el ángulo Φ, formado por las curvas en la esfera es igual al ángulo ϕ formado por las curvas proyección en el plano π.

PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA E INVERSIÓN RESPECTO A UNA ESFERA

Sea $S(R)$ una esfera con centro en un punto M_0 y radio R. Dado un punto M del espacio, diferente de M_0, sea M_1 otro punto tal que pertenece al rayo que contiene a M_0 y M y que tiene origen en M_0 y tal que $M_0M.M_0M_1 = R^2$. Se llama inversión respecto de la esfera *S* a la función que lleva el punto *M* en el punto M_1.

Si tomamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio y la esfera $S(2)$ con centro en el polo norte, tenemos que la inversión envía el punto $M(x, y, z)$ en el punto $M_1(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ donde

$$u = \frac{4x}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \qquad v = \frac{4y}{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \qquad w = \frac{x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 4}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

Igual que la proyección estereográfica, la inversión envía esferas que no pasan por el punto M_0 en esferas y a esferas que pasan por M_0 en planos del espacio. Observemos que si se restringe la inversión a la esfera con centro en el origen y radio uno se obtiene la proyección estereográfica definida antes. Una observación importante acerca de la inversión es que es su propia inversa.

LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA Y EL PLANO DE LOBACHEVSKI

Consideremos el espacio $R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ con la métrica de Minkowski: Dados los puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$, definimos la distancia entre M_1 y M_2 por

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}\,,$$

y el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ por

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - z_2^2}}.$$

Definimos el plano de Lobachevski por $L = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$. Así, el plano de Lobachevski es un hiperboloide de 2 hojas que se puede pensar como una esfera de radio imaginario i en el espacio de Minkowski. En este espacio, al igual que en el espacio euclidiano, podemos definir la proyección estereográfica de la esfera de radio i, con centro en el punto $N(0,0,1)$, sobre el plano $Z = -1$. Esta proyección tiene las mismas propiedades demostradas para la proyección sobre la esfera de radio 1. La imagen de la hoja inferior del hiperboloide mediante esta proyección es el interior de la circunferencia de centro en el origen y radio 2. Esto, junto con las propiedades de la proyección estereográfica nos permitirá estudiar algunas propiedades de otro modelo de la geometría hiperbólica, el modelo de Poincaré (Rosenfeld y Sergeeva, 1977).

REFERENCIAS

Cannon, J., Floyd, W., Kenyon, R. y Parry, W. (1997). Hyperbolic geometry. En S. Levy (Ed.), *Flavors of geometry* (pp. 59-116). Cambridge, EUA: Cambridge University Press.

Rosenfeld, B. y Sergeeva, N. (1977). *Proyección estereográfica*. Moscú, Rusia: Editorial Mir.

LAS CÓNICAS Y OTRAS CURVAS MARAVILLOSAS

Alicia Guzmán y Carlos Álvarez
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Ana.guzman@escuelaing.edu.co, carlos.alvarez@escuelaing.edu.co

En el cursillo construiremos algunos lugares geométricos por medio de envolventes de familias de curvas. Iniciamos con algunas construcciones básicas que se pueden desarrollar con instrumentos de trazo, continuamos con construcciones de lugares geométricos, instancia en la que resulta más útil apoyarse en la geometría dinámica (e.g., GeoGebra). Finalizaremos con un proceso en doble vía para asociar lugares geométricos con sus ecuaciones.

INTRODUCCIÓN

El tratamiento de lugares geométricos y el estudio de las cónicas en particular se abordan desde argumentos algebraicos, que tienen como objetivo la deducción de la ecuación en términos de vértices, focos, lados rectos, entre otros. En el cursillo ofrecemos un tratamiento complementario que permite por un lado obtener sus gráficas por métodos constructivos y deducir sus ecuaciones acordes a dicho método, constituyéndose en alternativa para profesores interesados en promover el desarrollo de habilidades matemáticas por medio de proyectos, en los que se vinculen conceptos básicos de la geometría euclidiana y de la geometría analítica. En este documento presentamos sólo un ejemplo desarrollado. Los demás serán objeto de estudio en el cursillo.

GENERALIDADES

Desarrollaremos construcciones de algunos lugares geométricos, por medio de envolventes de familias de curvas. Nos familiarizaremos con términos como curva, familia de curvas, lugar geométrico, envolvente de una familia de curvas. Aunque estos conceptos pueden tratarse de manera intuitiva, a continuación se dan las definiciones que aparecen en publicaciones reconocidas.

*Curva***:** La gráfica de una función continua definida de un intervalo cerrado [a, b] en el plano, es llamada una curva. Si además la función es diferenciable, entonces la curva es suave (Apostol, 1967/988).

Guzmán, A. y Álvarez, C. (2013). Las cónicas y otras curvas maravillosas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 67-70). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Lugar geométrico: Curva trazada por un punto que se mueve según una ley definida. El término fue acuñado probablemente por Tales (Newman, 1956/1985), o también, "el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una propiedad geométrica que puede estar dada por una ecuación $f(x, y) = 0$, se conoce como lugar geométrico o gráfica de la ecuación" (Lehmann, 1959/2002).

Familia de curvas: Si se tiene una familia de funciones continuas que dependen de uno o más parámetros, entonces las gráficas que se obtienen al variar el (los) parámetro(s) es una familia de curvas (Apostol, 1967/1988).

Envolvente: Dada una familia de curvas se denomina envolvente de esta familia a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia (Boltianski, 1977).

Las construcciones geométricas aquí presentadas requieren:

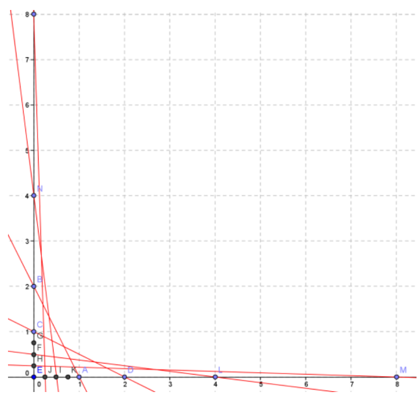
- Del uso de instrumentos de dibujo geométrico y la elaboración de varios casos particulares que cumplan las condiciones dadas.
- Incorporar las representaciones **dinámicas**, que a partir de mover y transformar, un ejemplo particular, "permite estudiar las variaciones, dar indicios de las invariantes, y posiblemente facilita las bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas" (Arcavi y Hadas, 2000).
- Aprovechar información de la tabulación para el estudio de otras características que finalmente contribuyan a la deducción de la ecuación del lugar geométrico, para nuestro caso en dos variables.

Iniciaremos con el siguiente ejemplo:

> Consideraremos una familia de triángulos rectángulos con área constante, digamos una unidad cuadrada ($1ud^2$).

Para ello se sugiere construir un triángulo con un vértice en el origen del sistema cartesiano (primer cuadrante) y los catetos sobre los ejes cartesianos, identificar desde la construcción varios casos o una familia de triángulos que también cumplan la propiedad, observar el comportamiento de la recta AB, que genera la envolvente que deseamos estudiar, deducir la ecuación de la familia de rectas (variables y parámetros).

Obsérvese que se empieza a formar una curva, o mejor una poligonal. En este caso parece que la cantidad de rectas no es suficiente, pero se podrían trazar otras. En la Figura 1 se ilustra la situación.



Coordenadas de A	Coordenadas de B	Área OAB	Pendiente de AB
(1,0)	(0,2)	1	-2
(4,0)	(0,1/2)	1	-1/8
		1	
$(a,0)$	$(0,2/a)$	1	$-2/a$

Figura 1

Ahora realizaremos una construcción que permite ver todos los casos de una manera dinámica y está basada en la semejanza de los triángulos OQP y ORS. Para este caso fijaremos los puntos $P(1,0)$ y $Q(0,2)$, tomaremos un punto que pueda moverse $R(a,0)$, a (parámetro) en los reales. La posición de S la obtendremos al trazar la recta RS paralela a PQ y su coordenada en función de a será $s\left(0,\frac{2}{a^2}\right)$. Al cambiar la posición de R y observar la familia de rectas RS, vemos la envolvente de la recta que es una curva (ver Figuras 2 y 3).

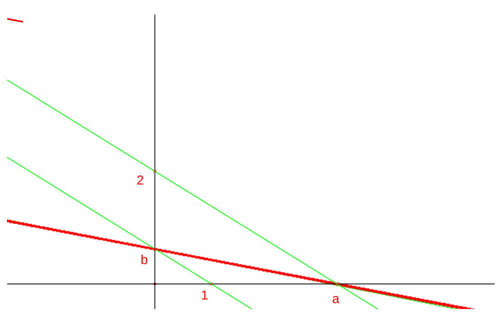


Figura 2

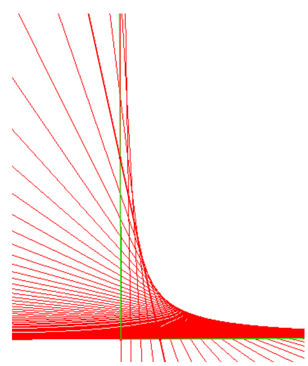


Figura 3

La envolvente parece ser una hipérbola, astroide o algo similar. Así se hace necesario hallar una ecuación algebraica para la familia de rectas, calcular su derivada respecto de la variable o parámetro y tratar de eliminar el parámetro. En estudio más detallado sobre envolventes (Boltianski, 1997) se justifica por qué para hallar la ecuación de la envolvente de una familia de curvas $f(x,y,\alpha)=0$ debe eliminarse el parámetro α entre esta ecuación y

$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,y,\alpha)=0$. Si la familia depende de dos parámetros $f(x,y,\alpha,\beta)=0$ y los parámetros se relacionan según $g(\alpha,\beta)=0$ entonces deben eliminarse los dos parámetros entre estas dos ecuaciones y la siguiente $\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial g}{\partial\beta}-\frac{\partial g}{\partial\alpha}\frac{\partial f}{\partial\beta}=0$.

De acuerdo a lo descrito en la Figura 2, la pendiente de la recta *RS* es $m=-\frac{2}{a}$, la ecuación algebraica de la familia está dada por $f(x,y,a)=a^2y+2x-2a$ y por consiguiente $\frac{\partial}{\partial a}f(x,y,a)=2ay-2$. Si igualamos estas ecuaciones a cero y eliminamos el parámetro a, obtenemos $xy=2$, es decir que efectivamente la curva es una rama de una hipérbola equilátera (Apóstol, 1967/1988).

Resumiendo, tenemos una situación que requirió para su solución la articulación de la geometría euclidiana y la geometría analítica, que nos permitió caracterizar el lugar geométrico descrito por la familia de rectas. Recordemos que algunas de las preguntas orientadoras fueron: ¿Qué ocurre si la cantidad de puntos se aumenta?, ¿Cómo realizar una construcción dinámica de la situación descrita, que nos permita involucrar infinitos puntos? La envolvente que se genera ¿a qué lugar geométrico corresponde? ¿Cuál será la ecuación del lugar geométrico?

REFERENCIAS

Apostol, T.M. (1988). *Calculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (vols. 1 y 2; 2da ed.) (Francisco Vélez Cantarell, Tr.). Bogotá, Colombia: Editorial Reverté S.A. (Primera edición en inglés, 1967).

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Matemathical Learning*, 5, 25-45.

Boltianski, V.G. (1977). *La envolvente. Lecciones populares de matemáticas* (V. Llanos, Tr.). Moscú, Rusia: Editorial Mir.

Lehmann, C. (2002). *Geometría analítica* (34ta. ed.) (Rafael García Díaz, Tr.). México: Limusa S.A. (Primera edición en inglés, 1959).

Newman, J.R. (1985). *Sigma. El mundo de las matemáticas* (tomo 1; 10ª ed.) (B. Carreras, J. Carreras, M. Muntaner, M. Abelló, R. Obiols, R. Carbó, X. Rubert, J. Sempere y M. Sacristán, Trs.). Barcelona, España: Editorial Grijalbo (primera edición en inglés, 1956).

CONJECTURING AND PROVING IN ALNUSET

Bettina Pedemonte
DiDiMa srl – ITD (CNR)
bettina.pedemonte@gmail.com

This report proposes an approach to algebraic proof, based on the use of the AlNuSet system, a dynamic, interactive system to enhance the teaching and learning of algebra. The research hypothesis is that educational activities performed in AlNuSet favours the "transparency" of algebraic proof.

In the secondary school curricula of many countries, the approach to proof is still taught in the context of traditional geometry (Hanna & Jahnke, 1993). Nevertheless, rigorous proof is generally considered as a sequence of formulae within a given system, each formula being either an axiom or derivable from an earlier formula by a rule of the system. This kind of proof clearly reveals the influence of algebra (Hanna & Jahnke, 1993). In school practice, however, algebra is usually not considered as a way of seeing and expressing relationships but as a body of rules and procedures for manipulating symbols. Thus, algebra is taught and learned as a language and emphasis is given to its syntactical aspects.

This report proposes an approach to algebraic proof. It is based on the use of the AlNuSet[1], a system which can be used to propose specific tasks requiring the construction of a conjecture and the production of an algebraic proof (Pedemonte, 2011). AlNuSet is a dynamic, interactive system for enhancing the teaching and learning of algebra for lower and upper secondary schools (Pedemonte, & Chiappini, 2008). It is constituted by three integrated environments: the *Algebraic Line*, the *Algebraic Manipulator*, and the *Functions.* In this report we consider two of them: the Algebraic Line (AL) and the Algebraic Manipulator (AM). The AL is an explorative environment to construct conjectures through a motor perceptive approach; the AM is a symbolic calculation environment to produce algebraic proof. The aim of this report is to show

[1] www.alnuset.com

Pedemonte, B. (2013). Conjecturing and proving in AlNuSet. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 71-74). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

how this system can be used to support the teaching and learning of algebraic proof, making proof “transparent” (Hemmi, 2008). The concept of transparency combines two characteristics: visibility and invisibility. Visibility concerns the ways that focus on the significance of proof (construction of the proof, logical structure of proof, its function, etc.). Invisibility concerns the proof as a justification of the solution of a problem without thinking it as a proof. It has been underlined that “*Proof as an artifact needs to be both seen (to be visible) and used and seen through (to be invisible) in order to provide access to mathematical learning*” (Hemmi, p. 425).

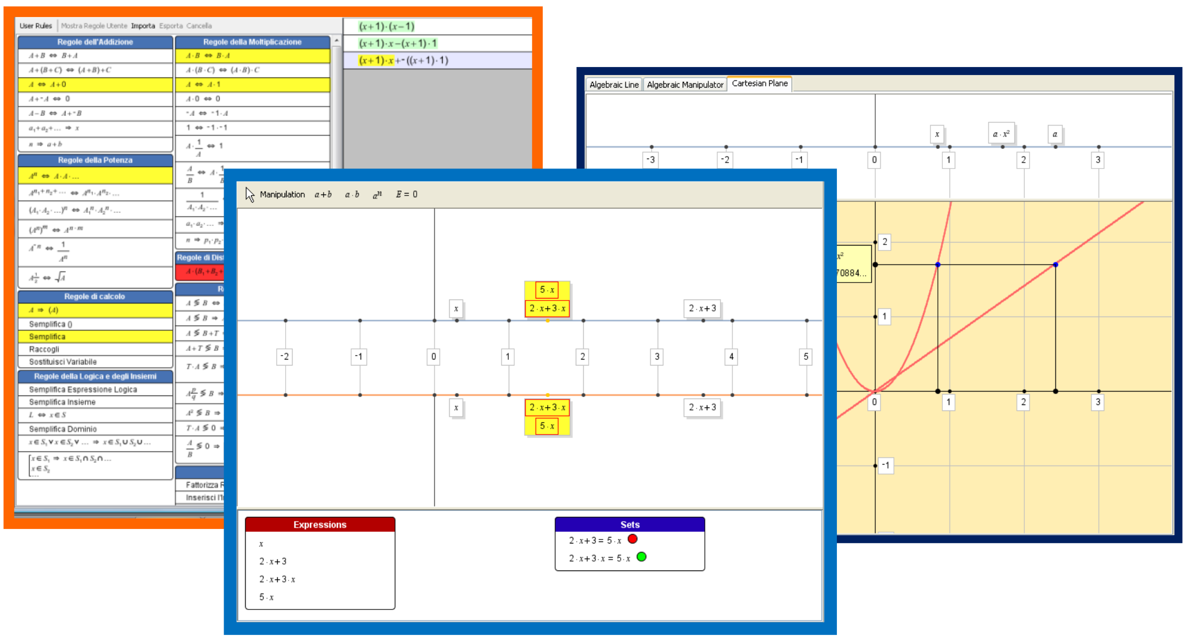


Figure 1: The three environments of AlNuSet: the Algebraic Line, the Algebraic Manipulator, the Function environment

THE ALGEBRAIC LINE OF ALNUSET

The Algebraic Line (AL) of AlNuSet is constituted by two lines[2] where it is possible to insert letters and mathematical expressions involving numbers and letters. These expressions can be inserted (or constructed) and represented as points on the line depending on the mobile point of the variable contained in such expressions. Once an expression has been inserted, dragging the x mobile

[2] The two lines are used to construct expressions through a geometrical model. It is not possible here to explain in which way they work. In this report we use these lines as a unique line.

point, the expression(s) that depend on it move accordingly. This dynamic characteristic is very important to allow students experience important algebraic concepts –the dependence of the expression from a variable, the meaning of denotation for an expression, the equivalence among expressions, etc.

THE ALGEBRAIC MANIPULATOR OF ALNUSET

The Algbraic Manipulator of AlNuSet is a structured symbolic calculation environment for the manipulation of algebraic expressions and for the solution of equations and inequalities. Its operative features are based on pattern matching techniques. In the Algebraic Manipulator pattern matching is based on a structured set of basic rules that correspond to the basic properties of operations, to the equality and inequality properties between algebraic expressions, to basic operations among propositions and sets. These rules are explicit for students. They appear as commands on the interface and made active only if they can be applied to the part of expression previously selected. An expression is transformed into another through this set of commands that corresponds to axioms and rules. Students can see the transformation of an expression as the result of the application of a rule on it.

EXEMPLE OF USE OF ALNUSET

Consider the following task:

> Let x be an integer number. Write an expression for the triple of x. Represent this expression on the AL. Write an expression for the consecutive of the triple of x. Represent it on the AL and verify your answer. Consider the expression $x + 2x + 1$. Compare it with the previous one. Check your answer using the AL and AM of AlNuSet.

This task requires to construct the expression $3x$ in the AL and verify that this expression represents the triple of x. Moving x on the line the expression $3x$ moves accordingly. Through a perceptive approach students can see that the point associated to the expression $3x$ assumes values that are multiples of 3. In this way, what the expression $3x$ denotes is made more explicit. Furthermore, only moving the variable x it is possible to move $3x$ allowing students to experience the expression's dependence from the variable x.

The second part of the task requires to construct the consecutive of the triple of x and to compare it with the expression $x + 2x + 1$. The aim of this second question is to point out the equivalence between the two expressions from a perceptive point of view and not from a formal one. In the AL the equivalence among expressions is represented by a post-it (see Figure 2). The two expressions $3x + 1$ and $x + 2x + 1$ belong to a same post-it for each value the variable x assumes on the line.

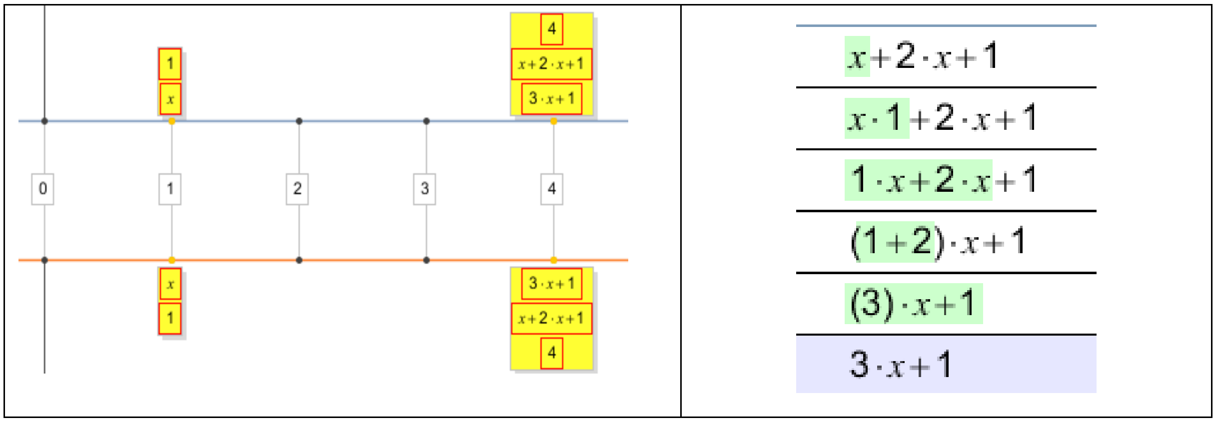


Figure 2: The equivalence between two expressions in the AL and in the AM

Students can "experience" the equivalence of the two expressions and then they can prove the equivalence in the AM. In the AL, students make visible the equivalence between the two expressions. The focus here is not to prove the equivalence but to experience it. In the AM proof is made explicit – students are obliged to explicit the rules necessary to transform the first expression into the other. This is not obvious because this transformation in a paper and pen environment is usually not treated as a proof; here proof is in general invisible to students.

References

Hanna, G., & Jahnke, N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 421-438.

Hemmi, K. (2008). Students' encounter with proof: The condition of transparency. *The International Journal on Mathematics Education*, *40*, 413-426.

Pedemonte, B. (2011). Conjecturing and proving in AlNuSet. In M. Pytlak, T. Rowland and E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 181-191). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Pedemonte, B., & Chiappini, G. (2008). AlNuSet: A system for teaching and learning algebra. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning*, *18*(5/6), 627-639.

Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la homotecia utilizando CabriLM como medio

Luis Pérez
Universidad Industrial de Santander
Luchoangel07@hotmail.com

Se presenta una serie de situaciones a-didácticas, en las que los alumnos interactúan con el software CabriLM como medio, y gracias a dichas interacciones construyen conocimientos relacionados con el concepto de homotecia. El funcionamiento geométrico de los objetos de CabriLM garantiza que los fenómenos visuales corresponden a propiedades teóricas, y las posibilidades que ofrece para controlar las interacciones permiten introducir restricciones para bloquear estrategias no matemáticas para resolver los problemas.

Motivación

El concepto de homotecia es un concepto complejo, que ha recibido poca atención en los libros de texto, y que tiende a desaparecer del currículo de geometría. Sin embargo, es una herramienta importante para la solución de problemas, y condensa las propiedades de semejanza y proporcionalidad. Es una transformación no isométrica, la única que se enseña (en teoría) a nivel de secundaria. Por eso consideramos importante desarrollar situaciones a-didácticas que contribuyan al aprendizaje de este importante concepto geométrico.

Marco teórico

Teoría de las Situaciones Didácticas

Una de las preocupaciones fundamentales de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) es la construcción del sentido del saber matemático. Según esta teoría, el intento de transmitir de manera directa el saber produce su pérdida de sentido para los alumnos; aprenderán un discurso, o unos gestos que intentan imitar, pero sobre los cuales no tienen ningún control. Para construir el sentido del saber matemático, según la TSD, es necesario anclarlo en las experiencias personales de los alumnos, es decir en su “conocimiento”. Para la

Pérez, L. (2013). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la homotecia utilizando CabriLM como medio. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 75-77). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

TSD, conocimiento y saber no son términos equivalentes: el conocimiento es personal y contextualizado (fruto de una experiencia), mientras que el saber es impersonal y descontextualizado. Las situaciones a-didácticas buscan propiciar una experiencia en los alumnos, por medio de la interacción con un medio didáctico para resolver un problema, con el fin de que los alumnos construyan conocimientos (personales y contextualizados) que puedan ser utilizados como claves de interpretación del saber (impersonal y descontextualizado). El profesor entonces no intenta transmitir de manera directa el saber (problema de comunicación de un mensaje), sino de manera indirecta, propiciando primero la construcción de conocimientos en los alumnos, para después, durante el llamado proceso de institucionalización, explicitar las relaciones entre el saber institucional y los conocimientos construidos en el contexto de la situación a-didáctica.

Cabri como medio a-didáctico

Cabri, en calidad de software de geometría dinámica, constituye un medio adecuado para que los estudiantes interactúen con él para construir conocimientos geométricos. Los objetos de Cabri responden a dos propósitos complementarios: su representación visual los hace accesibles para los usuarios, quienes pueden manipularlos (cambiar de posición, de tamaño, etc.), y su programación garantiza que las propiedades geométricas que se declaran explícitamente en la construcción y aquellas que se deducen de las mismas, se mantienen verdaderas durante la manipulación. Las retroacciones de Cabri son entonces visibles en la pantalla y además acordes con la teoría de la geometría euclidiana. Esta característica garantiza que los conocimientos (personales y contextualizados) que los alumnos construyen durante la interacción con el software, corresponderán al saber de la geometría.

METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller consta de 4 actividades, a lo largo de las cuales se presentan situaciones a-didácticas cuyo propósito es que los alumnos identifiquen y utilicen propiedades de la homotecia para la resolución de problemas. Todas las actividades están diseñadas con la versión CabriLM, que además de incluir el dinamismo de las figuras, da la posibilidad de restringir algunas interacciones (para bloquear ciertas estrategias), y de enriquecer las posibilidades de retroacción. Se realizarán las actividades con los participantes, en una sala de computadores, y luego se analizarán utilizando la Teoría de las Situaciones Didácticas.

REFERENCIAS

Bautista, L. y Peralta, M. (2011). *Conceptualización de la homotecia en estudiantes de sexto grado* (Trabajo de grado de especialización). Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas* (Martín Acosta y Jorge Fiallo, Trs.). Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander (primera edición en francés, 1993).

La revolución no euclidiana

Clara H. Sánchez
Universidad Nacional de Colombia
chsanchezb@unal.edu.co

Varios autores coinciden en que la aparición de las geometrías no euclidianas, con los trabajos del húngaro Bolyai y el ruso Lobatchevsky, en los comienzos del siglo XIX, representa una revolución en matemáticas. Uno de esos trabajos es el trabajo de Trudeau (1987) del cual he tomado el nombre para este cursillo. El cursillo pretende hacer un recorrido por la historia del quinto postulado de los *Elementos* de Euclides y los intentos más representativos por demostrarlo a partir de los demás axiomas, y la demostración de su independencia con respecto a ellos en el siglo XIX. Se reflexionará sobre por qué se consideran las geometrías no euclidianas una revolución en matemáticas, en ciencia y en filosofía.

El quinto postulado de Euclides

Para comenzar es conveniente recordar el enunciado de los cinco postulados que abren el primer libro de los *Elementos* de Euclides (1991, trad.)[1], luego de 23 definiciones:

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una línea recta finita en línea recta.
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre otras dos hace los ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

---

[1] He tomado la versión al español de la prestigiosa editorial Gredos por ser la más confiable hasta el momento, ya que ha sido traducida directamente del griego por María Luisa Puertas y tiene una excelente introducción de Luis Vega Reñón, reconocido historiador y filósofo español.

Sánchez, C.H. (2013). La revolución no euclidiana. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 79-82). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

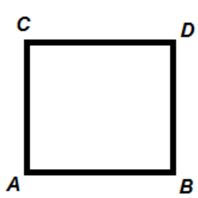
Desde la antigüedad el quinto postulado fue cuestionado por los geómetras; lo sabemos por Proclo (siglo V), quien en sus *Comentarios al primer libro de los Elementos de Euclides* afirma:

> Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Tolomeo [siglo II] se propuso resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas. Más aún: la proposición conversa es efectivamente demostrada por el propio Euclides como un teorema. (Proclo, citado[2] por la traductora de Euclides, 1991, p. 198)

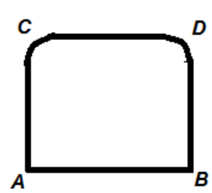
La historia de las geometrías no euclidianas es en alto grado la historia de los intentos por demostrar el quinto postulado de los *Elementos*. La lista de quienes lo intentaron a partir de los otros cuatro postulados es bastante larga; aquí nos concentraremos esencialmente en dos intentos: el de G. Saccheri (1667-1733) y el de J. Playfair (1748-1819), que muestran dos aspectos interesantes de la historia. Saccheri intentó hacer una demostración por reducción al absurdo y no percibió la importancia de su trabajo. El postulado de Playfair: "Por un punto exterior a una recta pasa a lo más una paralela", comenzó a usarse en los libros de texto, y es el que generalmente se asocia y conoce como el quinto postulado o el postulado de las paralelas de Euclides. Este postulado es equivalente al quinto postulado de Euclides pero es más sencillo en su enunciado y tiene la misma característica de evidencia que caracterizaba a los otros cuatro.

Los cuadriláteros de Saccheri

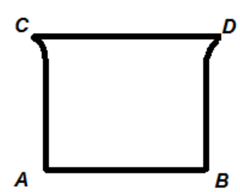
Cuando uno intenta construir con regla y compás un cuadrado $ABCD$ dado su lado, el camino que se sigue de manera casi generalizada es el siguiente: dado un segmento AB, se traza un perpendicular a AB por A y otra perpendicular a AB por B, luego se "cortan" sobre esas perpendiculares los segmentos AC y BD.



Hipótesis del ángulo recto



Hipótesis del ángulo obtuso



Hipótesis del ángulo agudo

La figura resultante sin duda es un cuadrilátero con tres lados iguales y dos ángulos rectos, pero no hay garantía de que el cuarto lado sea igual a los otros

[2] Cita hecha en el comentario al quinto postulado.

tres y que los ángulos en C y en D sean rectos. Saccheri analizó los tres casos posibles, a los que llamó: hipótesis del ángulo recto, hipótesis del ángulo obtuso e hipótesis del ángulo agudo como se observa en la Figura anterior. Su idea era probar que estos dos últimos casos eran imposibles y de esta manera sólo quedaba el caso del ángulo recto. Saccheri encontró una contradicción en el caso del ángulo obtuso, pero no pudo encontrar una en el caso del ángulo agudo, y la descartó por encontrar resultados que contrariaban la intuición.

El postulado de Playfair

En 1795, Playfair enuncia como postulado alternativo para el quinto postulado la afirmación "Por un punto exterior a una recta pasa a lo más una paralela". Aunque este enunciado se conocía desde Proclo, es a partir del trabajo de Playfair cuando empieza a usarse regularmente. En *Elementos* se prueba (proposición 27) que por un punto exterior a una recta se puede trazar (por lo menos) una paralela sin necesidad del quinto postulado, pero no se puede probar que hay exactamente una, sin el quinto postulado. De esta manera resultan equivalentes.

Los trabajos de Bolyai, Lobatchevsky y Gauss

Los trabajos de Janos Bolayi (1802, 1860), de Nicolai Lobatchevsky (1792, 1856) y de Karl Friedrich Gauss (1777, 1855) se basan en construir una teoría en la cual se cambia el quinto postulado por uno que afirma que *por un punto exterior a una recta pasan por lo menos dos paralelas*. Con ello se puede demostrar que en realidad pasan infinitas. De los axiomas de la teoría se deduce que la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que 180°. Como la teoría parece contradecir la experiencia, a pesar de ser lógicamente consistente, estos trabajos fueron considerados meras especulaciones intelectuales sin ningún tipo de utilidad, apenas un "juego lógico". En la segunda mitad del siglo XIX, Henri Poincaré (1854, 1912) y Eugenio Beltrami (1835, 1900) dieron modelos para la teoría y desde entonces la comunidad matemática y científica comenzó a percibir la trascendencia de estos resultados.

El trabajo de Riemann

Por su lado Bernhard Riemann (1826, 1866) escogió el camino de que por un punto exterior a una recta no pasan paralelas. Se inspiró en la superficie terrestre, y consideró que la infinitud de la recta podía cambiarse por la noción de ilimitada, sin principio ni fin, como lo es una circunferencia, con lo cual cambió también el segundo postulado. Así que una recta en su sistema es un círculo máximo de la esfera y de esta manera todos los círculos máximos se cortan en los "polos" o en el Ecuador terrestre y no hay rectas paralelas. En este sistema la suma de los ángulos de un triángulo es mayor de 180°.

La revolución no euclidiana

¿Por qué considerar las geometrías no euclidianas una revolución en matemáticas? (Véase Kline, 1967/1992; Zheng, 1992/1995; Campos, 2008) Porque, sin duda, cambió el paradigma de lo que hasta entonces se consideraba matemática: una ciencia que tenía nexos indiscutibles con la realidad, el espacio físico coincidía con el espacio euclidiano. Al haber tres geometrías, tres teorías lógicamente consistentes, es necesario preguntarse por la noción de espacio y cuál de ellas coincide con la "realidad" (ver Gray, 1979/1992). La matemática perdió su carácter de obtener verdades absolutas y la noción de espacio absoluto de Newton quedó cuestionada. Así que la pregunta de qué entendemos por verdad y el papel de la matemática en la ciencia serán temas de reflexión de los filósofos y los científicos. Desde entonces ni la matemática ni la ciencia son las mismas de antes, y eso es lo que se llama una revolución, un cambio de pensamiento que trasciende todas las esferas del conocimiento.

Referencias

Campos, A. (2008). *Introducción a la historia y la filosofía de la matemática* (vol. 2). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Euclides (1991, trad.). *Elementos* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Gray, J. (1992). *Ideas de espacio* (Fernando Romero, Tr.). Madrid, España: Biblioteca Mondadori (primera edición en inglés, 1979).

Kline, M. (1992). Las geometrías no euclidianas y su significación. En *Matemáticas para los estudiantes de humanidades* (pp. 451-475). México: Fondo de Cultura Económica (primera edición en inglés, 1967).

Trudeau, R.J. (1987). *The non-Euclidean revolution*. Cambridge, EUA: Birkhauser Boston Inc.

Zheng, Y.X. (1995). Non-Euclidean geometry and revolutions in mathematics. En D. Gillies (Ed.), *Revolutions in mathematics* (pp. 169-182). Nueva York, EUA: Oxford University Press (primera edición en inglés, 1992).

Conferencias

ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA MEDIADA POR ARTEFACTOS: TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

Leonor Camargo, Carlos Pérez[1], Tania Plazas, Patricia Perry, Carmen Samper y Óscar Molina

Universidad Pedagógica Nacional

lcamargo@pedagogica.edu.co, mathperez@gmail.com, tplazas@pedagogica.edu.co, pperryc@yahoo.com.mx, csamper@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

Esbozamos la Teoría de la Mediación Semiótica con la cual es posible estudiar y comprender el papel de un profesor que decide aprovechar las características que tienen diferentes herramientas, por ejemplo los programas de geometría dinámica, usadas como mediadoras para favorecer procesos de aprendizaje, desde un punto de vista sociocultural.

INTRODUCCIÓN

El interés por el estudio de la función de distintas herramientas o artefactos usados para mediar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el aula de matemáticas no es un asunto nuevo. En la literatura especializada se hallan diversos marcos de referencia y constructos analíticos para ahondar en dicha función (e.g., Lévy, 1990; Balacheff y Kaput, 1996; Meira, 1998; Guin y Trouche, 1999; Jones, 2000; Kieran y Yerushalmy, 2004; Borba y Villarreal, 2005). En particular, desde un punto de vista sociocultural, la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS), formulada por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008), es una opción para estudiar y comprender el papel de un profesor que decide aprovechar las características de diferentes herramientas, como por ejemplo los programas de geometría dinámica, para favorecer procesos de aprendizaje.

Bajo la influencia de la corriente sociocultural del desarrollo cognitivo iniciada por Vygotsky, en la TMS se plantea que las herramientas usadas para resolver problemas o enfrentarse a una tarea de índole matemática no son sólo

[1] Becario de Doctorado en el Instituto de Investigación en Enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática y profesor de la Universidad Nacional de Río Negro, Argentina. Doctorando en Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Invitado por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ a hacer una pasantía entre enero y marzo de 2013.

Camargo, L., Pérez, C., Plazas, T., Perry, P., Samper, C. y Molina, Ó. (2013). Enseñanza de la geometría mediada por artefactos: teoría de la mediación semiótica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 85-96). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

apoyos para posibilitar o facilitar su realización. Ellas son fuente de significados relativos a los objetos matemáticos involucrados en la actividad. Es decir, no son neutras para la cognición del usuario, por cuanto portan convenciones y saberes que hacen parte del bagaje históricocultural de la sociedad e influyen el conocimiento que se logra con ellas. Bajo esa óptica, es responsabilidad del profesor, como representante de la comunidad académica de referencia, servir de mediador entre los significados que los estudiantes logren en el trabajo realizado con las herramientas y los significados matemáticos propios del saber institucional. Así, es parte fundamental del aprendizaje de las matemáticas el proceso en el que los significados personales de los estudiantes evolucionan hacia significados matemáticos, bajo la mediación del profesor. La misión del profesor requiere que él conozca de antemano el potencial de las herramientas que pondrá a disposición de los estudiantes, para hacer emerger significados en la actividad del estudiante. La TMS proporciona fundamentos conceptuales para una teoría de la enseñanza bajo esta óptica.

El interés de esta conferencia es esbozar la TMS e impulsar su divulgación en la comunidad de educadores matemáticos. Para ello, comenzamos por aludir al papel de los signos en el aprendizaje matemático y explicamos qué se entiende por potencial semiótico de un artefacto usado como mediador en el aprendizaje, pues la teoría se apoya en estos elementos conceptuales. Luego presentamos una síntesis de los principales aspectos de la TMS (Bartolini-Bussi y Mariotti, 2008) y asociamos tal teoría con la aproximación metodológica propuesta por Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (en evaluación).

ACERCA DE LOS SIGNOS Y EL APRENDIZAJE

La TMS basa sus planteamientos sobre los signos en la perspectiva vygotskiana, según la cual éstos son objetos cognitivos (herramientas psicológicas) que, de la misma forma como las herramientas materiales, desempeñan una función mediadora entre el individuo y su contexto, al ser portadores del pensamiento de las personas y al mismo tiempo del saber cultural. De esta manera, el aprendizaje ocurre en una actividad social mediada por herramientas, en la cual emergen signos que posibilitan la comunicación con los demás y con uno mismo. Los signos explicitan los significados individuales (*significados personales*) relativos a los objetos matemáticos involucrados. Estos significados personales pueden evolucionar hacia significados socialmente compartidos por una comunidad de referencia (*significados matemáticos*), gracias a la mediación de un experto representante de ésta, que reconoce en los signos asociados a los significados personales algo del saber institucional o cultural que portan y realiza una gestión comunicativa tendiente a tal evolución.

Los signos son objetos cognitivos de variada índole como gestos (e.g., movimiento del dedo índice de la posición vertical hasta la horizontal representando la rotación de un rayo sobre su origen para generar un ángulo recto), íconos (e.g., la notación geométrica usada para nombrar el rayo AB), índices (e.g., la traza dejada por un punto que se mueve en la pantalla), palabras o textos (e.g., un enunciado, un argumento), objetos físicos (e.g., un compás) que encapsulan la experiencia personal y hacen explícitos los significados personales. Los tipos de signos de los ejemplos con los que ilustramos las ideas en esta conferencia son: (i) figura construida en un programa de geometría dinámica, como Cabri (acompañada del informe escrito que recuenta la construcción realizada) (de aquí en adelante signo-figura), y (ii) enunciado de contenido matemático (de aquí en adelante signo-enunciado).

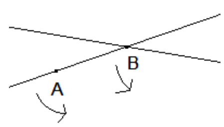
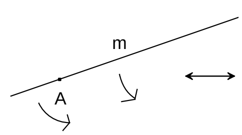
Estudiante	**Recuento de acciones hechas con Cabri**	**Signo-enunciado**	**Significados personales relativos a…**	**Significados matemáticos en torno a…**
Paula	 Construí dos puntos y luego la recta sobre los puntos. Exploré, arrastrando los puntos A y B y construyendo otra recta que pasa por el punto B.	Concluí que: si A y B son dos puntos entonces pertenecen a una única recta.	La relación entre puntos y recta.	Postulado de la recta.
Pablo	 Construí una recta a partir de un punto A. Exploré moviendo la pantalla tratando de buscar que la recta tuviera un fin, cambiando la posición de la recta m y del punto A.	Concluí que: Dada una recta m y $A \in m$, si A se mueve entonces m se mueve.	Características de recta.	Postulado: una recta es un conjunto no vacío de puntos. Teorema: dado un punto hay infinitas rectas que lo contienen.

Tabla 1: Signos producidos por estudiantes en el curso de una actividad mediada por Cabri

En la Tabla 1 presentamos dos signos-enunciado formulados por estudiantes universitarios de un curso de geometría euclidiana plana a quienes se les propuso la siguiente tarea: "Construir una recta, usando el programa Cabri y reportar lo que se descubre acerca de los objetos geométricos involucrados". Con esta actividad se esperaba que la discusión sobre los resultados de la tarea diera lugar a hechos geométricos con los cuales comenzar la formación de un sistema teórico. En la segunda columna de la tabla se encuentra el informe de Paula y Pablo sobre las acciones hechas en Cabri. En la tercera columna está el signo-enunciado asociado a tal actividad. En la cuarta, expresamos en forma sucinta nuestra interpretación de los significados personales que entrevemos en los signos. Desde nuestro punto de vista, estos tienen que ver con, entre otras cosas, la interpretación que los estudiantes dan a los objetos o relaciones de índole matemática, su conocimiento declarativo acerca de tales objetos o relaciones, del estatus y del uso que tienen éstos en el marco de una teoría. En la quinta columna escribimos los significados matemáticos que quisiéramos que los estudiantes interiorizaran.

Como lo señala Mariotti (2009), en una tarea específica propuesta por el profesor, los signos producidos tienen un fuerte vínculo con las acciones realizadas usando las herramientas y se pueden aprovechar en la enseñanza si se procura su explicitación y socialización. En nuestro trabajo investigativo buscamos tal explicitación solicitando la formulación de conjeturas (signo-enunciado), cuando nos enfocamos en el aprendizaje de lo que es un teorema en el sentido de Mariotti, Bartolini-Bussi, Boero, Ferri y Garuti, (1997). Esto hace que acompañemos los problemas propuestos con la instrucción de formular una conjetura. Por ejemplo, planteamos tareas como: "Estudie, con el apoyo de Cabri, la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes. Describa el proceso de construcción y exploración y formule una conjetura". La resolución de la tarea da lugar a varios signos, por ejemplo, las figuras hechas en el programa de geometría dinámica, el texto que recuenta la construcción y la exploración realizada, y signos-enunciado como: *Las alturas de un triángulo equilátero son congruentes*, y *Si dos alturas de un triángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles*. Alrededor de estos signos se promueven conversaciones instruccionales (Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry, 2012) en las que se orienta la evolución de los significados personales acerca de propiedades particulares de los triángulos isósceles hacia los significados matemáticos.

ACERCA DEL POTENCIAL SEMIÓTICO DE LOS ARTEFACTOS EN EL APRENDIZAJE

Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) emplean la expresión "potencial semiótico de un artefacto" usado en la enseñanza, para referirse al doble vínculo semiótico de la herramienta con, por una parte, los significados personales que surgen al usarla para realizar una tarea, y por otra, los significados matemáticos evocados por su uso, que un experto puede reconocer. En ese sentido, la TMS reconoce el papel de las herramientas en el aprendizaje y destaca la mediación del profesor al gestionar el doble vínculo mencionado. Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) señalan que cualquier artefacto puede ofrecer un potencial semiótico valioso, con respecto a metas educativas particulares. Cuando este potencial se aprovecha para hacer un acercamiento a un objeto o proceso matemático, gracias a un estudio cuidadoso de las cualidades y restricciones del artefacto, éste se convierte en instrumento para el aprendizaje.

El proceso mediante el cual un artefacto, en las manos de un sujeto, llega a ser instrumento lo denomina Rabardel (1995/2011), en su teoría de la actividad instrumentada, *génesis instrumental*. Implica la constitución de una entidad mixta, llamada instrumento, que involucra los tres elementos principales de la actividad instrumentada: el sujeto, el artefacto y el objeto de la actividad. Por ejemplo, un piano (artefacto) es un instrumento en las manos de un músico (sujeto) cuando interpreta una pieza musical (objeto de la actividad). Un instrumento tienen dos componentes: (i) *artefactual*, que tiene que ver con las características propias de la herramienta o partes de ésta; y (ii) *cognitivo*, que tiene que ver con los esquemas de utilización del sujeto cuando usa la herramienta al enfrentarse a una tarea específica.

La noción de esquema de utilización la desarrolla Rabardel (1995/2011) a partir de la noción de *esquema operativo* de la teoría de Piaget y de la noción de *esquema* de Vergnaud (1996) y, en ese sentido, es un constructo que refiere a la organización del pensamiento, más o menos estable, que determina el comportamiento de un sujeto en una clase de situación específica en la que se usa un artefacto. Un esquema de utilización determina las formas específicas como el sujeto manipula el artefacto o lo adecúa a sus fines personales (*esquemas de uso*) que están asociadas con aspectos de índole técnico; también determina las formas de uso referidas a la resolución de la tarea (*esquemas de acción instrumentada*). En ambos tipos de esquemas están presentes los componentes artefactual y cognitivo.

Rabardel no desarrolló la noción de esquema de utilización centrando la atención en el aprendizaje en un contexto educativo. La noción alude a organizaciones mentales y no es posible recurrir directamente a ellas en la enseñanza. Pese a ello, autores como Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) destacan que la contraparte observable de los esquemas, es decir, las acciones que se llevan a cabo con el artefacto y los signos derivados de la acción instrumentada (el reporte de las acciones, las figuras, los enunciados, etc.) aportan una base conceptual útil cuando se quiere explicar el aprendizaje mediado por artefactos. Por esta razón, Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) proponen un recurso didáctico que consiste en exigir a los estudiantes el recuento escrito del proceso de resolución de la tarea o problema con el uso del artefacto, del cual pueden inferirse los esquemas de utilización que se pusieron en juego e identificar, en las acciones y los signos, los significados personales que tienen de los objetos que surgen en el proceso. Tan pronto como los signos derivados del uso del artefacto son comunicados, mediante alguna forma de representación externa, los significados personales se pueden compartir y el profesor puede promover su evolución hacia significados matemáticos, a partir de una reconstrucción social de los signos. Específicamente, permiten allegar razones asociadas al uso del instrumento de las discrepancias entre las actuaciones de los estudiantes y las expectativas de los profesores, respecto del saber matemático. En ese sentido, la construcción de conocimiento se ve como una consecuencia de la actividad instrumentada en la que los signos se reconstruyen y sus significados evolucionan en la interacción social.

Para ilustrar lo dicho hasta ahora, consideremos el potencial semiótico de un ábaco para el aprendizaje del sistema de numeración decimal, explicado por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008). Este artefacto antiguo, construido y usado para contar y realizar operaciones numéricas, porta el saber cultural de la humanidad sobre el sistema de numeración posicional. Su uso en la escuela, involucra aprender a manipularlo para representar números y usarlo para hacer operaciones, principalmente la adición. La acción instrumentada da lugar a esquemas de utilización como el agrupamiento y el remplazo de conjuntos de fichas por otras que representan un orden superior, como también al surgimiento de signos que hacen explícitos los significados personales de los niños acerca del valor posicional y del algoritmo de la adición.

El análisis de un programa de geometría dinámica en términos de su potencial semiótico es un poco más complejo que el del ábaco, porque en el proceso de génesis instrumental, el componente artefactual puede ser el programa en su totalidad o algunas de sus partes o funciones. El diseño y funcionamiento de este tipo de programas, pretende hacer ostensivas características y propiedades de objetos de la geometría euclidiana plana, pero su uso en la enseñanza se ha extendido a otros dominios como el álgebra y el cálculo. La función que caracteriza este tipo de programas es el arrastre, que posibilita diversas y variadas actividades instrumentadas, pues permite manipular las figuras representadas en la pantalla como si fueran objetos físicos. En nuestra actividad investigativa hemos usado Cabri para que los alumnos reconstruyan y precisen el significado de proposición condicional pues gracias al arrastre se hacen evidentes las relaciones de dependencia entre propiedades. Un análisis cuidadoso del proceso de resolución de los problemas que les proponemos a los estudiantes, nos ha llevado a inferir esquemas de utilización. A continuación, se ejemplifican solamente las acciones instrumentadas correspondientes a cada parte (A, B y C) de uno de los esquemas.

A) Determinar un invariante

- Hacer una construcción blanda de la figura sobre la cual se quiere estudiar las condiciones que impone el enunciado del problema o hacer una construcción robusta de ejemplos especiales de la figura sobre la cual se quiere estudiar una propiedad.
- Enriquecer la figura con información relevante (medir, usar color, poner marcas de congruencia, etc.).
- Arrastrar hasta obtener un ejemplo especial de la figura a la que se refiere el enunciado del problema o comprobar si la propiedad solicitada se da.
- Verificar el cumplimiento de una propiedad, mediante una construcción robusta, en caso de que no se haya hecho previamente.
- Si es necesario, repetir los pasos cuatro pasos anteriores.

B) Formular una proposición condicional que reporte el invariante descubierto como antecedente para las condiciones impuestas en la construcción

C) Corroborar la conjetura.

La mediación semiótica del profesor

La TMS provee elementos para describir e interpretar el tratamiento que el profesor hace de los signos producidos por los estudiantes, derivados del uso de un artefacto, para el desarrollo del contenido matemático en la clase y la apropiación de significados matemáticos. Desde el punto de vista de esta teoría, no todos los signos producidos por los estudiantes son aprovechables de la misma manera. El uso que el profesor hace de éstos, con la conciencia que tiene del potencial semiótico del artefacto, depende del nexo que él entrevea entre los signos y las acciones llevadas a cabo con el uso del artefacto, o entre los signos y el conocimiento matemático en juego, en el contexto de una actividad específica. Si el primer nexo es más fuerte, lo considera como *signo del artefacto*, y en caso contrario, como *signo matemático*.

Por ejemplo, en una situación de exploración de una construcción en la que se tienen dos rayos opuestos *BA* y *BC,* otro rayo *BD* y las bisectrices de los ángulos *ABD y DBC,* una conjetura reportada por un estudiante que el profesor puede usar como signo del artefacto es la siguiente*: siempre que arrastro, la posición del rayo BD no importa ya que la medida del ángulo formado por las bisectrices es siempre igual*; y otra conjetura que puede usar como un signo matemático es ésta: *el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal es recto*. Pero también es posible que el profesor entrevea en un signo un carácter bidireccional que relaciona la experiencia de los estudiantes con el artefacto y el conocimiento matemático al que se espera que lleguen y, por ende, que éste pueda ser *pivote* entre significados asociados al artefacto y significados matemáticos. Un ejemplo de esto es: *el ángulo formado por las bisectrices siempre es recto.* En ese sentido, los signos que el profesor considera como *pivote* son los que tienen mayor opción de ser aprovechados para mediar en la evolución de los significados.

Los *signos pivote* pueden ser usados por el profesor de dos formas:

- Como andamio para hacer evolucionar los significados personales y subjetivos involucrados en los *signos del artefacto*, que están estrechamente relacionados con su experiencia directa con el artefacto, hacia significados *matemáticos*.
- Como referente de significado para aquellos significados personales involucrados en los *signos matemáticos*, que tienen estrecha relación con el conocimiento matemático pero que pueden no haber sido fruto

de un proceso de construcción significativa y requieren un contexto situacional que favorezca la negociación de significados. Los signos matemáticos están asociados al universo teórico que corporeiza el artefacto y constituyen la meta de la mediación semiótica del profesor, quien busca una construcción colectiva de su significado.

Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) y Mariotti (2009) consideran necesario diseñar actividades para la clase que permitan sacar provecho del potencial semiótico de los artefactos para la mediación semiótica. En este sentido, sugieren un ciclo didáctico que estimula la producción individual y colectiva de signos, identificables por el profesor y con los que es posible la mediación. El ciclo se concibe como una secuencia de actividades que comienza con una tarea en cuya realización los estudiantes usan el artefacto, continúa con una tarea en la que se pide un texto que informe su actividad, y termina con actividades colectivas en las que el profesor se responsabiliza de hacer evolucionar los significados asociados a los signos. Por último, él focaliza la discusión en el uso del artefacto y solicita elaborar una síntesis del proceso seguido. En todo caso, el proceso de mediación semiótica del profesor se apoya en la experiencia vivida por los estudiantes, en sus observaciones y formulaciones, derivadas de la resolución de la tarea, para dar sentido a los enunciados matemáticos que emergen.

Desde 2007, el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría *(Æ·G)* de la Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, viene implementando y evaluando una aproximación metodológica para favorecer el aprendizaje de la demostración, que guarda relación con el ciclo didáctico propuesto por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008). En esta aproximación:

- Los estudiantes, en grupos pequeños, resuelven un problema abierto, con el apoyo de Cabri.
- Los estudiantes reportan el proceso llevado a cabo y proponen conjeturas resultado de la resolución. Este reporte se hace simultáneamente con la resolución (a diferencia del ciclo didáctico que promueve una reflexión retrospectiva).
- El profesor retoma colectivamente el trabajo con el artefacto para permitir que los estudiantes (a) se sitúen en contexto y (b) relaten su experiencia. Ello permite una nueva explicitación, por parte de los estu-

diantes, de los signos que surgieron al resolver la tarea, con el apoyo del instrumento, y que pueden ser usados en la mediación.

- El profesor promueve la exposición de las acciones y observaciones de los alumnos para (a) analizar el uso del instrumento, (b) analizar la información emergente de la exploración y (c) posibilitar un proceso empírico de validación o invalidación de los signos producidos.

- El profesor identifica privadamente qué signos-conjetura, aceptados por el grupo, usará como *del artefacto, pivote* o *matemático.* También colige los significados personales que pueden estar detrás de los signos.

- El profesor usa los signos que considera *pivote* como andamio para favorecer la evolución de los significados personales. Para ello, busca relacionar los signos, o parte de ellos, con aspectos matemáticos e impulsa la apropiación del discurso matemático, como género (uso de términos y expresiones propias, sentido de generalidad de las conjeturas, estructura de los enunciados, etc.).

- El profesor usa los signos que considera como *matemáticos* para establecer relaciones entre éstos y un contexto situacional que favorezca la negociación de significados.

- El profesor promueve la reconstrucción de los signos, a partir de los significados matemáticos.

CONCLUSIONES

La Teoría de la Mediación Semiótica nos ofrece un panorama de la clase de matemáticas en el que se promueve la construcción de conocimiento por medio de una rica producción de signos, por parte de los estudiantes. A partir de diseños cuidadosamente previstos, en los que se tiene en cuenta el potencial semiótico de los artefactos que se usan en la clase y se favorece la comunicación de los significados personales acerca de los objetos matemáticos involucrados en la actividad, el profesor conduce la discusión hacia los objetos o procesos matemáticos que son el objetivo de la enseñanza.

Para sacar provecho de la TMS conviene realizar esfuerzos colectivos para generar, implementar y evaluar propuestas didácticas fundamentadas en ella y socializar los resultados. Esta teoría aporta elementos conceptuales para lograr hacer de las aulas de clases, ámbitos de participación legítima de los estudiantes y espacios de construcción de comunidades de aprendizaje efectivos.

Desde la perspectiva de la TMS, sería una cuestión de utilidad para los profesores de los distintos niveles educativos, contar con un repertorio de análisis del potencial semiótico de los distintos artefactos de tecnología digital usados hoy para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por cuanto les proveería herramientas conceptuales y de trabajo importantes para su labor de enseñanza.

De manera análoga al modelo de van Hiele, que en los años 1980 centró el foco de interés en el razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan al aprendizaje de la geometría, y describió un modelo para organizar la enseñanza a partir de fases, la TMS permite analizar la enseñanza, cuando la actividad está mediada por un artefacto, desde una perspectiva sociocultural.

REFERENCIAS

Balacheff, N. y Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde, (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 429-501). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Bartolini-Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini-Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (segunda edición revisada; pp. 746-783). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum.

Borba, M.C. y Villarreal, M.E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. New York, EUA: Springer.

Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

Jones, K. (2000, marzo). *The mediation of mathematical learning through the use of pedagogical tools: A sociocultural analysis*. Ponencia invitada en la conferencia Social Constructivism, Socioculturalism, and Social Practice Theory: Relevance and rationalisations in mathematics education, Gausdal, Noruega. Recuperado de http://eprints.soton.ac.uk/41272/1/Jones_Mediation_by_Tools_2000.pdf

Kieran, C. y Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The fu-*

ture of the teaching and learning of algebra: *The 12th ICMI Study* (pp. 99-152). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Lévy, P. (1990). *Les technologies de l'intelligence: l'avenir de la pensée à l'ère informatique*. París, Francia: La Découverte.

Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427-440.

Mariotti, M.A., Bartolini-Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cogniton. En E. Pehkonen (Ed), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Lahti Research and Training Center, University of Helsinki.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 121-142.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo. L. y Echeverry, A. (en evaluación). *Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular*.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo. L. y Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. *Epsilon*, 82, 41-56.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías* (Martín Acosta Gempeler, Tr.). Bucaramanga, Colombia: Fondo Editorial Universidad Industrial de Santander (primera edición en francés, 1995).

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-240). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

TEORÍA DE GRAFOS Y GEOMETRÍA RETICULAR: MATEMÁTICAS ELEMENTALES PARA EL ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

Sebastián Cuéllar, Jorge D. Muñoz y José L. Ramírez
Grupo YAGLOM, Escuela de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda
sebastian.cuellar@correo.usa.edu.co, jorged.munoz@correo.usa.edu.co,
josel.ramirez@ima.usergioarboleda.edu.co

El objetivo de esta charla es presentar algunos resultados recientes sobre teorías elementales en matemáticas para el desarrollo del talento en matemáticas. En particular, se mostrarán algunos resultados relacionados con la teoría de grafos y la teoría reticular, ambas, teorías matemáticas que han venido siendo adaptadas por el Grupo Yaglom de la Universidad Sergio Arboleda para los cursos de pretalentos y talentos en matemáticas.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, identificar y evaluar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas es una necesidad apremiante que comparten varios investigadores, ya que no se puede desconocer que existen personas que desde muy temprana edad manifiestan un interés por las matemáticas más allá de los conocimientos adquiridos en las instituciones, pero que debido a la alta exigencia educativa que requieren se pueden llegar a identificar mas no se les brindan las herramientas necesarias para desarrollar su potencial matemático.

El proyecto del Semicírculo en Matemáticas de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda ha liderado durante los últimos diez años la detección y el estímulo del talento en matemáticas en niños y jóvenes provenientes de colegios privados y públicos de Bogotá y de algunos municipios aledaños. El proyecto recibe anualmente en promedio 300 estudiantes escolares, quienes participan en una serie de actividades diseñadas especialmente para la detección y el estímulo del talento en matemáticas.

Actualmente el proyecto desarrolla sus investigaciones en el seno de los grupos de trabajo YAGLOM y GdG. El primer equipo se encarga de construir, estructurar y desarrollar teorías matemáticas elementales y de utilizarlas total o parcialmente en la organización y desarrollo de actividades para realizar con los candidatos a vincularse al programa de Talentos en Matemáticas. El se-

Cuéllar, S., Muñoz, J.D. y Ramírez, J.L. (2013). Teoría de grafos y geometría reticular: matemáticas elementales para el estímulo del talento matemático. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 97-108). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

gundo equipo está encargado de la elaboración de las historias de vida de algunos de los niños que han pasado por el proyecto.

¿MATEMÁTICAS PARA TODOS?

La matemática como ciencia, como conjunto de conocimientos, conviene enseñarla desde temprana edad porque en esencia es parte del pensamiento humano y una necesidad para enfrentarnos a la sociedad y a una rápida evolución del mundo que nos rodea. Existen personas que poseen aptitudes y habilidades especiales hacia el conocimiento matemático, pero que debido a los modelos de enseñanza y evaluación estándar que prevalecen, posiblemente ese talento no se llegue a detectar y desarrollar.

Es claro que existen niños con un *talento especial* para las matemáticas y que esto sucede también con otras áreas del conocimiento, sin embargo, el derecho de estos niños a desarrollar ese talento específico muchas veces se ve truncado por no existir espacios especializados para ellos. Frente a esto los diferentes entes gubernamentales y gobiernos locales han venido creando e implementado una serie de leyes que permitan regular esta situación.

En particular la Ley 115, *Ley General de Educación*, en el título III del capítulo I (art. 46, 47, 48 y 49) plantea elementos relacionados con la atención educativa de la población con capacidades excepcionales. El Decreto 2082 de 1996 reglamenta la atención educativa a personas con limitaciones y con capacidades o talentos excepcionales.

Sin embargo, aunque estas normas existan, son muchos los niños que no tienen una oportunidad clara para que se les atienda y estimule su talento en las diferentes áreas. Muestra de ello es que en la Sentencia T-294/09, la Corte Constitucional tuvo que ordenar al Ministerio de Educación Nacional que identificara e incorporara a la población con capacidades o talentos excepcionales, de cada uno de los municipios y departamentos del país, para asegurar la provisión de auxilios, subsidios, becas o créditos educativos a favor de quienes no posean los medios económicos.

En consecuencia con lo anterior, por ejemplo el Consejo de Bogotá, bajo el proyecto de acuerdo No. 351 de 2009, estableció un plan de cubrimiento gradual para la adecuada atención educativa de las personas con capacidades o talentos excepcionales.

Dada la importancia y pertinencia de buscar alternativas de solución, el proyecto de talentos en matemáticas pretende aportar a la solución de la situación antes planteada, a través de sus programas con los cuales busca identificar y estimular aptitudes y actitudes hacia las matemáticas. Estos programas involucran a los niños en un ambiente universitario, en el que se desarrolla una teoría elemental en matemáticas, con base en una serie de actividades y una metodología especial (Núñez, Gómez y Cortés, 2011).

TALENTO EN MATEMÁTICAS

El término "talento" es una nominación asignada a los individuos con una aptitud muy relevante en un área específica, relacionada con campos académicos, artísticos o relacionales, "[U]n talento es un ser que ama profundamente trabajar un oficio determinado, comprende profundamente su arte y puede fácilmente expresar sus creaciones en éste" (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Para considerar que una persona es académicamente talentosa, debe poseer una habilidad o capacidad superior en las áreas académicas como la matemática, las ciencias naturales, sociales y/o en las humanidades. El talento académico puede ser general o específico. General, cuando las capacidades superiores se manifiestan en varias o todas las áreas académicas, y específico, cuando se presenta en una de ellas (Arancibia, 2009). El talento en matemáticas es el tipo de talento al que se ha dirigido el proyecto de talentos en matemáticas de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda.

El talento académico se distribuye homogéneamente dentro de la población sin importar diferencias económicas, de género o raza, y reconocemos la necesidad de generar ambientes enriquecidos en los que se atienda este tipo de población. No basta solamente con poseer la capacidad para ser talentoso académicamente, por el contrario se debe contar con contextos adecuados de aprendizaje que potencien verdaderamente el talento, de lo contrario puede perderse (Cabrera, 2011).

La atención a niños con un talento específico en las matemáticas ha sido una preocupación en los últimos años por parte de la comunidad académica. Varias instituciones han creado programas especializados que propicien espacios enriquecidos para el trabajo con este tipo de población; por ejemplo el proyecto ESTALMAT (Estímulo al talento en Matemáticas) en España está liderado por la Real Academia de Ciencias desde el año 1998, y busca detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento matemático excepcional de estudiantes de 12-13 años, mediante una orientación semanal a lo largo de dos años (de Guzmán, 2007). Otro ejemplo es el PENTA UC de la Universidad Católica de Chile, programa interdisciplinario que busca generar conocimiento científico de trascendencia, nacional e internacional; aumentar el interés público en torno a la necesidad de desarrollar el potencial de los niños con talento académico; y promover el desarrollo de políticas públicas que favorezcan la oferta de servicios educacionales y psicológicos para los niños y jóvenes talentosos (Arancibia, 2009).

Frente a este panorama, en el año 2002 se inició en Colombia el proyecto "Fundamentos Matemáticos de la Educación Matemática, parte I: Aritmética" apoyado por Colciencias y adelantado por el grupo de la Escuela de Matemáticas MUSA.E1 con sede en la Universidad Sergio Arboleda, bajo la dirección del profesor Jesús Hernando Pérez, por la necesidad de crear un espacio para que niños y niñas con talento para las matemáticas, no necesariamente superdotados, pudieran desarrollar, enfocar y fortalecer sus habilidades.

TEORÍAS ELEMENTALES EN MATEMÁTICAS

La palabra "elemental" es la que guía todo el trabajo de nuestro grupo y por ello este se llama "Grupo Yaglom". Isaac Yaglom fue uno de los grandes animadores del programa Olimpiadas Matemáticas, que en la actualidad tiene ya una cobertura mundial. Yaglom en su trabajo *La Geometría Elemental Hoy* (Yaglom, 1981) propone que la *matemática elemental* es aquella que se puede trabajar y desarrollar en las escuelas y colegios. Curiosamente ese trata de una definición experimental, es decir que, para él, las disciplinas matemáticas elementales son experimentales. Para Yaglom, elemental no es lo que se puede enseñar en las escuelas y colegios, tampoco la matemática de las escuelas y colegios (Luque, Mora y Torres, 2006).

Esta definición sugiere aspectos importantes que nuestro grupo practica en sus exploraciones elementales, como se muestra a continuación (Pérez, 2010, pp. 7-8):

- En el trabajo elemental hay construcción de conocimiento matemático, bien sea conocimiento ya conocido o completamente inédito.

- La matemática elemental, como en toda disciplina académica, se construye en equipo.
- Como ya se ha mencionado, el propósito fundamental de nuestro grupo es lograr que los estudiantes desarrollen su creatividad matemática con las actividades que se les proponen. El equipo Yaglom se reúne una vez a la semana para organizar teorías "elementales" y uno o varios de sus miembros trabajan, con estas teorías o con parte de ellas, en sesiones de cinco horas semanales con grupos de niños de edades similares, procurando que ellos o algunos de ellos encuentren regularidades, formulen conjeturas, propongan ejemplos y contraejemplos, formulen argumentos, etc.

TEORÍA DE GRAFOS COMO EJEMPLO DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

La teoría de grafos es uno de los ejemplos más conocidos y diversificados de matemáticas elementales, esto quizá debido a la naturaleza simple de los problemas que aborda y especialmente por sus diversos usos en matemáticas recreativas y enseñanza de las matemáticas (Hadar y Hazzan, 2005). Dicha teoría sigue siendo un tema de estudio activo en muchas instituciones y todo su cuerpo constituye una teoría matemática con relaciones con diversas disciplinas entre ellas: teoría de la información, análisis matemático, álgebra, combinatoria y teoría de números.

Se considera a Leonard Euler, matemático suizo (1707-1783), fundador de esta teoría, al plantear y proponer la solución al problema conocido como *Problema de los siete puentes de Königsberg* cuyo enunciado se presenta a continuación (Bondy, 1976).

> La ciudad de Königsberg, en Prusia estaba localizada en el río Pregel, e incluía dos grandes islas que estaban conectadas entre ellas por un puente, y con las dos riberas del río mediante seis puentes (siete puentes en total) [ver Figura 1]. El problema que se planteaban sus habitantes consistía en decidir si era posible seguir un camino, y cómo hacerlo, que cruzase todos los puentes una sola vez y que finalizase llegando al punto de partida.

Figura 1: Puentes de Königsberg

Dicho problema se puede visualizar de la siguiente forma: identificamos cada porción de tierra con un punto y cada uno de los puentes uniendo dos porciones de tierra (bien sean islas o no) con un lado entre los dos puntos correspondientes. Bajo este convenio el grafo asociado al problema se muestra en la Figura 2.

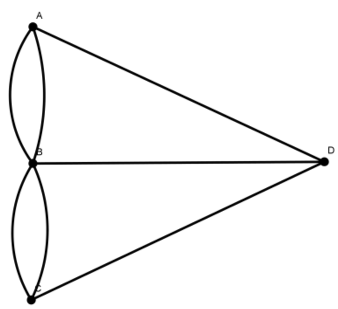


Figura 2: Grafo asociado al problema de los Puentes de Königsberg

Un grafo es entonces una estructura como la mostrada anteriormente, es decir, una pareja $G = (V, L)$ donde V es un conjunto de puntos o vértices y L un conjunto de aristas, lazos o lados entre dichos vértices. Un camino en un grafo corresponde a una sucesión de vértices $v_1 v_2 v_3 \ldots v_n$ conectados por aristas entre cada par consecutivo de ellos $v_i v_{i+1}$. Cuando el recorrido incluye todas las aristas del grafo una sola vez y termina en el vértice de inicio el recorrido se denomina un circuito euleriano.

Euler logró demostrar que el recorrido propuesto era imposible y dio pasó a lo que después se conocería como el *teorema del circuito euleriano* en teoría de grafos. Dicho resultado establece que un circuito euleriano, que es equivalente a realizar en un grafo dado, un recorrido similar al propuesto por el problema de los puentes, no se puede realizar a menos que de cada uno de los vértices se desprendan un número par de aristas. Por este motivo el problema de los puentes es irresoluble dado que de la segunda isla se desprenden tres puentes o de dicho vértice parten tres aristas.

La teoría de grafos y la matemática elemental

Una de las características más importantes del problema de los puentes es la simplicidad de su enunciado y esta es quizá la virtud que posee la teoría de grafos a la hora de estudiarla como teoría matemática elemental. Dada esta característica la teoría de grafos se convierte en una excusa perfecta para motivar la creatividad de los grupos de estudiantes introduciéndolos en los conceptos y problemas propios de esta temática dentro del aula de clase.

Los estudiantes se acoplan fácilmente a las definiciones de la teoría y una vez estudiadas son capaces de formular conjeturas que si bien pueden ser falsas fortalecen la capacidad de crear conocimiento matemático. Sin embargo, varias de ellas son verdaderas y se constituyen en evidencia de que la teoría de grafos tiene características propias de las matemáticas elementales desde la propuesta del programa de talentos de la Universidad Sergio Arboleda.

Algunos resultados en teoría de grafos que han sido deducidos por los estudiantes son los siguientes:

- En todo grafo $G = (V, L)$ se tiene que $\sum d_G(v) = 2|L|$.
- Todo grafo posee un número par de vértices con grado impar.
- Un grafo posee un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices son de grado par.
- Un grafo posee un camino euleriano si y sólo si todos sus vértices son de grado par o hay exactamente dos vértices de grado impar.
- En todo árbol $G = (V, L)$ se tiene que $|V| - 1 = |L|$.

Los resultados anteriores corresponden a teoremas propios de la teoría de grafos obtenidos por los estudiantes en sesiones de trabajo diseñadas con el fin de que dedujeran dichas conclusiones. Sin embargo, no siempre las observaciones de los estudiantes son esperadas en el trabajo elemental.

El siguiente resultado fue desarrollado por los estudiantes Yecid Alejandro Gómez (10 años) y Esteban Gutiérrez (11 años) del programa de Pretalentos Matemáticos 2010-II durante una de las sesiones de trabajo.

Teorema de Yecid/Esteban En todo árbol $G = (V, L)$ se tiene que el número de caminos simples disyuntos está dado por:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (|V| - 1)$$

Este resultado prueba que la teoría de grafos diseñada es en efecto elemental pues dicho resultado contiene originalidad de los estudiantes en el sentido de que no era uno de los resultados que los coordinadores de las actividades diseñadas para el curso habían planeado que fueran deducidos por los estudiantes, y de hecho era una observación desconocida para los miembros del grupo de trabajo en ese momento.

En la actualidad la teoría de grafos corresponde al tema de trabajo del curso de pretalentos matemáticos 2013-I y está en desarrollo una cartilla que incluye estos temas a nivel elemental.

TEORÍA RETICULAR COMO EJEMPLO DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

Determinar el área de un polígono ha sido uno de los problemas más comunes en la geometría y casi que diariamente nos enfrentamos a este problema. En particular, cuando los vértices del polígono se encuentran en una retícula ortogonal el Teorema de Pick es una forma muy sencilla de poder resolver el problema. De igual forma el teorema de Pick permite resolver el problema de la construcción de polígonos regulares reticulares.

Un punto P de coordenadas (x, y) se llama reticular si x, y son números enteros, es decir, si $x, y \in \mathbb{Z}$. Así, el plano reticular es el conjunto de los puntos del plano cartesiano que son reticulares. A partir de esto se puede definir la geometría reticular como el estudio de las propiedades del plano reticular, (Ramírez, 2010). Particularmente, en esta sección se estudiará el Teorema de Pick, quizá uno de los resultados más conocidos de esta teoría.

EL TEOREMA DE PICK

El Teorema de Pick lo demostró el matemático austriaco *Georg Alexander Pick* (1859-1942). Pick estudió en la Universidad de Viena, trabajó en distintas universidades pero terminó su carrera en la Universidad de Praga. Su trabajo matemático fue muy amplio: abarcó desde análisis funcional hasta geometría. Sin embargo, gran parte de su popularidad se debe al teorema que lleva su nombre, el cual en un principio no recibió mucha atención. Sólo hasta 1969, cuando Steinhaus lo incluyó en su libro *Mathematical Snapshots,* el teorema atrajo la atención por su simplicidad y elegancia.

Dado un polígono reticular existen varios métodos para encontrar su área. Uno de ellos es dividir el polígono, por ejemplo en triángulos o rectángulos, calcular el área de cada una de estos polígonos y sumarlos para obtener el área total. Pero este procedimiento puede ser largo y complicado. Una solución es utilizar el Teorema de Pick.

Si I y B denotan el número de puntos reticulares que están en el interior del polígono y en la frontera del polígono respectivamente, el Teorema de Pick establece que el área del polígono es:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

En el caso del polígono de la Figura 3 se tiene que *I*=20 y *B*=10, así por el Teorema de Pick el área es $A = 20 + {}^{10}\!/_{2} - 1 = 24$.

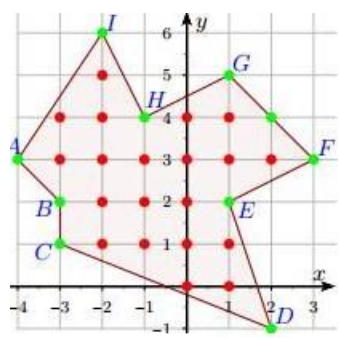


Figura 3: Polígono con sus puntos interiores (rojo) y sus puntos en la frontera (verde)

Una aplicación muy importante del Teorema de Pick es la resolución del problema de la constructibilidad de polígonos regulares reticulares. Gracias a este teorema se puede demostrar que el único polígono regular reticular que se puede construir es el cuadrado. En el presente artículo se mostrará el caso del triángulo, pero la demostración se puede generalizar para polígonos de n lados (Ramírez, 2010).

El procedimiento es muy sencillo: suponer que existe un triángulo reticular equilátero, calcular el área por dos métodos distintos y llegar a una contradicción. Por el teorema de Pick, el área de cualquier polígono, en particular un triángulo equilátero, es un número racional pues las cantidades I y B son enteras.

Si el triángulo es de lado a, su área es $\frac{ah}{2}$, pero al ser equilátero $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por lo tanto el área es:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Pero a^2 es el área de un cuadrado reticular, por el teorema de Pick este es un número racional, y así el área, calculada de la segunda forma, es un número irracional. Comparando los dos resultados obtenemos que por un camino el área es un número racional y por el otro es un número irracional, lo cual es absurdo, por lo tanto no hay triángulos equiláteros reticulares.

El teorema de Pick presenta una extensión y es para figuras con agujeros. Si R es un polígono reticular, un agujero de R es un polígono contenido en R sin puntos de frontera en común. En este caso el teorema de Pick toma la siguiente forma:

$$A = I + \frac{B}{2} + n - 1$$

donde n es el número de agujeros del polígono.

Teoría reticular y la matemática elemental

Ahora surge la pregunta ¿es la geometría reticular una teoría matemática elemental? Si nos basamos en la definición de *Isaac Yaglom*, la geometría reticular es una teoría matemática elemental, pues se puede trabajar con estudiantes y profesores de las escuelas y colegios. Entre los conceptos necesarios para poder desarrollar esta teoría se encuentran nociones básicas de teoría de números como el máximo común divisor o la definición de número primo, también nociones básicas de geometría como el plano cartesiano, polígonos y circunferencias y área de polígonos, todos estos conceptos son desarrollados en la escuela.

Además el *ESTALMAT* de España también diseñó una cartilla de geometría reticular para trabajarla con los estudiantes del proyecto. A su vez, la Universidad de Zaragoza creó una cartilla sobre el Teorema de Pick para un taller de talento matemático (Pérez y Sánchez, 2009), esto muestra que es una teoría que se puede trabajar con estudiantes de escuelas y colegios.

En el semestre en curso (2013-I) el currículo de geometría reticular se está llevando a cabo en el programa Talentos de la Universidad Sergio Arboleda. Las clases se enfocan en que los estudiantes puedan construir conocimiento, realizar conjeturas, argumentar y dar contraejemplos. Se busca que el estudiante tome un papel activo y no que sea solo un oyente en el salón de clase.

Adicionalmente a los estudiantes se les ofrecen proyectos de investigación en la teoría que se está trabajando. En el curso de geometría reticular se tienen tres proyectos:

- Geometría reticular en un sistema de ejes no ortogonal.
- Geometría en una retícula rectangular.
- Geometría reticular en 3 dimensiones.

REFERENCIAS

Arancibia, V. (2009). *La educación de alumnos con talentos: una deuda y una oportunidad para Chile*. Vicerrectoría de Comunicaciones y Asuntos Públicos, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.

Bondy, J. (1976). *Graph theory with applications*. Nueva York, EUA: Elsevier Science Publishing Co, Inc.

Cabrera, P. (2011). ¿Qué debe saber y saber hacer un profesor de estudiantes con talento académico? Una propuesta de estándares de formación inicial en educación de talentos. *Estudios Pedagógicos*, *37*(2), 43-59.

Consejo de Bogotá (2009). Proyecto de Acuerdo No. 351 DE 2009. Por medio del cual se establece el plan de cubrimiento gradual para la adecuada atención educativa de las personas con capacidades o talentos excepcionales.

Corte Constitucional de Colombia (2009). Sentencia T-294/09, Derecho a la educación de menores con talentos o capacidades excepcionales.

Guzman, M. de (2007). *El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas*. España, ESTALMAT. Recuperado de http://thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es.estalmat/files/MGUZMAN_TRATAMIENTO_EDUCATIVO.pdf

Hazzan, O. y Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal International of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *24*(3), 255-272.

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2006). ¿Es posible hacer matemáticas en el aula? En *Memorias de Coloquio Investigación e Innovación de la Enseñanza de las Ciencias* (vol. 1, no. 1, pp. 69-77). Bogotá, Colombia: Universidad Católica de Colombia. Recuperado en http://portalweb.ucatolica.edu.co/easyWeb2/files/44_248_v1n1luquemoratorres.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1994). *Ley General de Educación 115 de 1994*.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales*. Bogotá, Colombia: Autor.

Núñez, R., Gómez, L. y Cortés, C. (2011). *El ambiente académico universitario clave del talento matemático*. Ponencia presentada en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Peréz, J. (2010). *La matemática elemental*. Escuela de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.

Pérez, A. y Sánchez, M. (2009). *Matemáticas para estimular el talento. Actividades del proyecto ESTALMAT*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Ramírez, J. (2010). El Teorema de Pick y redes de puntos. *Materials Matemàtics*, 5, 1-41.

Yaglom, I. (1981). Elementary geometry, then and now. En Ch. Davis, B. Grünbaum y F.A. Sherk (Eds.), *The geometric vein, The Coxeter Festschrift* (pp. 253-277). Nueva York, EUA: Springer Verlag.

GEOMETRÍA DINÁMICA Y LOS TRES FAMOSOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS GRIEGOS DE LA ANTIGÜEDAD

Óscar Gómez
Fundación Universitaria Konrad Lorenz
oscare.gomezr@konradlorenz.edu.co

La intención de la conferencia es hacer un paralelo entre, por una parte, dos aspectos de la geometría dinámica –su desempeño como herramienta empleada por un usuario y su funcionamiento interno– y, por otra, los dos aspectos del problema griego –las soluciones "lineales" y la imposibilidad de solución rigurosa. Algunas soluciones propuestas con construcciones como la cisoide y la cuadratriz siguen la filosofía de la geometría dinámica, esto es, más de dos mil años antes de la invención del computador, los griegos habían desarrollado el concepto de lo que hoy conocemos como geometría dinámica.

ANTECEDENTES Y UN POCO DE HISTORIA

Aunque las matemáticas existían antes de los griegos, es un lugar común afirmar que, en algún sentido, comenzaron con ellos. Y este "sentido" es lo que le ha dado su estatus de conocimiento ideal y lo que la ha proyectado desde ese lejano pasado hasta nuestros días. Es en el seno de la cultura griega, no pudiendo ser en ninguna otra, donde ocurrió la génesis de los problemas que nos ocupan. La siguiente cita de Morris Kline (1972/2012) nos pone en contexto:

> Una de las grandes contribuciones de los griegos al concepto de matemática fue el reconocimiento consciente y el énfasis en el hecho de que los entes matemáticos: números y figuras geométricas, son abstracciones, ideas de la mente claramente distinguidas de los objetos o de las pinturas. (p. 54)

Los tres famosos problemas de la geometría griega se refieren a construcciones de tales entes abstractos, por lo tanto lo que se buscaba era un algoritmo de construcción que obedeciera las reglas del juego, esto es, construcciones que se limitaran al empleo de la regla y el compás euclidianos. Una observación de Kline (1953, citado en Sánchez, 1994) arroja luz sobre este hecho:

> Esta restricción a la línea recta y a los círculos, libremente aceptada y arbitraria, estuvo motivada por el deseo de conservar la simplicidad en la geometría y por

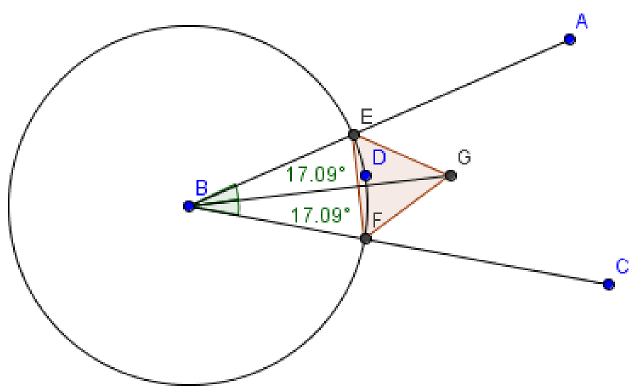
Gómez, Ó. (2013). Geometría dinámica y los tres famosos problemas geométricos griegos de la antigüedad. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 109-116). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

tanto apelaba a la estética. Algunos griegos, especialmente Platón, tenían otras razones de igual peso, para imponer la restricción. La introducción de instrumentos más complicados que podrían ser adecuados para la solución de los problemas de construcción requerían destreza manual, la que en su opinión, era indigna de un pensador. Platón opinaba que empleando instrumentos complicados "la bondad de la geometría es desechada y destruida, pues nuevamente la reduciríamos al mundo de los sentidos en lugar de elevarla e infundirle las imágenes eternas e incorpóreas del pensamiento". (p. 11)

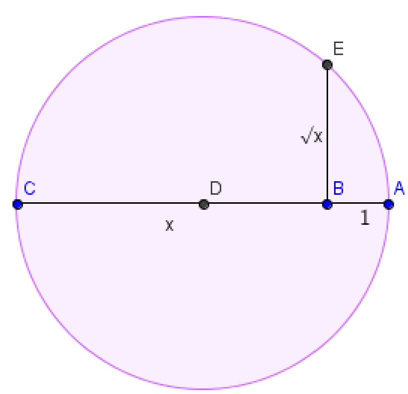
Construcciones conocidas

Los griegos demostraron muchas propiedades acerca de las áreas de figuras planas (e.g., que triángulos de bases y alturas iguales tienen la misma área), sin emplear para ello fórmulas que permitieran "medir" tales áreas sino mediante ingeniosas construcciones que permitían "ver" tal igualdad. En tal contexto surge el problema de "cuadrar" una figura, lo que consiste en dibujar, con regla y compás euclidianos, un cuadrado de área igual a la de la figura dada.

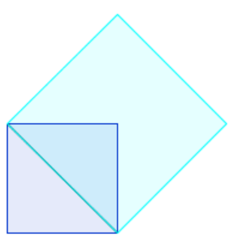
Los griegos sabían…



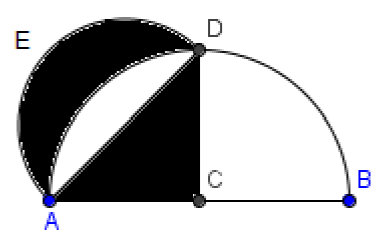
cómo bisecar un ángulo (construcción que aparece en los *Elementos* de Euclides



cómo extraer una raíz cuadrada

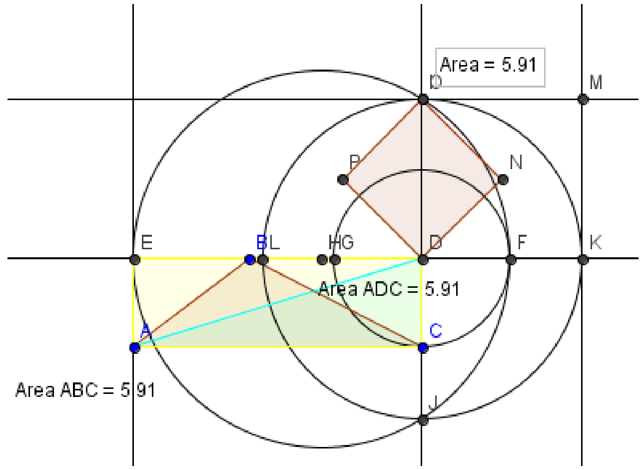


cómo duplicar un cuadrado



cómo cuadrar lúnulas

cómo cuadrar un triángulo con regla y compás



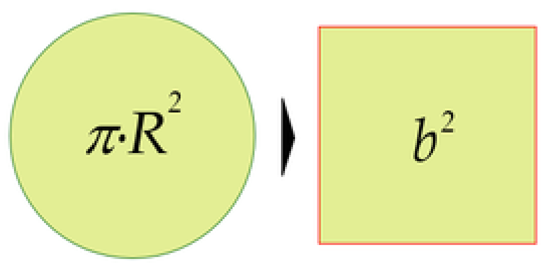
Hipócrates de Quíos demostró (la demostración tarda un minuto) que la lúnula AED y el triángulo ADC tienen la misma área. Hipócrates logró además cuadrar otros dos tipos de lúnulas. Esta demostración constituyó un paso enorme al mostrar que era posible cuadrar figuras cuyo perímetro no está constituido por segmentos de recta (por un proceso de triangulación, cuadratura de triángulos y empleando el teorema de Pitágoras los griegos lograban cuadrar cualquier polígono).

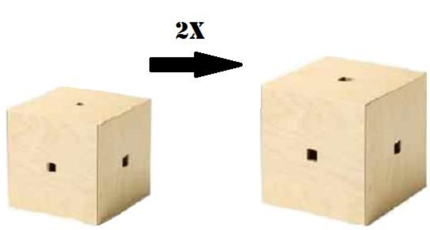
TRES RETOS GEOMÉTRICOS

Los resultados obtenidos hasta ese entonces permitieron pensar que era posible lograr resolver problemas que, de manera natural, llevaban un paso adelante lo ya conseguido.

Cuadrar el círculo

Problema relacionado con los de cuadrar polígonos y figuras de borde no recto, como las lúnulas de Hipócrates. Algebraicamente equivale a construir con regla y compás un segmento de longitud igual a π.

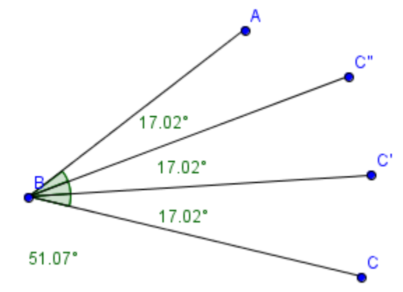




Duplicar el cubo

Este problema, que equivale desde el punto de vista algebraico a construir con regla y compás la raíz cúbica de 2, extiende el problema ya resuelto de calcular la raíz cuadrada de cualquier número.

Trisecar un ángulo



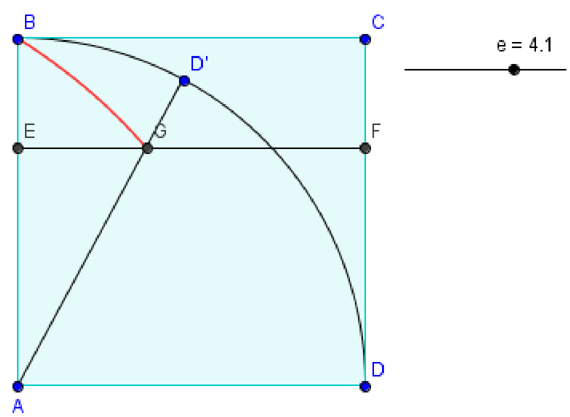
SOLUCIONES

Las soluciones se clasificaron en *planas* cuando se basaban en el uso de la regla y el compás exclusivamente, *sólidas* cuando acudían al empleo de secciones cónicas y *lineales* cuando requerían el empleo de curvas más elaboradas como cuadratrices, concoides, cisoides, etc. (Sánchez, 1994).

Soluciones lineales implementadas en GeoGebra

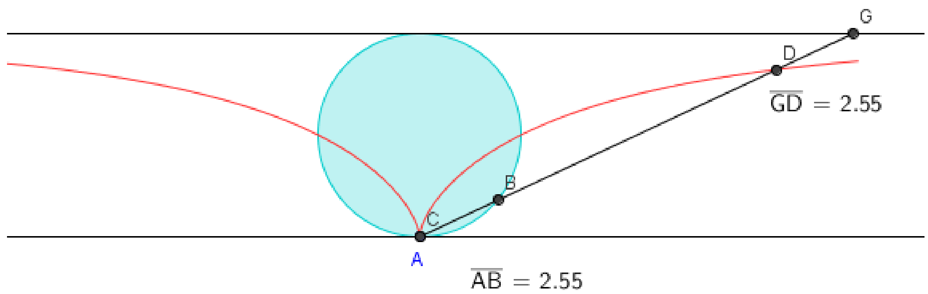
Cuadratriz de Hipias

Esta curva es generada por la intersección de las rectas EF y AD' mientras se desplazan de manera uniforme, EF de la posición BC a la AD y AD' de la posición AB a la AD. Esta curva, generada a partir de la combinación de dos movimientos simultáneos, uno de giro y otro de traslación, exige para su cabal comprensión un medio dinámico que permita ver realmente los movimientos que la generan. Es por ello que un texto como el presente es incapaz de mostrar, con todo detalle, la totalidad de la idea que pretende representar.



Esta curva, que en principio fue ideada para resolver el problema de la trisección del ángulo, también sirve para resolver el problema de la cuadratura del círculo ya que la posición límite del punto G (cuando EF y AD'coinciden con AD, el punto G no está definido y por tanto su posición se determina mediante el cálculo de un límite) es tal que $AG = 2AD/\pi$, y por tanto la curva permite la construcción de π.

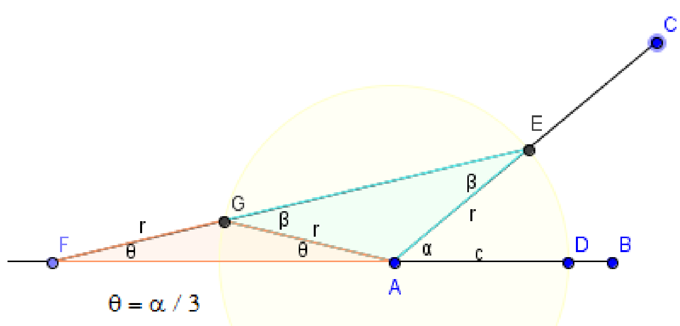
Cisoide de Diocles



De igual manera, esta curva se genera mediante el movimiento de giro del segmento AG. El punto D se determina mediante la exigencia de que la distancia GD sea igual a AB, donde B es el punto de intersección de la recta con la circunferencia.

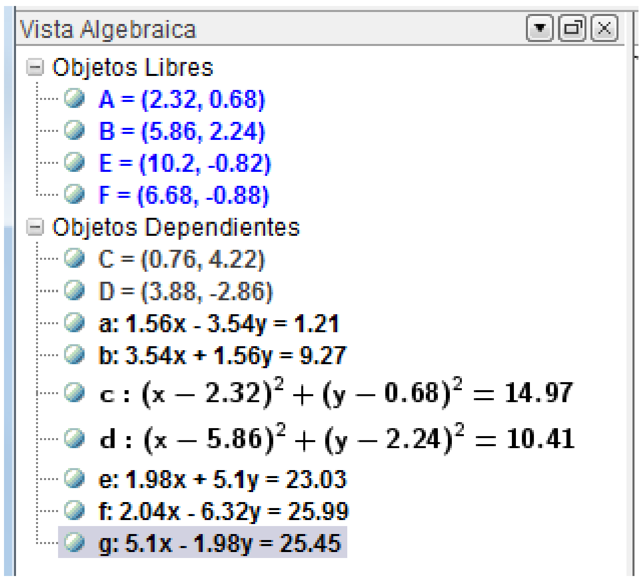
Trisección del ángulo por Arquímedes

Arquímedes logra la trisección del ángulo violando una de las restricciones al empleo de la regla, la cual dice que esta solo sirve para trazar o prolongar rectas pero que no es posible emplearla para trasladar distancias.



Imposibilidad de las soluciones (Courant, 1941/2002)

La invención por parte de Fermat y Descartes de la geometría analítica permite que se inicie el proceso que conducirá finalmente a la solución negativa del problema. En el marco de la geometría analítica tanto las rectas como las circunferencias se representan por ecuaciones. Los puntos de intersección de rectas y circunferencias se determinan mediante la solución de sistemas de tales ecuaciones. Comenzando en el campo de los racionales, las soluciones de tales sistemas pueden quedar fuera de él. Sin embargo, estas soluciones estarán contenidas en otro campo y las ecuaciones con coeficientes en este nuevo campo también podrán tener soluciones fuera de él, pero que estarán contenidas en un tercer campo. Este proceso de extensión de campos da lugar a una cadena de campos bien definida. Al traducir los problemas de la geometría al álgebra es posible determinar, según la naturaleza de las raíces involucradas, si estas son construibles, lo que equivale a poder establecer la resolubilidad del problema. Este proceso de representación de rectas y circunferencias mediante ecuaciones lo realizan internamente los paquetes de geometría dinámica. En particular, GeoGebra permite mediante la opción “vista algebraica” ir viendo, paso a paso, la equivalencia entre la construcción geométrica y su almacenamiento y procesamiento interno mediante ecuaciones.



Vista algebraica típica de una construcción en GeoGebra, donde se evidencia la relación entre las figuras geométricas de la opción vista gráfica y su almacenamiento interno, empleando coordenadas para los puntos y ecuaciones para las rectas y circunferencias.

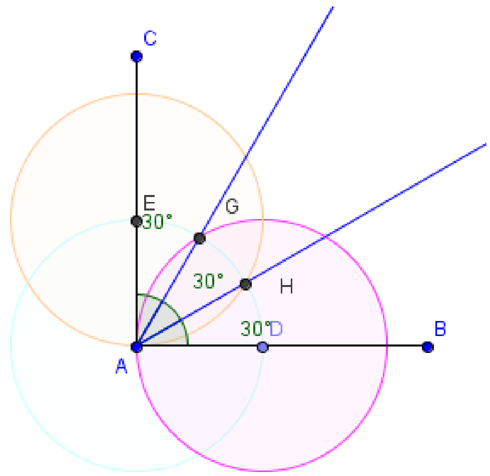
No es posible duplicar el cubo

Este problema que en su traducción algebraica equivale a determinar si es posible construir con regla y compás un segmento de longitud igual a $\sqrt[3]{2}$ tiene respuesta negativa: no es posible realizar tal construcción y por lo tanto se concluye que nunca se logrará la construcción pedida.

En general, no es posible trisecar el ángulo

La solución para este problema, a diferencia del anterior, es parcial, esto es, la construcción pedida es posible en el caso de algunos ángulos particulares, pero es posible demostrar su imposibilidad en otros, como es el caso de un ángulo de 60°.

Trisección del ángulo de 90°



No es posible cuadrar el círculo

Este problema equivale a establecer si π es un número algebraico o trascendente. La segunda posibilidad implicaría la imposibilidad de realizar la construcción pedida. En 1882, Ferdinand Lindemann demostró que en efecto, como se temía, π es trascendente y por lo tanto el problema es irresoluble.

CONCLUSIONES

Las herramientas informáticas actuales enfocadas al trabajo matemático han traído a nuestra área un elemento que antes era exclusivo de otras áreas del conocimiento: el laboratorio de experimentación. A diferencia de lo que ocurría en el pasado hoy podemos emplear efectivamente la cuadratriz de Hipias para trisecar un ángulo. Podemos con un simple movimiento de ratón modificar la configuración empleada para extraer la raíz cuadrada de 2 y emplearla para calcular las de muchos otros números. Podemos ver la idea de trisección de Arquímedes en acción.

Es probable que hayamos llegado a un momento en el que las necesidades pedagógicas y las posibilidades tecnológicas nos estén exigiendo el abandono del texto matemático clásico. Textos como el presente que son incapaces de reflejar el "dinamismo" natural del trabajo matemático probablemente estén próximos a desaparecer para dar lugar al texto interactivo en el cual las ideas matemáticas encuentren un mejor y más apropiado vehículo de transmisión y creación.

REFERENCIAS

Courant, R. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales* (Martín Manrique Mansour, Tr.). México D.F, México: Fondo de Cultura Económica (primera edición en inglés, 1941).

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Versión de Alfonso Casal, Carlos Fernández, Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan, Mariano Martínez y Juan Tarrés. Coordinación y revisión de Jesús Hernández). Madrid, España: Alianza Editorial (primera edición en inglés, 1972).

Sánchez, C.H. (1994). *Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Las raíces euclidianas de la geometría analítica cartesiana. Una perspectiva históricoepistemológica

Erdulfo Ortega
Universidad de Nariño
veortegap@hotmail.com

En el siglo XVII se inicia el período histórico de las matemáticas de las magnitudes variables y en él, el punto de viraje lo constituye la idea de variable introducida por Descartes. Durante ese siglo se fueron encajando enfáticamente los métodos matemáticos en las ciencias naturales. Descartes pensaba que las propiedades de divisibilidad y movilidad, propias de la naturaleza de la materia, las deberían reflejar las matemáticas como ciencia universal; con tal propósito eligió los segmentos como forma general de las magnitudes geométricas. Define entonces, en *La Geometría*, la estructura algebraica de los segmentos como elemento fundamental de su propuesta a partir de una reflexión en torno a la composición de los *Elementos* de Euclides.

Presentación

Cuando se hace referencia al origen de la geometría analítica, se afirma que el punto de partida lo constituyó la introducción del álgebra en la geometría; acontecimiento este que se llevó a cabo por obra de Descartes al vincular los recursos de la primera con los desarrollos de la segunda, lo cual permitió alcanzar una unidad de síntesis que favoreció el rápido advenimiento de nuevas creaciones como el cálculo infinitesimal. Para realizar esta hazaña, que significó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega, Descartes comenzó considerando la voluminosidad tridimensional como parte constitutiva de la naturaleza de la materia, cuyas propiedades más importantes son la divisibilidad y la movilidad. Planteó que las matemáticas, en su calidad de ciencia universal que involucra todo lo relacionado con el orden y la medida, además de lo numérico y de lo geométrico, debían reflejar tales propiedades; esta propuesta constituyó un paso inicial en la ruta hacia la matemática moderna que llevó a la disciplina a uno de los lugares más destacados entre todas las ciencias. La geometría analítica, en consecuencia, no es tan solo la fusión de dos ramas de las matemáticas sino que constituye el punto de unificación de esta ciencia y la consolidación de sus fundamentos en principios racionales y lógi-

Ortega, E. (2013). Las raíces euclidianas de la geometría analítica cartesiana. Una perspectiva históricoepistemológica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 117-126). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cos. Las ideas generales lograron una interpretación concreta hacia 1637 con el *Discurso del Método* del cual forma parte *La Geometría*. Llama la atención que la citada ruptura metodológica tuviera origen en la monumental obra de los *Elementos*, cuestión esta que se discutirá en el desarrollo de este escrito.

La Geometría (Descartes, 1637/1947) está constituida por tres libros. El primero lleva por título *De los problemas que pueden construirse sin emplear más que círculos y líneas rectas*. El segundo, titulado *De la naturaleza de las líneas curvas*, presenta un estudio más detallado de las curvas de diferentes órdenes, especialmente de las de grado superior, de su clasificación y de la revelación de sus propiedades; sobre todo, de la construcción y de las propiedades de tangentes y normales, líneas estas cuya importancia deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas. Descartes divide todas las curvas en dos clases, según la posibilidad de llevar a cabo su investigación con los recursos de que disponía. El tercero está dedicado a la *Construcción de problemas sólidos o más que sólidos,* lo cual lo conduce al estudio de la resolución de ecuaciones, a la discusión de sus raíces y de las relaciones entre los coeficientes. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado y presenta luego su famosa regla de los signos. Utiliza junto a los recursos algebraicos, los lugares geométricos.

En este artículo solo se tomará en consideración la temática en torno al primer libro de *La Geometría.* Se pretende mostrar cómo Descartes hizo la formulación de una perspectiva distinta para la geometría, principalmente, a partir de una nueva interpretación de la geometría euclidiana, la cual le permitió proponer una lectura algebraica de esta disciplina. Este hecho no solo tiene que ver con las reglas del método sino ante todo con una nueva lectura de la geometría de Euclides, que posibilitó el proceso de modernización en las matemáticas, fundamentado en la correspondencia entre geometría y álgebra como punto de partida hacia la matemática formal.

DE LOS PROBLEMAS QUE SE PUEDEN CONSTRUIR SIN EMPLEAR MÁS QUE CÍRCULOS Y LÍNEAS RECTAS

En este libro, Descartes inicia con la exposición de los procedimientos conocidos para resolver geométricamente las operaciones de la aritmética. En efecto, afirma que todos los problemas de geometría pueden reducirse fácilmente a tales términos (círculos y líneas rectas), que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos. Puntualiza luego:

> *Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría*. Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que pueden tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas… (Descartes, 1637/1947, p. 49)

Al darse cuenta de que la geometría euclidiana trata ante todo del estudio de las magnitudes continuas, Descartes encuentra el primer tropiezo que proviene del carácter no homogéneo de las distintas magnitudes. Este hecho se pone de manifiesto, por ejemplo, en la imposibilidad de identificar una línea con un área, o esta con un ángulo, de tal manera que las distintas operaciones se pueden realizar con algunas magnitudes continuas, pero no con otras.

Es objetivo de Descartes, como lo señala Álvarez (2000), eliminar la diferencia entre las distintas magnitudes geométricas mediante la búsqueda de una *forma única de la magnitud*. Lo logra eligiendo los segmentos como forma general de las magnitudes geométricas. Así, le fue posible definir un producto de segmentos con la propiedad de cerradura o clausura y en un sentido análogo la construcción, para las mismas, de la cuarta magnitud proporcional.

Surge entonces la estructura algebraica, definida entre segmentos, como el punto de partida para el propósito de Descartes de la construcción de los problemas geométricos. Al definir las primeras operaciones con líneas, en el primer libro, no hace referencia ni a la suma ni a la diferencia; sin embargo, cuando define la multiplicación y la división recurre a un segmento unidad (Descartes, 1637/1947).

> *La multiplicación*. Sea, por ejemplo, *AB* la unidad, y que deba multiplicarse *BD* por *BC*; no tengo más que unir los puntos *A* y *C*, luego trazar *DE* paralela a *CA*, y *BE* es el producto de esta multiplicación. (p. 50) (Figura 1)
>
> *La división de segmentos*. O bien, si debe dividirse *BE* por *BD*, habiendo unido los puntos *E* y *D*, se traza *AC* paralela a *DE* y *BC* es el resultado de esta división. (p. 50) (Figura 1)
>
> *La extracción de la raíz cuadrada*. O, si hay que extraer la raíz cuadrada de *GH*, se le agrega en línea recta *FG*, que es la unidad y dividiendo *FH* en dos partes iguales por el punto *K*, con este punto como centro se traza el círculo

FIH; luego elevando desde el punto *G* una línea recta, con ángulos rectos sobre *FH*, hasta *I*, es *GI* la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré detalladamente más adelante. (p. 51) (Figura 2)

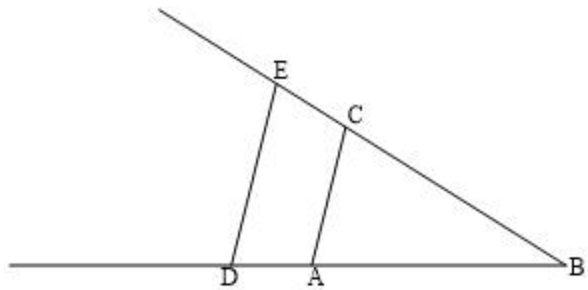


Figura 1: Multiplicación y división de segmentos

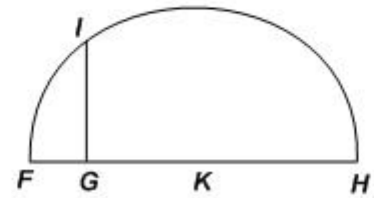


Figura 2: Extracción de la raíz cuadrada

La técnica de la propuesta de Descartes para la construcción de los problemas geométricos

El punto de partida de la propuesta de Descartes para la construcción de los problemas geométricos lo constituyó el hecho de haber dotado a los segmentos de una estructura algebraica, mediante la operación de multiplicación con la propiedad de clausura.

En cuanto a las operaciones de suma y diferencia de segmentos, Descartes no hace alusión alguna, pues la explicación está implícita en la proposición 3 del Libro I de los *Elementos.* En cambio, para definir las operaciones de multiplicación y división Descartes procede como se indica a continuación:

Dados dos segmentos a y b, para hallar *el producto* c de *la multiplicación* de a y b, utilizando el segmento *unidad* u, recurre al teorema de Tales, o a la proposición 12 del Libro VI de los *Elementos*, que permite hallar dados tres segmentos, la cuarta proporcional. Es decir, c satisface la proporción, que en términos modernos se expresa:

$$\frac{u}{a}=\frac{b}{c}, \text{ de donde } c=ba \quad \text{(ver Figura 3).}$$

En otras palabras, c es el cuarto proporcional de los segmentos u, a, b. Análogamente, se obtiene el cociente:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{u}, \text{ de donde } d = \frac{a}{b} \quad \text{(ver Figura 4).}$$

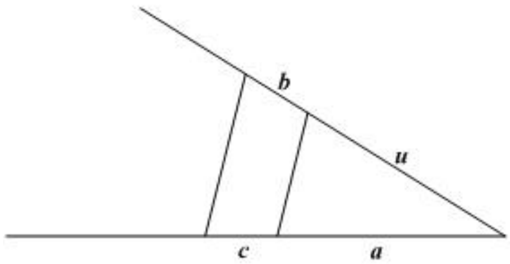


Figura 3: Multiplicación de los segmentos a y b

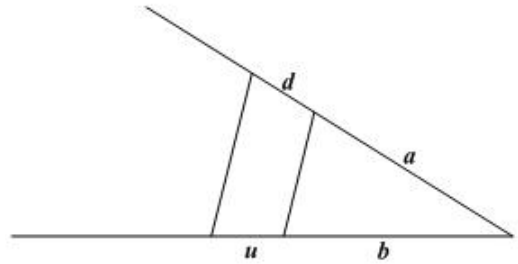
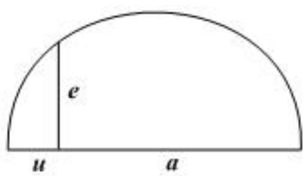


Figura 4: División de los segmentos a y b

La extracción de la raíz cuadrada del segmento *a* se encuentra por el cálculo de la media proporcional de *a* y *u*, a partir del problema 14 del Libro II y del problema 13 del Libro VI, de los *Elementos*.



$$\frac{a}{e} = \frac{e}{u}, \text{ de donde } e = \sqrt{a} \quad \text{(ver Figura 5)}$$

Figura 5: Extracción de la raíz cuadrada

Respecto a los resultados anteriores, afirma Álvarez (2000) que no pueden interpretarse simplemente en términos de conveniencia, por comodidad de las expresiones, sino que, ante todo, informan sobre una lectura nueva de *la teoría de las proporciones de Eudoxio*, que constituye el Libro V de los *Elementos*.

EL PROBLEMA DE PAPPUS

Descartes expuso detalladamente las reglas generales de la geometría analítica en la resolución de problemas difíciles. Uno de tales problemas es el clásico problema de Pappus, mediante el cual realizó la transformación algebraica de un problema geométrico.

Señalaba Pappus que Euclides ya había intentado, sin éxito, resolver el problema y en el mismo sentido se hace referencia a Apolonio. Dicho problema se planteaba así: Dadas cuatro rectas en posición, encontrar un punto desde el cual se puedan trazar rectas que formen ángulos dados con las cuatro rectas dadas y que satisfagan la condición de que el paralelogramo formado por dos de esas rectas se encuentre en una razón dada con el paralelogramo formado por las otras dos. La posición de las cuatro rectas se muestra en la Figura 6.

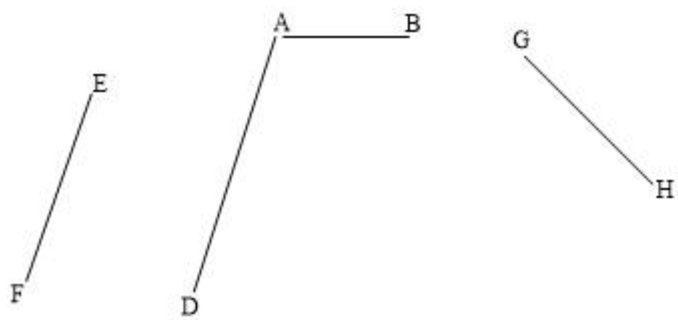


Figura 6: Las cuatro rectas en posición, en el problema de Pappus

Este problema (Figura 7), en *La Geometría*, está enunciado de la siguiente manera:

> Sean *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, etc., varias líneas dadas y debe encontrarse un punto, como C, del cual, trazando otras líneas a las dadas, como *CB*, *CD*, *CF* y *CH*, de manera que los ángulos *CBA*, *CDA*, *CFE*, *CHG*, etc., sean dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas, sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada, lo que no hace, en modo alguno, más difícil el problema. (pp. 65-66)

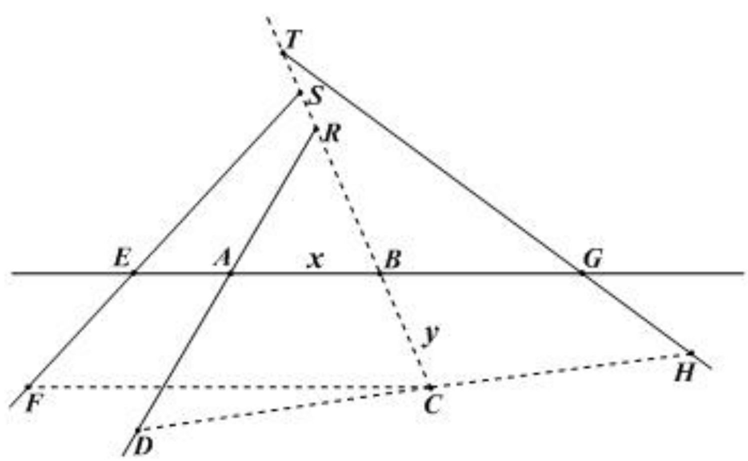


Figura 7: El problema de Pappus

Pappus afirmaba que la solución de este problema para tres o cuatro rectas, era el lugar geométrico de los puntos que forman una cónica (parábola, hipérbola o elipse). Propuso además, una generalización del mismo hasta para seis rectas, pero decía que no sería posible generalizarlo para más de seis rectas en posición, por cuanto, desde la época de Euclides, se sabía que el producto de dos rectas era una superficie y el de tres, un paralelepípedo; sin embargo, para un número mayor de rectas, Descartes expresaba:

> Si fueran más de seis rectas, ya no puede decirse que se da la relación entre un objeto comprendido por cuatro rectas y otro formado por las otras, pues no hay nada que esté formado por más de tres dimensiones. (Descartes, 1947, p. 61)

Es de destacar que en virtud de la estructura algebraica de la que están dotadas las operaciones con segmentos, la exposición del problema, hecha por Descartes, permitía incluir un número arbitrario de rectas. Este hecho implicaba trascender la concepción de dimensión que tenían los griegos.

En cuanto al proceso de resolución del problema, Descartes se apoyó en Viète, como punto de partida para su técnica algebraica. Expuso luego las reglas de formación de las ecuaciones de curvas geométricas. Así, para resolver un problema o el problema para el caso de un número cualquiera, n, de rectas, en el libro primero de *La Geometría*, señala los siguientes pasos:

1. Considerar el problema como si estuviera resuelto.

2. Designar con letras las líneas involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.

3. Encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las desconocidas.

4. Expresar de dos maneras distintas una misma relación entre las líneas, cuya igualdad constituye una ecuación.

5. Resolver la ecuación. Los requerimientos de construcción del problema están dados por la posibilidad y por las condiciones de resolución de la ecuación.

Para hallar la solución del problema, Descartes, siguiendo los cinco pasos anteriores, tomó las cuatro rectas dadas en posición *AB*, *AD*, *EF* y *GH*, y desde el punto *C*, que supuestamente satisfacía las condiciones del problema, trazó las líneas *CB*, *CH*, *CF* y que forman con las rectas dadas los ángulos dados *CBA*, *CDA*, *CFE* y *CHG* (ver Figura 7). Sin pérdida de generalidad, es posible suponer que el producto de dos de ellas es igual al producto de las otras dos:

$$CB \times CH = CD \times CF$$

De acuerdo con el segundo de los cinco pasos anteriores, Descartes designó:

$$AB = x \text{ y } BC = y$$

Como los ángulos del triángulo *ABR* son conocidos, entonces también se conoce la relación que hay entre los lados *AB* y *BR*. Luego, eligiendo (como parámetro) una cantidad *z*, se puede encontrar la magnitud *b* como la cuarta proporcional, por lo cual:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$$

Puesto que $AB = x$, pudo escribir (de acuerdo con la Figura 7):

$$BR = \frac{bx}{z} \text{ y } CR = y + \frac{bx}{z}$$

De la misma manera, procediendo con el triángulo *DRC* y utilizando el mismo parámetro *z*, obtuvo la proporción:

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}, \text{ de donde: } CD = \frac{cCR}{z}; \text{ es decir: } CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$$

Escribiendo en términos del simbolismo moderno lo expresado por Descartes, para el caso de las longitudes de los segmentos encontrados, se tiene que:

$$CH = \alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1$$
$$CD = \alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2$$
$$CF = \alpha_3 x + \beta_3 y + \delta_3$$
$$CB = y$$

Estas ecuaciones expresan las relaciones entre formas geométricas (magnitudes geométricas, longitudes de segmentos) y formas algebraicas (expresiones afines). Esta representación literal le permitió a Descartes encontrar las relaciones entre las magnitudes del problema.

CONCLUSIONES

Es importante tener en cuenta, como lo señala Álvarez (2000), que la introducción del álgebra en la geometría fue posible a partir de una revaloración del proyecto que, para la propia geometría, se encuentra plasmado en el texto de los *Elementos* de Euclides. Al hacer dicha lectura, Descartes descubrió un tratado que, por una parte, estableció el fundamento de la tradicional división entre aritmética y geometría, y, por otra, instituyó el tratamiento preciso de cada una de ellas. De la misma manera, encontró la clave que permitió percibir la relación entre estas dos disciplinas y, al mismo tiempo, tratarlas bajo una nueva visión que hizo posible su integración.

Por su parte, Malagón y Valoyes (2011) sostienen que Descartes avanzó en la consolidación de un conjunto de objetos dotados de una estructura algebraica que, en los siglos posteriores, constituirían la base sobre la cual se consolidaría el conjunto de los números reales como un conjunto numérico completo.

En este orden de ideas, se puede concluir que la relación del álgebra literal con las curvas geométricas requirió establecer previamente el isomorfismo entre el cuerpo de los números reales y el campo de los segmentos de recta, requerimiento que en esencia consistía en definir las operaciones con segmentos y principalmente la multiplicación con la propiedad de cerradura. Así mismo, el cambio de dirección en la interrelación del álgebra y la geometría y la mutua penetración metodológica con la ayuda de las coordenadas establecieron un proceso renovador en las matemáticas. En este proceso, uno de los cambios más novedosos lo constituyó el paso de la deducción entre proposiciones, propio del método euclidiano, a la solución de una ecuación, como lo proponía Descartes. Al respecto, Álvarez (2000), afirma que no sólo se trataba de un ejemplo de aplicación de las reglas del método sino del resultado de una nueva lectura de la geometría euclidiana que le permitió a Descartes iniciar, como ya se dijo, el proceso de modernización en las matemáticas.

Juzga Loi (1982/1988) que Descartes abrió las vías de la síntesis algebraica, por cuanto mediante un álgebra clarificada y perfeccionada hizo posible resolver los problemas relativos a las magnitudes y figuras siguiendo un camino seguro y regular. Agrega además, que la distinción entre la ciencia moderna y la geometría antigua está en la seguridad y el rigor del método. Afirma que Descartes puede considerarse como un precursor de Bourbaki ya que, para él, el álgebra no es una colección de resultados sino una técnica, un método de combinación y construcción. Mediante el simple funcionamiento del mecanismo algebraico, permite que surja un mundo geométrico ilimitado que la intuición directa de la figura no hubiese revelado nunca. Así mismo, al rehabilitar el cálculo, que los griegos abandonaron en beneficio de la geometría, Descartes preparó el camino a la matemática formal.

Por su parte, Campos (1997) plantea que mediante la algebrización de la geometría y al explotar la idea de traducir problemas de la misma al lenguaje algebraico, se transmutó la carencia de curvas en una incontenible exhuberancia de estas, cuyo estudio es literalmente inagotable. En síntesis, el aporte genial de Descartes, puntualiza, consistió en haberse dado cuenta de que la nueva herramienta, el álgebra de los árabes, enriquecida hasta Viète, era el método apropiado para plantear y resolver el problema de Pappus, mostrando el álgebra como instrumento de resolución de un problema propuesto en términos de geometría.

REFERENCIAS

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides. En C. Álvarez y R. Martínez (Coords.), *Descartes y la ciencia del siglo XVII*. México: Siglo XXI Editores.

Campos, A. (1997). Descartes, investigador matemático afortunado. En V.S. Albis, J. Charum, C.H. Sánchez y G. Serrano (Eds.) *Memorias del seminario en conmemoración de los 400 años del nacimiento de René Descartes* (pp. 11-24). Bogotá, Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Descartes, R. (1947). *La Geometría* (Pedro Rossell Soler, Tr.). Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe Argentina, S.A. (Primera edición en francés, 1637).

Loi, M. (1988). Rigor y ambigüedad. En R. Apéry, M. Caveing, J.-P. Desclés, J. Dieudonné, R. Fraïssé, F. de Gandt, P. Gochet, J.-M. Lévy-Loblond, M. Loi, B. Mandelbrot, J.-C. Pont y R. Thom, *Pensar la matemática* (pp. 275-291, 2ª ed.) (Carlos Bidón-Chanal, Tr.). Barcelona, España: Tusquets Editores, S.A. (Primera edición en francés, 1982).

Malagón, M. y Valoyes L. (2011). El papel de la técnica algebraica cartesiana en los procesos de objetivación de los reales. En L. Recalde y G. Arbeláez (Comps.), *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica* (pp.103-133). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

ENVOLVIENDO ESFERAS CON TIRAS DE PAPEL

Raúl Panqueva
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
raulpanqueva@yahoo.com

Una esfera se puede rodear con varias tiras de papel que se entrelazan y unen en sus extremos. Existen diferentes formas de envolver una esfera, cada una de ellas asociada a un poliedro, y la simetría de la envoltura está asociada a la simetría del poliedro. Para que la envoltura encierre por completo la esfera, las tiras se deben plegar y entrelazar de manera que se pueda crear una amplia gama de poliedros estrellados en los que las puntas de las estrellas tienen un ángulo de $180/n$, con n mayor que 2. La técnica se reconoce como una rama del origami y relaciona la geometría de los poliedros con la teoría de nudos.

PRESENTACIÓN

La idea de envolver esferas con tiras de papel se remonta a los antiguos griegos con las esferas formadas por seis y diez tiras entrelazadas, y en los años recientes han surgido avances como la explicación de Jean Pedersen (1973) de cómo elaborar los poliedros regulares con tiras de papel –especialmente el dodecaedro– los desarrollos de Strolb descritos por Versnick (2000), el artículo de Randow (2004) sobre cómo hacer poliedros con tiras entrelazadas y el artículo de Tanay (2012) donde describe cómo elaborar algunos poliedros con tiras de papel.

Por *envolver una esfera con tiras de papel* entendemos que se trata de tomar tiras de papel entrelazadas y unidas por sus extremos de manera que rodeen una esfera manteniendo la simetría de algún poliedro. En términos más rigurosos se trata de un enlace de varios nudos hechos con tiras de cinta que rodean una esfera y guardan la simetría de algún poliedro.

En esta conferencia mostraremos algunas formas de envolver una esfera con tiras de papel. La primera consiste en tomar varias tiras entrelazadas, cada una de las cuales rodea la esfera de manera ecuatorial. El caso más conocido es el del dodecaedro (ver Figura 1). Otra forma consiste en plegar las tiras con un patrón repetitivo y entrelazarlas hasta formar una amplia variedad de poliedros estrellados; las tiras en torno a la esfera pueden ir de manera ecuatorial, meri-

Panqueva, R. (2013). Envolviendo esferas con tiras de papel. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 127-133). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

dional y en otros casos son auténticos nudos que se entrelazan de manera simétrica en torno a una esfera. La técnica es reconocida como una rama del origami y con ella se obtienen poliedros de una presentación impecable, casi perfecta y sin necesidad de pegante. Algunas imágenes de poliedros así elaborados se pueden observar en la galería de fotos del sitio web:

www.flickr.com/photos/raulpanqueva.

LA BOLA GRIEGA

La bola griega, formada por seis tiras entrelazadas, tiene la simetría de un dodecaedro; la forma del trenzado de las tiras es la misma del dodecaedro y del icosaedro estrellados. En la bola de la Figura 1, las tiras tienen una longitud de 16.4 veces el ancho de la cinta. Cuando la bola se hace con tiras un poco más cortas se parece a un dodecaedro y en el caso límite se puede hacer un dodecaedro con doce huecos pentagonales.

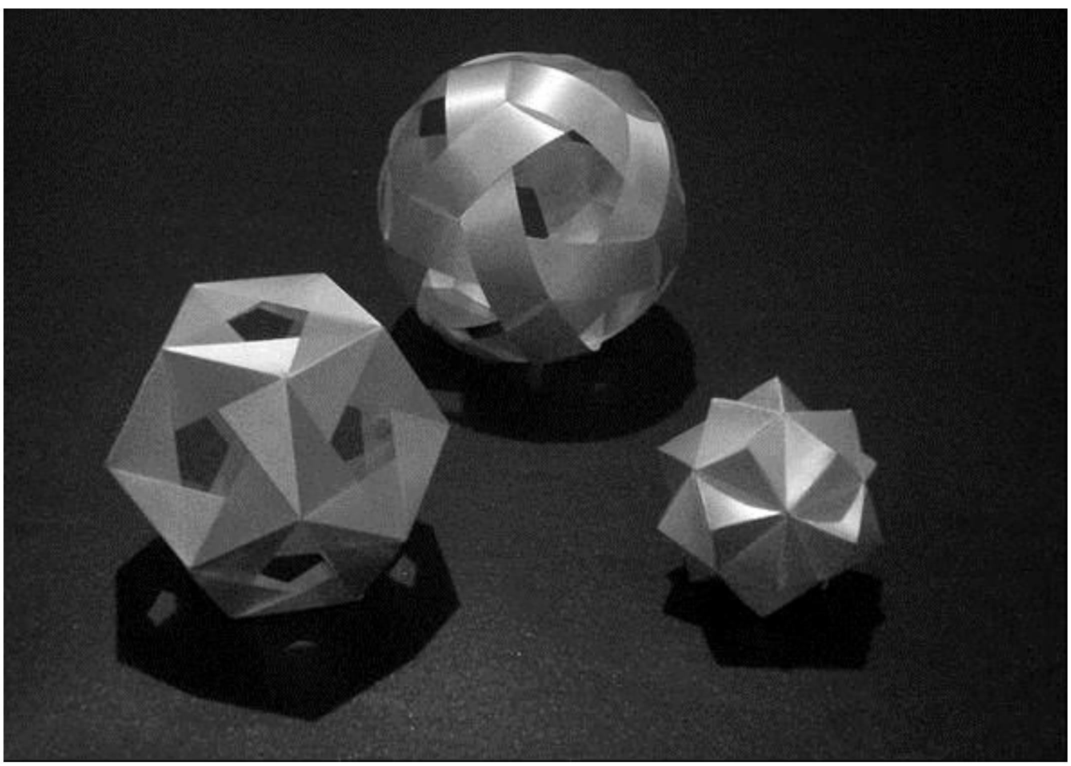


Figura 1: Tres formas topológicamente iguales de un dodecaedro

Para armar el dodecaedro primero se identifica el patrón de plegado que en este caso es un zig-zag en el que el ángulo con respecto al borde es de 36 grados (ver Ilustración 1).

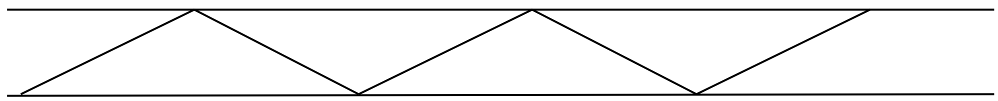


Ilustración 1: Dodecaedro 1

En el segundo dodecaedro hay doce huecos pentagonales, y la longitud de las tiras se puede reducir aún más cerrando estos huecos. En el nuevo límite se forma un dodecaedro estrellado, como el que se presenta en la Figura 1, en el que cada lado es un triángulo isósceles con un ángulo vértice de 90 grados en cada punta. El patrón de plegado está hecho por triángulos isósceles (ver Ilustración 2).

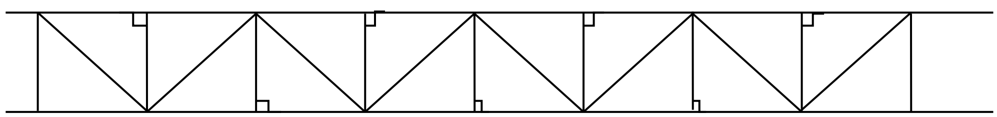


Ilustración 2: Dodecaedro 2

Para hacer el dodecaedro estrellado, cada tira debe tener como mínimo 10 picos, cada uno compuesto por dos triángulos. En la práctica, el número de picos se incrementa para que las tiras se puedan traslapar al momento de ensamblar la estrella. Los tres objetos de la Figura 1 son topológicamente iguales debido a que están hechos, cada uno, con 6 cintas enlazadas y la forma en que se entrelazan es idéntica en los tres casos.

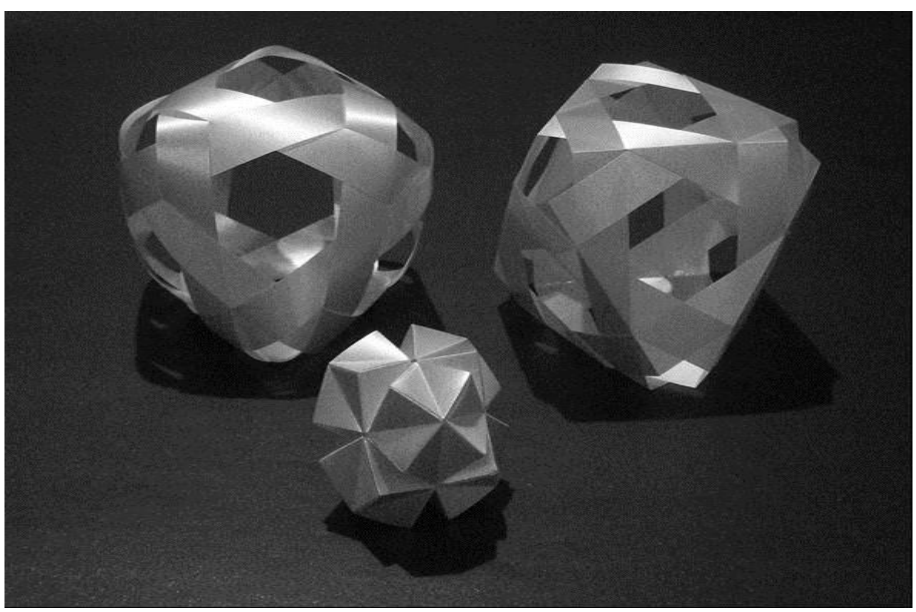


Figura 2: Tres formas topológicamente iguales de un octaedro

Con este procedimiento se puede hacer un octaedro estrellado, un cubo romo estrellado y se puede ampliar a otro tipo de poliedros como el de la Figura 2, donde un octaedro formado por seis tiras entrelazadas llega a formar un cubo doblemente estrellado, es decir que de cada cara del cubo surge la punta de una estrella y de cada nueva cara surge una nueva punta. En la Figura 2 cada una de las presentaciones del octaedro está hecha con seis tiras de papel y la forma en que se entrelazan las tiras es la misma.

OTROS POLIEDROS ESTRELLADOS QUE ENVUELVEN UNA ESFERA

En el caso del dodecaedro, por cada punta pasan tres tiras de cinta que se entrelazan y cada cara está cubierta por dos capas de papel.

El procedimiento se puede extender dividiendo el ángulo de 180 grados en 3 y el patrón de plegado queda conformado por triángulos equiláteros, y de manera intercalada en los bordes de la tira los que serán los picos de la estrella como se indica en la Ilustración 3.

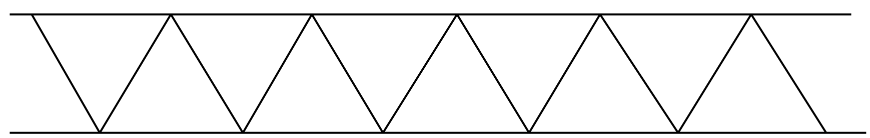


Ilustración 3: Ejemplo poliedro estrellado

Este patrón de plegado permite la elaboración de una amplia variedad de poliedros entre los que se encuentran los regulares y algunos arquimedianos. De cada cara del poliedro surge una punta en la que se entrelazan tres, cuatro o cinco tiras según el número de lados de las caras del poliedro.

Para elaborar estos poliedros, primero se estudia en cada caso cómo es que deben ir trenzadas las tiras de papel para identificar el número de tiras y la longitud de cada una. La siguiente tabla indica el material necesario para elaborar poliedros estrellados a partir de tiras plegadas con triángulos equiláteros. Para cada pico se requieren tres triángulos.

Poliedro estrellado	No. de caras	No. de tiras	No. mínimo de picos por tira
Tetraedo	4 triángulos	3	4
Cubo	4 cuadrados	6	4
Octaedro	8 triángulos	4	6

Icosaedro	20 triángulos	6	10
Dodecaedro	12 pentágonos	10	6
Cuboctaedro	6 cuadrados 8 triángulos	8	6
Rombicuboctaedro	18 cuadrados 8 triángulos	12	8
Rombicosidodecaedro	20 triángulos 30 cuadrados 12 pentágonos	24	10
Icosidodecaedro	20 triángulos 12 pentágonos	20	6
Cubo romo	6 cuadrados 32 triángulos	4	60
Dodecaedro romo	12 pentágonos 80 triángulos	6	50

Al elaborar los poliedros estrellados, la longitud de las tiras debe ser superior a la indicada para que se puedan traslapar los extremos de cada tira.

De acuerdo a su estructura y forma de elaboración estos poliedros se pueden separar en grupos. El cubo, el tetraedro y el dodecaedro estrellado corresponden respectivamente a versiones deformadas de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro.

La elaboración del octaedro y el icosaedro es particularmente difícil porque al trenzar el poliedro es necesario torcer las tiras y fácilmente se arrugan.

En el rombicuboctaedro y el rombidodecaedro, las tiras pueden rodear el poliedro de manera ecuatorial o meridional y permiten hacer el poliedro en dos colores distribuidos de manera simétrica. El rombicosidodecaedro de la Figura 3 está hecho con 24 tiras: 12 tiras verdes que recorren el poliedro de manera ecuatorial y 12 tiras rojas, cada una de las cuales gira en torno a un pentágono verde. Cada tira debe tener al menos 10 picos y en la práctica se extienden a 13 o 15 picos para permitir el traslape de los extremos y ocultarlos. La estrella está hecha sin necesidad de pegante.

El cubo romo y el dodecaedro romo son los más complicados de elaborar porque cada tira forma un nudo y es necesario emplear ocho tiras para el cubo romo y 20 en el dodecaedro romo.

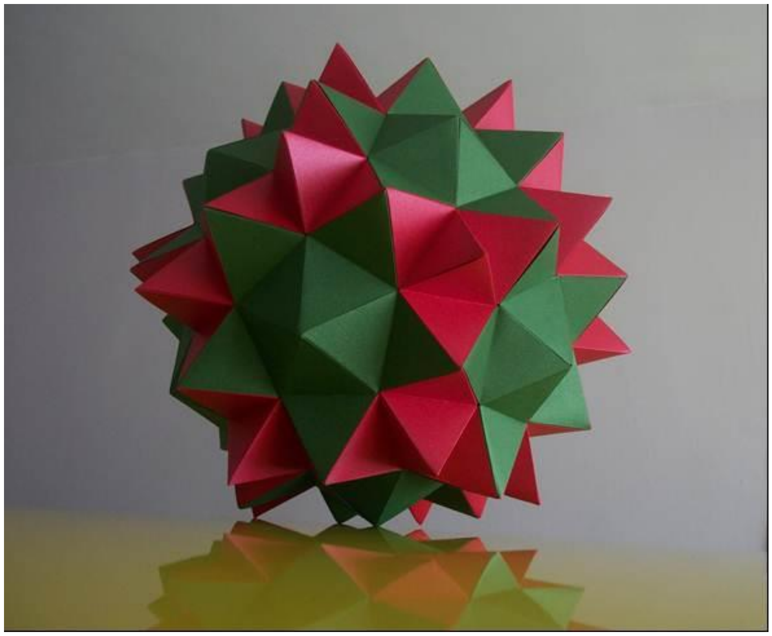


Figura 3: Rombicosidodecaedro estrellado

CONSIDERACIONES FINALES

Envolver una esfera con tiras de papel relaciona la geometría de los poliedros con la teoría de nudos. En algunos casos se trata de nudos triviales entrelazados, y en otros como el dodecaedro romo son nudos entrelazados.

La técnica descrita se puede ampliar a poliedros estrellados más agudos con ángulos de 45, 36, 30 y fracciones de 180 grados. Como técnica para elaborar estrellas, los resultados son impecables, casi perfectos, con estructuras muy estables que no requieren de pegante, lo que los hace muy atractivos en el origami, donde aún somos pocos los que nos ocupamos del arte de hacer poliedros con tiras de papel.

REFERENCIAS

Pedersen, J. (1973). Plaited Platonic puzzles. *The Two-Years College Mathematics Journal, 4*(3), 22-37, F 73.

Randow, R. (2004). Plaited polyhedra. *The Mathematical Intelligencer*, *26*(3), 54-68.

Tarnai. T., Kovács, F., Fowler, P.W. y Guest, S.D. (2012). Wrapping the cube and other polyhedra. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences,* 468(2145), 2652-2666.

Versnick, P. (2000). *The knotology of Heins Strolb*. Recuperado en http://orihouse.com/knotology.html

LA CADENA FRACTAL DE FIBONACCI Y ALGUNAS GENERALIZACIONES

José L. Ramírez[1] y Gustavo N. Rubiano[2]
[1] *Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones, Universidad Sergio Arboleda,*
[2] *Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia*
josel.ramirez@ima.usergioarboleda.edu.co, gnrubianoo@unal.edu.co

El objetivo de la charla es introducir la cadena de Fibonacci y mostrar sus propiedades geométricas y combinatorias. Esta cadena o palabra se puede generar a partir de la iteración de un homomorfismo entre lenguajes, además, se le puede asociar una curva a partir de unas reglas de dibujo análogas a las utilizadas en los L-sistemas, dicha curva lleva el nombre de curva fractal de Fibonacci. Asimismo, se presentará una familia de cadenas infinitas que generalizan la cadena de Fibonacci y su curva fractal. Finalmente, se asociará una familia de poliminós a estas cadenas, los cuales resultan ser poliminós cuadrados dobles, y se obtendrán algunos tapetes geométricos, los cuales están programados con el software *Mathematica*®.

INTRODUCCIÓN

La cadena infinita de Fibonacci, $\boldsymbol{f}$=0100101001001010010100100101…, es sin duda una de las más estudiadas en la combinatoria sobre cadenas (Mignosi y Pirillo, 1992; Chuan, 1992, 1995; Cassaigne, 2008), en particular es una cadena de Sturm (Lothaire, 2002).

Entre muchas de sus propiedades, a esta cadena se le puede asociar una curva que tiene propiedades fractales, las cuales en su mayoría se obtienen a partir de las propiedades combinatorias de $\boldsymbol{f}$ (Monnerot, 2009; Blondin-Massé, Brlek, Garon y Labbé, 2011).

Asimismo, a esta cadena se le puede asociar una familia de poliminós que teselan el plano, en particular son poliminós cuadrados dobles, estos se denominan copos de nieve de Fibonacci (Blondin-Massé, Brlek, Labbé y Mendès France, 2011).

En esta charla presentaremos algunas formas para generar la cadena de Fibonacci, de manera recursiva, por homomorfismos entre lenguajes, por discreti-

Ramírez, J.L. y Rubiano, G.N. (2013). La cadena fractal de Fibonacci y algunas generalizaciones. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 135-143). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

zación de una recta y de manera aritmética (cadenas características o de Sturm), y mostraremos algunas de sus propiedades geométricas y combinatorias. Estas propiedades son ejemplos sencillos del tipo de cosas que se estudian en la combinatoria sobre cadenas, rama reciente de las matemáticas discretas, que estudia las cadenas finitas e infinitas de símbolos y tiene aplicaciones en la teoría de autómatas y lenguajes formales, en la teoría de números, entre otras. Asimismo se recopilan algunas propiedades gráficas de la curva fractal asociada a esta cadena de símbolos, la cual se puede generar a partir de unas reglas de dibujo análogas a las utilizadas en los L-Sistemas (Orjuela, Rojas, Páez y Ramírez, 2011).

También introducimos una familia de cadenas que generalizan la cadena de Fibonacci. A partir de esta familia construimos una familia de curvas que tienen como atractor la curva fractal de Fibonacci y tienen la misma dimensión fractal.

Por último, construimos una familia de poliminós que generalizan el copo de nieve de Fibonacci y estudiamos algunas de sus propiedades geométricas, como el perímetro y el área; tal familia está relacionada con una familia de números que generaliza los números de Pell. Estos poliminós son poliminós cuadrados dobles.

LA CADENA DE FIBONACCI

Las cadenas o palabras son una sucesión finita de símbolos $a_1a_2,\ldots a_n$, tomadas de un conjunto finito no vacío Σ llamado alfabeto. Definimos Σ^* como el conjunto de todas las cadenas sobre un alfabeto Σ, incluyendo la cadena vacía. La longitud $|u|$ de una cadena $u \in \Sigma^*$ se define como el número de símbolos de u, incluyendo símbolos repetidos. Por $|u|_a$ representamos la cantidad de veces que aparece el símbolo a en la cadena u. Por ejemplo la cadena *abbebbaabb* tiene longitud 10 y está formado por los símbolos a, b y e.

Una cadena infinita $u=a_1a_2a_3\ldots$ es una sucesión infinita de símbolos, por ejemplo la cadena $p=(p_n)_{n\geq 0}=0110101000101\ldots$ es una cadena infinita, donde $p_n=1$ si n es un número primo y $p_n=0$ en caso contrario.

Sean Σ y Δ dos alfabetos. Un homomorfismo es una función $h:\Sigma^* \to \Delta^*$ tal que $h(xy)=h(x)h(y)$ para todo x, y en Σ^*.

La cadena n-ésima de Fibonacci, f_n, se define recursivamente por f_0=1, f_1=0 y $f_n=f_{n-1}f_{n-2}$ para todo n>1. Definimos la cadena infinita de Fibonacci $\boldsymbol{f}$ como

$\boldsymbol{f} = \lim_{n\to\infty} f_n$=010010100100…

Definimos el homomorfismo μ de Fibonacci como μ(0)=01 y μ(1)=0.

La siguiente propiedad permite generar la cadena de Fibonacci a partir de la iteración del homomorfismo μ. Esta relación es clave para su implementación gráfica con software matemático.

La cadena de Fibonacci satisface que: $\lim_{n\to\infty} \mu^n(1)=\boldsymbol{f}$.

La relación entre la cadena de Fibonacci y los números de Fibonacci F_n, los cuales se definen recursivamente como $F_0 =1=F_1$ y $F_n=F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$, es que la cantidad de símbolos en f_n, es el n-ésimo número de Fibonacci F_n.

Algunas propiedades combinatorias de la cadena de Fibonacci, son las siguientes:

- Las cadenas 11 y 000 no son subcadenas de la cadena de Fibonacci.
- Si ab es un sufijo de la cadena de Fibonacci n-ésima, entonces ab=01 si n es par y ab = 10 si n es impar.
- $f_{n-1}f_{n-2}$ y $f_{n-2}f_{n-1}$ tienen un prefijo común de longitud F_n-2 para todo $n \geq 3$.
- f_n es palíndromo salvo por los dos últimos símbolos.
- Para toda cadena finita f_n se tiene que $f_n = f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}l_{n-3}l_{n-3}$.

Estos dos últimos resultados son importantes ya que permiten descomponer la cadena de Fibonacci en términos de cadenas de Fibonacci de longitud menor, lo cual implica que la curva fractal de Fibonacci tiene características de autosemejanza.

Representación gráfica (Lenguaje LOGO)

Existe una interpretación gráfica de las cadenas de símbolos basada en lenguaje LOGO o Lenguaje de la Tortuga. Para convertir una cadena de símbolos en una curva, hay que recorrerla de una manera particular. Para ello a cada uno de los símbolos de la cadena se le asigna un ordenque será interpretado por una “tortuga” hipotética, la cual irá recorriendo el plano de un lado a otro, realizando una determinada acción que dependerá del símbolo que lea. Una vez que la tortuga ha recorrido toda la cadena, la imagen fractal quedará definida.

La presente regla de dibujo par-impar fue introducida por Monnerot (2009) y permite generar la cadena fractal de Fibonacci, ver el siguiente cuadro.

Símbolo	**Función**
1	Da un paso hacia adelante dibujando una línea de longitud *d*.
0	Da un paso hacia delante y si el 0 está en una posición impar entonces gira a la derecha 90°, y si está en una posición par gira 90° a la izquierda.

La gráfica *n*-ésima de Fibonacci, denotada por $\mathcal{F}_n$, se obtiene al aplicar la regla de dibujo par-impar a la cadena *n*-ésima de Fibonacci. La curva fractal $\mathcal{F}$ de Fibonacci se define como

$$\mathcal{F} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n$$

En la Figura 1 se muestra la gráfica de $\mathcal{F}_{10}$, generada con el software *Mathematica*® (Ramírez y Rubiano, 2012).

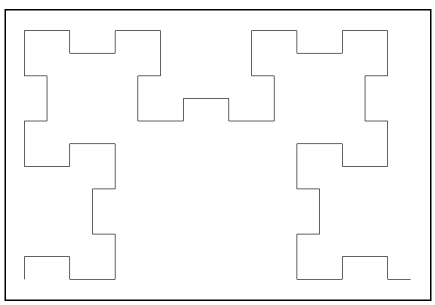


Figura 1: Gráfica de $\mathcal{F}_{10}$

Algunas de las propiedades de la curva de Fiboancci, relacionadas estrechamente con la cadena de Fibonacci, son:

- La curva fractal de Fibonacci está compuesta únicamente por segmentos de longitud 1 o 2.
- El número de giros en la gráfica *n*-ésima de Fibonacci es el número de Fibonacci F_n-1. En la figura anterior se verifica que el número de giros es F_9=55 (número de esquinas).

- La curva $\mathcal{F}_n$ es similar a la curva $\mathcal{F}_{n-3}$ (autosimilaridad). Esta propiedad permite clasificar las curvas de Fibonacci en tres clases según la relación de equivalencia módulo 3, i.e., si n es de la forma $3k$, $3k+1$ o $3k+2$.
- La curva $\mathcal{F}_n$ es simétrica (ver Figura 2).

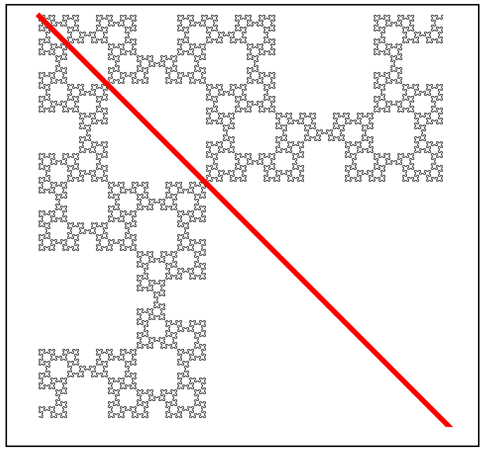


Figura 2: Simetría Curva $\mathcal{F}_n$

UNA GENERALIZACIÓN DE LA CADENA DE FIBONACCI

El objetivo de esta sección es hacer una generalización de la cadena de Fibonacci y por ende de la curva fractal de Fibonacci, y mostrar que sus propiedades se mantienen.

La cadena (n,i)-ésima de Fibonacci, $f_n^{[i]}$ se define recursivamente por $f_0^{[i]}=0$, $f_1^{[i]}=0^{i-1}1$ y $f_n^{[i]}=f_{n-1}^{[i]}f_{n-2}^{[i]}$ para todo $n\geq 2$ y $i\geq 1$. Definimos la cadena infinita de Fibonacci $\boldsymbol{f}^{[i]}$ como

$$\boldsymbol{f}^{[i]} = \lim_{n\to\infty} f_n^{[i]}$$

Las primeras cadenas de Fibonacci $\boldsymbol{f}^{[i]}$ aparecen en el siguiente cuadro:

$\boldsymbol{f}^{[1]} = 10110101101\ldots$	$\boldsymbol{f}^{[2]} = 01001010010\ldots$	$\boldsymbol{f}^{[3]} = 00100010010\ldots$
$\boldsymbol{f}^{[4]} = 00010000100\ldots$	$\boldsymbol{f}^{[5]} = 00001000001\ldots$	$\boldsymbol{f}^{[6]} = 00000100000\ldots$

Para algunas propiedades sobre estas cadenas ver Ramírez, Rubiano y de Castro (2013).

La gráfica (n,i)-ésima de Fibonacci, denotada por $\mathcal{F}_n{}^{[i]}$, se obtiene al aplicar la regla de dibujo par-impar a la cadena $f_n{}^{[i]}$. La Curva Fractal $\mathcal{F}^{[i]}$ de Fibonacci se define como

$$\mathcal{F}^{[i]} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n{}^{[i]}$$

Las propiedades de esta curva se pueden ver en (Ramírez, Rubiano y de Castro, 2013).

COPO DE NIEVE ASOCIADO A LA CADENA DE FIBONACCI $\boldsymbol{f}^{[i]}$

Recientemente la combinatoria sobre cadenas se ha utilizado en problemas de teselados en el plano con poliminós (ver, e.g., Beauquier y Nivat, 1991; Brlek, Fédou y Provençal, 2009; Blondin-Massé, Brlek, Garon y Labbé, 2011, 2012). Un poliminó es la unión finita de cuadrados unidades sobre el plano reticular, tal que su frontera es una trayectoria simple cerrada, sin huecos y tal que su frontera no se corta. Cada poliminó es codificado por una cadena sobre el alfabeto $F=\{0,1,2,3\}$ los cuales representan los pasos $\{\rightarrow,\uparrow,\leftarrow,\downarrow\}$ sobre el plano reticular.

En la Figura 3 se muestra un poliminó, tal que partiendo en S (en sentido antihorario) su frontera $b(\boldsymbol{P})$, la palabra $w=2122323030103011$ la codifica. Además, denotaremos por $\widehat{w}$ la trayectoria recorrida en dirección opuesta. En este ejemplo $\widehat{w}$ =3321232121010030.

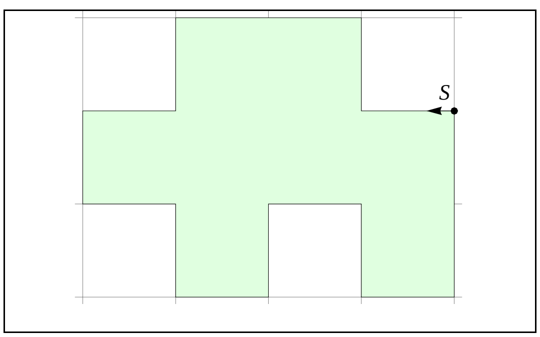


Figura 3: Poliminó

El problema de decidir si un poliminó dado tesela el plano por medio de traslaciones, lo estudió Wijshoff y van Leeuwen (1984), quienes acuñaron el término *poliminó exacto*. Beaquier y Nivat (1991) demostraron que la frontera $b(P)$ de un poliminó exacto P satisface la siguiente factorización $b(P) = A \cdot B \cdot C \cdot \hat{A} \cdot \hat{B} \cdot \hat{C}$ donde a lo más una variable es vacía.

El caso particular cuando una de las variables es vacía decimos que P es un polimino cuadrado. En Blondin, Brlek y Labbé (2012) se demostró que un poliminó cuadrado puede tener a lo más dos factorizaciones diferentes. En el caso que tengan exactamente dos factorizaciones se llama *poliminó cuadrado doble*. En Blondin-Massé, Brlek, Garon y Labbé (2011), los autores construyeron dos familias de poliminós cuadrados dobles, llamados los poliminós de Christoffel y los de Fibonacci, sin embargo, existen poliminós que no pertenecen a ninguna de estas familias.

Construcción poliminós generalizados de Fibonacci

A partir de $\boldsymbol{f}^{[i]}$ es posible derivar una trayectoria sobre F la cual tiene propiedades interesantes. La construcción es como sigue. Primero se reescribe la palabra sobre el alfabeto $\{0,2\} \subseteq F$. Específicamente aplicamos el morfismo $0 \to 2, 1 \to 0$. Luego aplicamos el operador Σ_1 seguido por el operador Σ_0, donde

$$\Sigma_\alpha(w) = (\alpha \cdot (\alpha + w_1) \cdot (\alpha + w_1 + w_2) \ldots (\alpha + w_1 + w_2 \cdots + w_n))$$

con $\alpha \in F$ y $w = w_1 w_2 \cdots w_n$. Entonces se obtiene la cadena $\boldsymbol{p}^{[i]} = \Sigma_0 \Sigma_1(\boldsymbol{f}^{[i]})$.

Definimos la sucesión $\{q_n^{[i]}\}_{n>0}$ como:

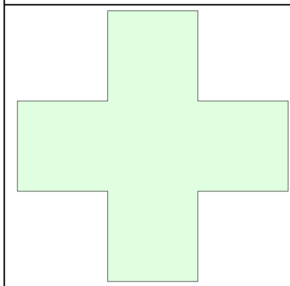
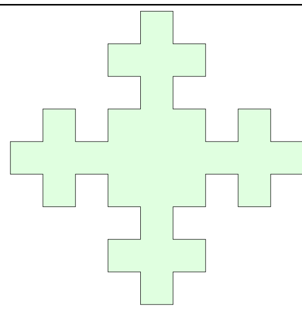
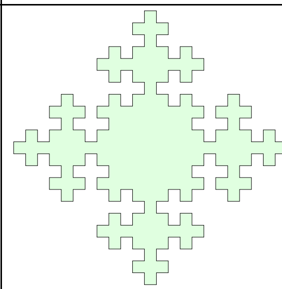
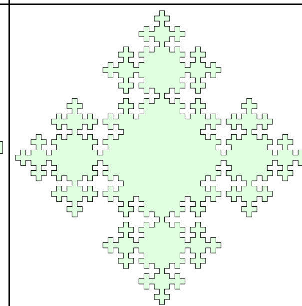
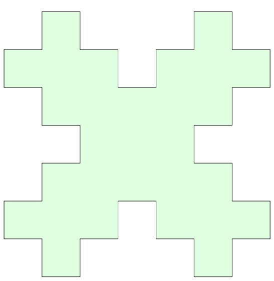
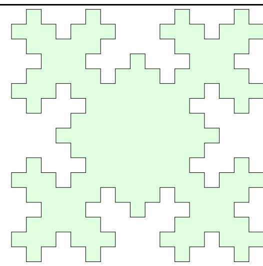
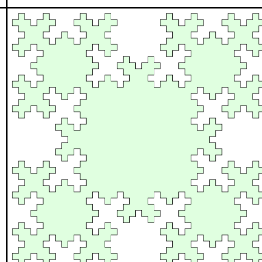
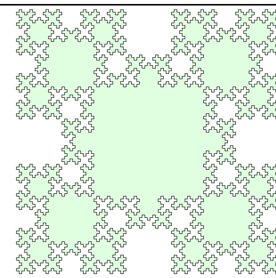
Si i es par: $q_0^{[i]} = \lambda$, $q_1^{[i]} = 1$, $q_2^{[i]} = (13)^{i/2}$ y $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} q_{n-2}^{[i]}$ si $n \cong 1 \, mod \, 3$ o $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} \overline{q_{n-2}^{[i]}}$ si $n \cong 0, 2 \, mod \, 3$.

Si i es impar: $q_0^{[i]} = \lambda$, $q_1^{[i]} = 1$, $q_2^{[i]} = (13)^{i-1/2} 1$ y $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} q_{n-2}^{[i]}$ si $n \cong 0 \, mod \, 3$ o $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} \overline{q_{n-2}^{[i]}}$ si $n \cong 1, 2 \, mod \, 3$.

Tenemos la siguiente propiedad: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in F$entonces

- La trayectoria $\Sigma_\alpha q_n^{[i]}$ es simple.
- Si i es par, entonces la trayectoria $\Sigma_\alpha (q_{3n}^{[i]})^4$ es una cadena acotada por un poliminó.
- Si i es impar, entonces la trayectoria $\Sigma_\alpha (q_{3n+2}^{[i]})^4$ es una cadena acotada por un poliminó.

Otras propiedades de estas cadenas se pueden encontrar en Ramírez, Rubiano y de Castro (2013). A estos últimos poliminós los denotaremos por $\prod_n^{[i]}$ y los llamaremos copos de nieve generalizados de Fibonacci. A continuación se presentan algunas gráficas de los poliminós $\prod_n^{[i]}$ para i=2 3.

$\prod_1^{[2]}$	$\prod_2^{[2]}$	$\prod_3^{[2]}$	$\prod_4^{[2]}$
			
$\prod_1^{[3]}$	$\prod_2^{[3]}$	$\prod_3^{[3]}$	$\prod_4^{[3]}$
			

Estos poliminós son cuadrados dobles. Algunas propiedades geométricas se pueden encontrar en Ramírez, Rubiano y de Castro (2013).

REFERENCIAS

Beauquier, D. y Nivat, M. (1991). On translating one polyomino to tile the plane. *Discrete & Computational Geometry*, *6*(1), 575-592.

Blondin-Massé, A., Brlek, S., Garon, A. y Labbé, S. (2011). Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways. *Theoretical Computer Scienc*e, *412*(36), 4778-4786.

Blondin-Massé, A., Brlek, S. y Labbé, S. (2012). A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways. *Discrete Applied Mathematics*, *160*(7-8), 1011-1018.

Blondin-Massé, A., Brlek, S., Labbé, S. y Mendès France, M. (2011). Fibonacci snowflakes (Número especial dedicado a Paulo Ribenboim). *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, *35*(2), 141-152.

Brlek, S., Fédou, J. y Provençal, X. (2009). On the tiling by translation problem. *Discrete Applied Mathematics*, *157*(3), 464-475.

Cassaigne, J. (2008). On extremal properties of the Fibonacci word. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, *42*(4),701-715.

Chuan, W. (1992). Fibonacci words. *Fibonacci Quarterly*, *30*(1), 68-76.

Chuan, W. (1995). Generating Fibonacci words. *Fibonacci Quarterly*, *33*(2), 104-112.

Lothaire, M. (2002). Algebraic combinatorics on words. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge, EUA: Cambridge University Press..

Mignosi, F. y Pirillo, G. (1992). Repetitions in the Fibonacci infinite word. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, *26*(3), 199-204.

Monnerot, A. (2009). *The Fibonacci word fractal*. Recuperado de http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/79/72/PDF/The_Fibonacci_word_fractal.pdf

Orjuela, C., Rojas, C., Páez, J. y Ramírez, J. (2011). Reglas y símbolos con l-sistemas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 385-395). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Ramírez, J. y Rubiano, G. (2012). Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes [con Mathematica]. *Revista Integración*, *30*(2), 129-150.

Ramírez, J., Rubiano, G. y de Castro, K. (2013). *A generalization of the Fibonacci word fractal and the Fibonacci snowflake*. Recuperado de http://arxiv.org/pdf/1212.1368v2.pdf

Wijshoff, H.A.G. y van Leeuwen, J. (1984). Arbitrary versus periodic storage schemes and tesselations of the plane using one type of polyomino. *Information and Control*, 62, 1-25.

Cursillos

GEOGEBRA EN LAS CLASES DE GEOMETRÍA DE LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA

Adolfo Galindo y Carlos Mirquez
Institución Educativa Carlos Lleras Restrepo (Ibagué), Universidad del Tolima, Grupo Pedagógico Cambiemos
adolfogalindob@yahoo.com, Karmir789@gmail.com

Se presenta un conjunto representativo de aplicaciones de GeoGebra para la clase de geometría, tomadas del curso GeoGebra Básico diseñado por el Grupo Pedagógico Cambiemos para la formación de docentes de matemáticas de la ciudad de Ibagué. Los asistentes al cursillo, a medida que realicen las construcciones correspondientes a cada actividad, identificarán las competencias matemáticas presentes y construirán las hojas de trabajo para los estudiantes. Reviste especial importancia la presencia de ejemplos que promoverán la exploración y la capacidad para proponer y verificar conjeturas por parte de los estudiantes.

OBJETIVOS DEL CURSILLO

1. Capacitar a los docentes en los aspectos técnicos de GeoGebra, de tal manera que puedan crear construcciones dinámicas sencillas para utilizarlas como formas de representación o verificación, reconstruir e interpretar otras ya realizadas e incorporarlas a su trabajo de aula para optimizar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

2. Diseñar y utilizar hojas de trabajo para los estudiantes y analizar las formas y momentos en los cuales es conveniente apoyar la construcción del conocimiento con GeoGebra.

3. Capacitar a los docentes en los procesos de interacción con la comunidad GeoGebra virtual para optimizar los procesos de búsqueda, exploración, participación y publicación de información con miras a desarrollar en forma progresiva su capacidad de autoformación en este campo.

METODOLOGÍA

Tomando como punto de partida experiencias anteriores (Moreno, 2002), se opta por la presentación de situaciones problemáticas relacionadas directa-

Galindo, A. y Mirquez, C. (2013). GeoGebra en las clases de geometría de la educación básica y media. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 147-150). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

mente con el trabajo del docente en el aula de clase; se pretende de esta manera que además de conocer la herramienta, el profesor vea su aplicación en un tema específico del currículo lo cual permitirá que dos reflexiones vayan juntas: el conocimiento de la herramienta y su función pedagógica.

TEMAS PARA TRATAR

- puntos, rectas, segmentos y ángulos;
- figuras planas, perímetros y áreas;
- transformaciones en el plano;
- verificación de algunos teoremas fundamentales;
- probabilidad geométrica, generación de puntos y segmentos aleatorios, ley de los grandes números;
- creación de nuevas herramientas, manejo del protocolo de construcción y GeoGebraTube.

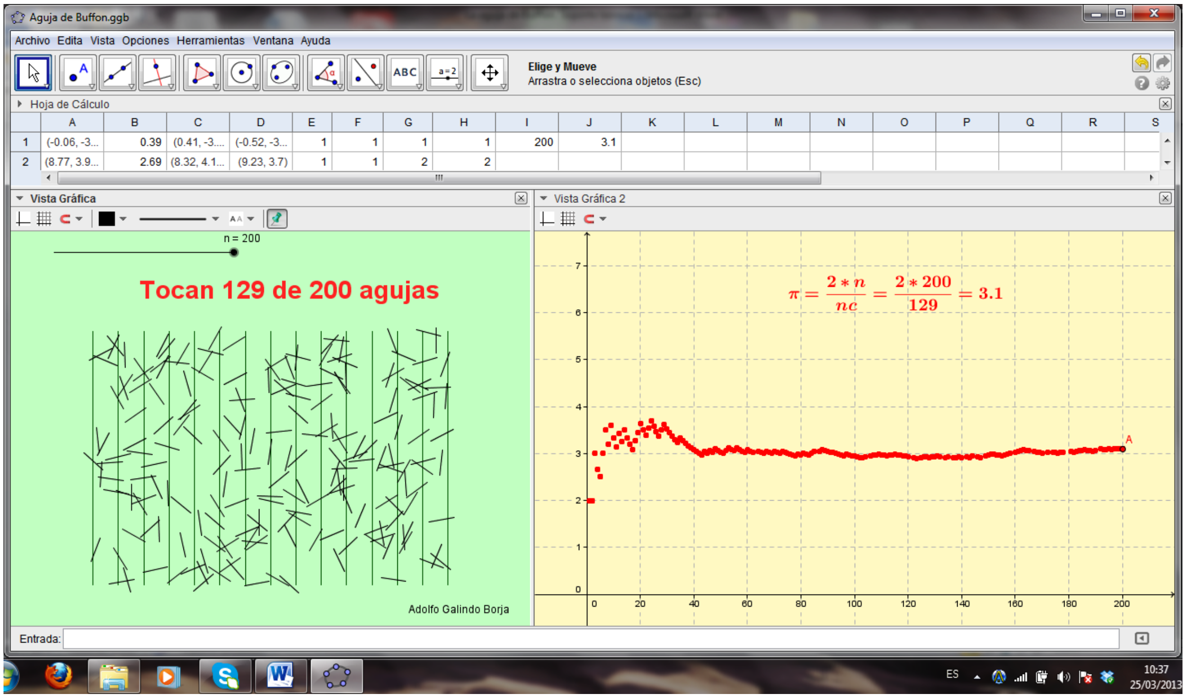
RECURSOS NECESARIOS PARA EL DESARROLLO DEL CURSILLO

Sala de informática con software GeoGebra 4.0. Máximo dos asistentes por computador. Acceso a Internet. VideoBeam.

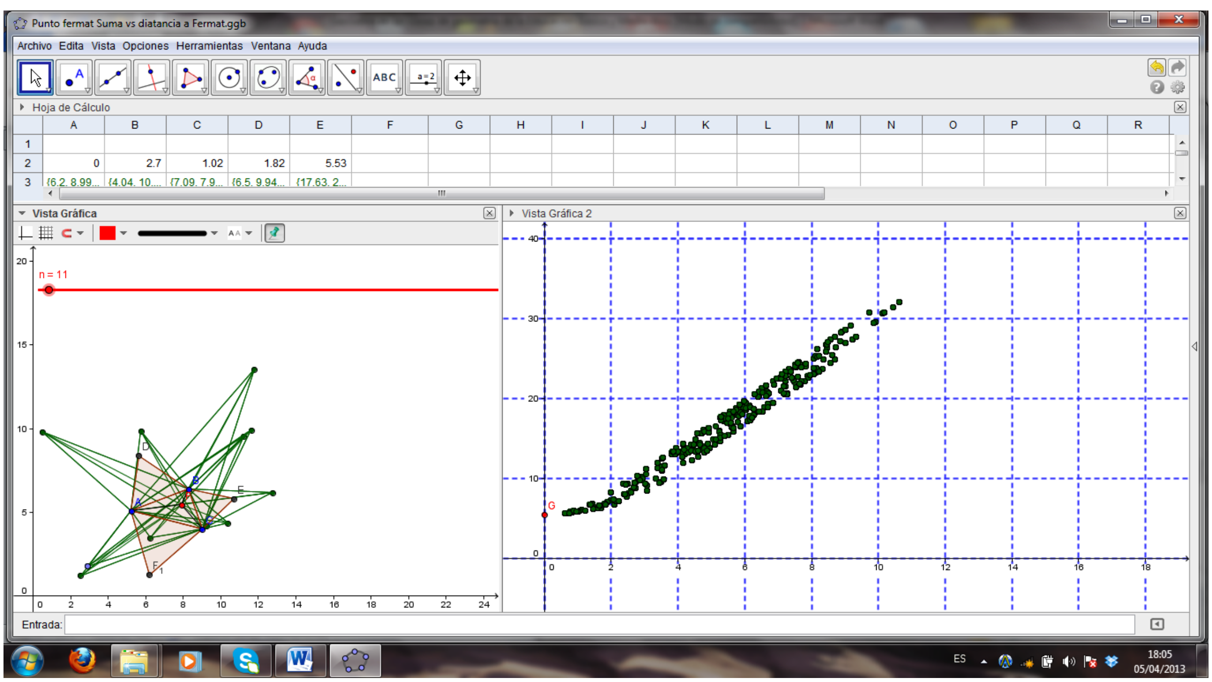
EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Al abordar la enseñanza de la aleatoriedad y la probabilidad en la educación básica y media se ha puesto énfasis especial en el enfoque clásico de probabilidad y en la formulación teórica de las leyes correspondientes. GeoGebra nos permite: simular situaciones en las cuales se generan elementos geométricos como por ejemplo puntos y segmentos; calcular dinámicamente, con ayuda de la hoja de cálculo del programa, las frecuencias relativas para gran número de repeticiones; y observar tendencias para tomarlas como probabilidad. En el cursillo se realizarán construcciones para calcular la probabilidad en el tiro al blanco y la aguja de Buffon. Es posible, además, realizar verificaciones de teoremas que se refieren a puntos y segmentos como por ejemplo el Teorema de Fermat. En seguida, a manera de ejemplo, se muestran imágenes de algunas construcciones que harán parte del desarrollo del curso:

A partir de la probabilidad en el problema de la aguja de Buffon calcular valores aproximados para el número π:



Verificar que la suma de las distancias desde el punto de Fermat a los vértices del triángulo es mínima:



REFERENCIA

Moreno, L. (2002). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional "Formación de docentes sobre el uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas"* (pp. 87-92). Bogotá, Colombia: MEN. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-81040_archivo.pdf

USO DE CABRI 3D PARA DETERMINAR REGIONES PLANAS POR CORTES CON HEXAEDROS

José C. P. Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – UNIFRA
LEIVASJC@UNIFRA.BR

El taller que proponemos tiene como objetivo explorar cortes realizados con planos en poliedros. En particular, en cubos o hexaedros a través de las actividades de resolución de problemas atentamente preparados para el cursillo. Vamos a utilizar las herramientas disponibles en Cabri 3D para llevar a cabo las actividades que se realizan en el laboratorio de computadoras con el software instalado. Esperamos que la geometría dinámica Cabri 3D sea un facilitador para desarrollar habilidad de visualización en la reconstrucción de conceptos de geometría del espacio y la clasificación de triángulos.

GEOMETRÍA Y TECNOLOGÍAS INFORMÁTICAS

La geometría dinámica ha sido una aliada en la búsqueda de solución para sanar o aliviar las dificultades presentadas por los estudiantes del Brasil, y los de otros países, en el aprendizaje de la geometría. El software libre GeoGebra y softwares comerciales como Cabri han hecho contribuciones importantes a la enseñanza y el aprendizaje. Cabri fue pionero en el esfuerzo de generar nuevas situaciones de aprendizaje tanto para la geometría plana como para la geometría del espacio.

Tuvimos un primer contacto con la versión Cabri 3D en el Congreso IberoCabri realizado en 2010 en México. De inmediato, vimos cuánto contribuiría a nuestra práctica educativa. Hemos realizado investigaciones con profesores-estudiantes de posgrado de quienes hemos sido profesores de geometría, contexto en el que hemos corroborado nuestras afirmaciones. Tales investigaciones se han documentado en Leivas (2010, 2011, 2012a, 2012b, 2012c, 2012d).

En nuestras investigaciones nos dimos cuenta de que una de las ventajas del uso de Cabri 3D es la dinámica que proporciona el software en el desarrollo de la capacidad de visualización, tema que aún no es común en el plan de estudios, sobre todo en los de la formación de profesores de matemáticas. Comprendemos la visualización como un proceso que va mucho más allá de la ca-

Leivas, J.C.P. (2013). Uso de Cabri 3D para determinar regiones planas por cortes con hexaedros. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 151-154). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

pacidad de percibir con la visión. Más allá, está la capacidad de formar imágenes mentales con el objetivo de resolver problemas y comunicar adquisiciones de conocimientos. Por lo tanto, la visualización es una habilidad que permite la formación de pensamiento geométrico.

Gutiérrez (2011) dice: "[E]xiste un acuerdo generalizado entre didactas de las matemáticas y profesores de matemáticas en que la enseñanza de la geometría debe basarse en metodologías que faciliten la actividad de exploración y descubrimiento de parte de los estudiantes" (p. 3). Una de las metodologías que el autor identifica, la constituyen los talleres que utilizan software de geometría dinámica, pues pueden ayudar a desarrollar las habilidades en geometría del espacio en la búsqueda de aprendizaje de conceptos y propiedades de geometría. Esto por sí solo justifica nuestro taller propuesto para este Encuentro. Proponemos un taller a los participantes con el fin de explorar los conceptos y construcciones asociados al siguiente problema:

> Obtener las regiones poligonales en un cubo cuando lo corta un plano.

Es posible que en la misma resolución, los participantes reconstruyan conceptos de geometría plana como polígono y región poligonal.

En el documento *Parâmetros Curriculares Nacionais* (MEC/SEF, 1977) se afirma que "la actividad matemática escolar que le servirá al estudiante para entender y transformar su realidad no consiste en 'ver las cosas prefabricadas y definitivas' sino en construir el conocimiento y apropiarse del mismo" (p. 19). Tal es nuestra concepción que subyace a la planificación de este taller.

La actividad del taller

Se pretende propiciar el reconocimiento de las herramientas disponibles en Cabri 3D para que se familiaricen con representaciones de puntos en el plano y en el espacio, de manera que puedan realizar construcciones espaciales y desarrollar visualización espacial. Vamos a distinguir la construcción de sólidos utilizando los conceptos correspondientes y también vamos a usar las herramientas existentes en el software.

Actividad 1

> Dada una región del plano, una dirección perpendicular al mismo y un vector, se denomina *prisma* al conjunto de todos los segmentos que tienen la dirección

dada y cuyas longitudes corresponden al módulo del vector dado. Se llama *superficie del prisma* a la frontera de la región prismática, es decir, sus caras.

Construir un prisma recto con el objetivo de explorar la dinámica del software mediante la ampliación de las dimensiones de la base y la altura del sólido construido. Proponer la obtención de varias posiciones del prisma en el espacio, moviendo el plano para lograr la mejor visualización para cada persona. Siga los pasos:

1. Construya un prisma de base cuadrada.

2. Construya un prisma de base cuadrada con un movimiento.

3. Desarrolle el prisma en un plano.

4. Repita la actividad para prismas con otras bases.

Actividad 2

Construir una caja cúbica con tapa y realizar su desarrollo en un plano. Esto ayuda a familiarizar a los participantes con los aspectos visuales, así como con los elementos que lo constituyen.

Actividad 3

El objetivo de esta actividad es apoyar a los participantes para que obtengan secciones en el cubo por cortes con planos.

1. Crear un cubo apoyado en el plano de la base y utilizar estilo de superficie "vacío".

2. Construir una diagonal AE y localizar un punto sobre ella.

3. Obtener un plano perpendicular al borde AE, a través del punto P.

4. Utilizar la superficie de estilo "completo". Con la herramienta "cortar poliedro", hacer clic sobre el plano y luego sobre el cubo y ocultar el plano de corte y el segmento AE.

5. Mover el punto P para obtener las diferentes posiciones de la región obtenida por el corte. Clasificar los polígonos que corresponden a las fronteras (contornos) de estas regiones planas.

Conclusión

Creemos que actividades como las que aquí se ejemplifican y que tendrán lugar durante el taller, junto con otras que debido a la limitación de espacio no exponemos aquí, servirán de base para que al final del cursillo, los participantes hayan alcanzado los objetivos que nos propusimos.

Se habrán cumplido nuestros objetivos si los participantes pueden lograr cortes de un cubo mediante planos para obtener las distintas regiones triangulares según las medidas de los lados. Se espera que los participantes al desarrollar estrategias para resolver el problema argumenten adecuadamente.

Referencias

Gutiérrez, Á. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3-14). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Leivas, J.C.P. (2010, septiembre). *Altura de triângulos no Cabri-Géomètre*. Ponencia presentada en V Congreso Iberoamericano de Cabri, Querétaro, México.

Leivas, J.C.P. (2011, noviembre). *Resolução de problemas: um contexto gométrico*. Ponencia presentada en II Seminário em Resolução de Problemas, Rio Claro, SP, Brasil.

Leivas, J.C.P. (2012a). Habilidade de visualização com alunos da Licenciatura em Geometria Espacial. *Anais do V SIPEM- Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil.

Leivas, J.C.P. (2012b, junio). *Visualização espacial como Cabri 3D*. Ponencia presentada en III SIPEMAT - Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Fortaleza, Ceará, Brasil.

Leivas, J.C.P. (2012c). O Cabri 3D como ferramenta para desenvolver visualização dos primeiros axiomas de geometria euclidiana no espaço. En F. Ugarte y H.Z. Azabache (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri* (pp. 108-114). Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Leivas, J.C.P. (2012d). Uma experiencia no Cabri 3D na apreensão de axiomas de incidencia no espaço com alunos de mestrado. En F. Ugarte y H.Z. Azabache (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri* (pp. 291-298). Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF). (1977). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasilia, Brasil: Autor.

Las obras de Escher y la geometría hiperbólica

Rafael Melo
Universidad Central
rmeloj@gmail.com, rmeloj@ucentral.edu.co

Casi todo el mundo ha visto, por lo menos una vez, alguna obra del famoso artista holandés M. C. Escher. La originalidad plasmada en sus trabajos atrapa de inmediato nuestra curiosidad y atención, pues sus figuras y/o personajes parecen vivir en otro mundo: uno, donde las leyes de la geometría euclidiana o intuitiva, no funcionan. Y así es; se trata de la geometría hiperbólica, un mundo gobernado por unas reglas tan diferentes, que permiten representar el infinito en un espacio finito. Una vez nos introduzcamos a este nuevo mundo, y entendamos la forma en que funciona, podremos ver las obras de Escher con otros ojos, y encontrar quizás, significados que antes no podíamos.

Introducción

M. C. Escher nació en Leewarden, Holanda, el 17 de julio de 1898. Desde joven se inclinó hacia las artes gráficas, y se dedicó a esto toda su vida, que terminó en Hilversum, Holanda, el 27 de marzo de 1972. Manejó varios temas en sus trabajos. Entre los principales tenemos los siguientes: perspectivas inusuales, transmutaciones graduales, ilusiones en dos y tres dimensiones, y, representaciones del infinito. Es en este último en el que se concentrará el curso.

Escher estaba fascinado con la representación del infinito en un espacio finito, pero para lograrla debía llegar a un paro brusco en alguna parte de la obra. Escher hizo varios intentos, y llegó, finalmente, a sus obras *Círculo límite III* y *Círculo Límite IV*, que son las más destacadas en este género. En la Figura1 se pueden apreciar.

Figura 1

Melo, R. (2013). Las obras de Escher y la geometría hiperbólica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 155-158). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Se observa que las figuras que componen cada una de las obras mencionadas decrecen paulatinamente del centro al perímetro, hasta perderse en el límite visual identificable. En este cursillo se describirá esto desde un punto de vista matemático. Para dichas figuras, la realidad es hiperbólica, razón por la cual cada una de ellas luce del mismo tamaño que las demás. Más aun, ninguna se siente limitada por la frontera, pues la distancia a ella es infinita. Dicho de otro modo, a pesar de que las figuras son de tamaño diferente en el sentido euclidiano, se verá que son, de hecho, congruentes bajo una métrica hiperbólica de distancia. Vistas de esta forma, las obras son simplemente un teselado[1] regular en el cual las piezas individuales han sido rotadas. O sea que si se tuviesen ojos hiperbólicos, el *Círculo Límite IV*, se vería así:

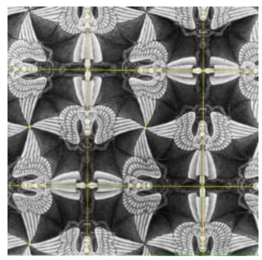


Figura 2

La representación del infinito en un teselado que tiene dos características fundamentales (Gupta, 2006, p. 69):

- La apariencia repetitiva de un elemento base, en desplazamientos espaciales y periódicos.
- La necesidad de incluir una red infinita en un plano finito, lo que implica que el tamaño y los desplazamientos del elemento base no pueden ser constantes.

El *Círculo Límite III* y el *Círculo Límite IV* presentan ambas características. Además, son el resultado de una serie de transformaciones, como traslaciones, rotaciones e inversiones. De aquí, viene la idea de que estas obras son el resultado de una o varias transformaciones de Möbius complejas, pues dichas transformaciones satisfacen propiedades que cumplen con estas características, como se verá a continuación.

[1] Un teselado es un patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana de tal forma que no queden huecos y no se superpongan las figuras.

Transformaciones de Möbius complejas

En el cursillo se planea introducir las transformaciones de Möbius complejas (Hidalgo, 2012), usando varios ejemplos, con gráficas. También se mostrarán las propiedades de las transformaciones que se utilizarán. Entre ellas tenemos:

- Las transformaciones de Möbius son automorfismos conformes de $\hat{\mathbb{C}}$.
- Las transformaciones de Möbius mandan circunferencias de $\hat{\mathbb{C}}$ en circunferencias de $\hat{\mathbb{C}}$.
- Las transformaciones de Möbius no alteran las razones cruzadas. Por lo tanto, una transformación de Möbius será una isometría bajo cualquier métrica basada en una razón cruzada.[2]

Esas propiedades se expondrán formalmente durante el cursillo. Evidentemente estas propiedades ayudan a conservar la forma de una figura, además de proporcionar un escalamiento o cambio de tamaño. Estas son, precisamente, las dos características fundamentales que debe tener un teselado para representar el infinito. Ahora dótese al plano complejo de la métrica euclidiana. Como esta no es invariante bajo estas transformaciones, se generará una reducción en el tamaño de los elementos que se acercan a la frontera. Ahora dótese al plano complejo de otra métrica especial, la métrica hiperbólica, a la que notaremos d_H. Para poder entender la forma en que actúa esta nueva métrica, es necesario que nos sumerjamos en el mundo de la geometría hiperbólica.

Geometría hiperbólica

En el cursillo se hará una breve introducción histórica de la geometría; desde su formalización con la obra los *Elementos* de Euclides, alrededor del año 300 A. de C., hasta 1868, cuando se publicó la famosa conferencia que impartió Hilbert en 1854, acerca de la reformulación de la geometría, vigente en la actualidad. En este punto ya se sabrá que existen sólo tres tipos de geometría: la euclidiana, la elíptica y la hiperbólica. Se profundizará en la geometría hiperbólica (Cruz, 2009). Se hablará de su desarrollo, su utilidad, e incluso se expondrán resultados que muestran que la geometría hiperbólica es tan consistente como la euclidiana, y que además, ha jugado un papel importante en otras ramas de las matemáticas.

[2] Mostraremos que la métrica euclidiana del plano no funciona.

Para entender mejor la forma en que funciona esta nueva geometría, se explicará en detalle uno de los modelos que la describen bidimensionalmente: el modelo del disco de Poincaré (Kisbye, 2008). En este modelo se toma el disco abierto unitario del plano complejo, y se dota de una noción de distancia bastante particular, la métrica d_H (esta métrica, a diferencia de la euclidiana, se basa en una razón cruzada, causando que las transformaciones de Möbius sean isometrías). Se verán los conceptos básicos de puntos y rectas. También se expondrán algunos resultados sobre circunferencias y triángulos hiperbólicos, todo esto con el fin de contextualizar a los asistentes en este nuevo mundo, y de mostrarles las grandes diferencias con el euclidiano.

PARA TERMINAR

Con la geometría hiperbólica como referente, se retomará el tema de las obras de Escher que representan el infinito, en particular, las mencionadas inicialmente, para apreciarlas con "ojos hiperbólicos". Para ello, se superpondrán sobre el disco abierto unitario complejo D, ahora dotado de la métrica hiperbólica d_H. Utilizando las propiedades de d_H que ya conocemos, podrá sostenerse que dichas obras son simplemente teselados regulares. Tal vez esta descripción sea más sencilla, pero lo que sí es innegable es que la perfección y la hermosura de su diseño permanecerá invariante bajo cualquier transformación, y sin importar las reglas que gobiernen.

REFERENCIAS

Cruz, M. (2009). *Geometría hiperbólica y algo más..* Departamento de Matemáticas, Universidad de Guanajuato, Guanajuato, México. Recuperado de http://www.smm.org.mx/emalca2010/sites/default/files/geometriahiperbolica.pdf

Gupta, M. S. (2006, octubre). El arte de Escher, la Gráfica Smith y la geometría hiperbólica (Roberto S. Murphy Arteaga, Tr.). *IEEE Microwave Magazine*. Recuperado de http://docsfiles.com/pdf_madhu_s_gupta.html

Hidalgo, R.A. (2012). *Transformaciones de Mobius: una introducción*. Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile. Recuperado de rhidalgo.mat.utfsm.cl/files/moebius.pdf

Kisbye, N.P. (2008). *El plano de Poincaré.* Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Recuperado de http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_c/CMat35-1.pdf

FIGURAS Y VISUALIZACIÓN EN TEXTOS DE PREESCOLAR

Paola Muñoz, Ricardo Ortega y Gustavo Marmolejo
Universidad de Nariño
pamp36@gmail.com, maomip1105@hotmail.com, usalgamav@gmail.com

Se presenta un instrumento de análisis que caracteriza las visualizaciones que determinan el contenido geométrico de los libros de preescolar. El modelo es una adaptación de los referentes teóricos presentados en Marmolejo y González (2011) sobre la visualización en la construcción de conocimiento matemático en los libros de texto.

PRESENTACIÓN

El libro de texto "ha originado una práctica escolar determinada por su uso, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad salvo casos aislados" (González y Sierra, 2004, p. 389). Esto explica el interés que en la última década ha mostrado la investigación en educación matemática, al centrar su atención en el papel que desempeñan estos recursos didácticos en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, existen investigaciones que se interesan por el papel de la cognición en el contenido matemático presentado en los textos (Marmolejo y González, 2011). Otras más, que desde perspectivas semióticas, indagan por el papel de las representaciones en la construcción de los conceptos matemáticos (Córdoba, 2008). Así mismo, hay reportes que analizan la manera como los libros introducen las sugerencias curriculares en los documentos institucionales (Shield y Dole, 2013).

El interés del taller recae en el papel que juega la visualización en la construcción de conocimiento geométrico en los manuales escolares de matemáticas de preescolar. Son varios los aspectos que explican tal elección: el preescolar, por ser uno de los espacios de enseñanza al que menos atención se le ha prestado en los últimos años en el campo de la educación matemática; la visualización es una actividad que representa gran complejidad para los estudiantes en los primeros años de la educación obligatoria; y, la geometría hace "parte de la matemática más intuitiva, concreta y [está] ligada a la realidad... [además aporta al desarrollo de habilidades relacionadas con] lo cognoscitivo, lo procedimental y lo actitudinal" (Cabello, 2005, p. 646).

Muñoz, P., Ortega, R. y Marmolejo, G. (2013). Figuras y visualización en textos de preescolar. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 159-162). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En el presente taller, pretendemos aportar elementos que den respuesta a la siguiente cuestión: ¿Cómo recurren los manuales a la visualización para suscitar el estudio de la geometría en el preescolar? Así, presentamos y aplicamos un modelo de análisis de libros de texto que aporta importantes elementos, no solo para responder la pregunta sino que también aporta criterios para considerar en la selección de los manuales que se privilegian en el aula escolar.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico de referencia para el taller es el propuesto en Marmolejo y González (2011) acerca de la visualización bidimensional en los manuales escolares. Desde esta perspectiva, se asume “ver en matemáticas” no solo como el reconocimiento de las organizaciones, modificaciones y extrapolaciones que se deben considerar en una figura, sino que, también, se consideran, por un lado, la variabilidad dimensional y los cambios de focalización bidimensional que se han de aplicar en la figura al realizar la actividad propuesta, y, por otro lado, el flujo visual. Así, son cinco los elementos visuales que caracterizan las formas de ver presentes en los libros de texto: operaciones figurales, cambios figurales, cambios dimensionales, cambios de focalización y flujo visual. En lo que sigue definimos y ejemplificamos cada uno de ellos:

*Operaciones figurales***,** es decir, las acciones que se aplican sobre una figura y que suscitan en ella modificaciones perceptivas. Con respecto a la Figura 1 se pide encontrar las hojas iguales a la figura encerrada en un rombo; para resolver la tarea planteada es necesario aplicar operaciones de rotación y traslación a la figura mencionada.

Cambios figurales, o sea, el efecto que produce en una configuración geométrica la aplicación de acciones que transforman su organización perceptual. La Figura 2 se refiere a armar un libro de papel; en el proceso es necesario doblar por la mitad varias hojas; en consecuencia, las figuras que representan a cada una de las hojas de papel se transforman internamente.

Cambio dimensional, relacionado con el paso de considerar una figura como una gestalt a discriminar en ella sus partes constituyentes de dimensión 1 y 0. En la tarea presentada en la Figura 3, se va a diseñar una camisa a partir de la aplicación de dobleces simultáneos sobre una hoja de papel. En el proceso es necesario de manera reiterativa centrar la atención en la marca (línea recta) que deja en la hoja cada uno de los dobleces aplicados.

Cambio de focalización bidimensional, refiere a pasar de centrar la atención en las características globales 2D de la figura de partida a hacerlo en sus partes 2D constituyentes (subfiguras o subconfiguraciones) y/o, en caso de haber varias figuras de partida, pasar de centrar la atención de una a otra y/o considerar simultáneamente la forma y contorno de la figura de partida y la de la figura de llegada. En la Figura 4 se pide armar las figuras con las fichas de un tangram; para ello es necesario centrar la atención, no solo, en las fichas del tangram, sino también en los contorno de las figuras que se van a armar.

El flujo visual considera el modo de organizar los distintos cambios (figural, dimensional, focalización 2D) y las operaciones que determinan la manera de ver qué es pertinente al desarrollo o comprensión de la tarea propuesta. Con respecto a la Figura 5, se pide completar tres figuras a partir de una cuarta. Para discriminar las partes faltantes de cada una de las figuras en estudio es necesario comparar la figura resaltada con la primera de ellas; luego, reiterar el proceso con la segunda y la tercera de las figuras que se van a completar.

Figura 1 (Reyes, 2011, p. 76)

Figura 2 (Reyes, 2011, p. 8)

Figura 3 (Reyes, 2011, p. 12)

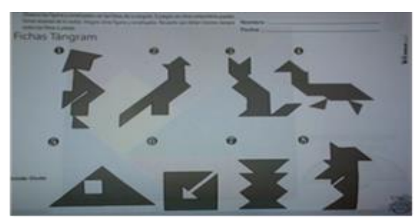


Figura 4 (Reyes, 2011, p. 125a)

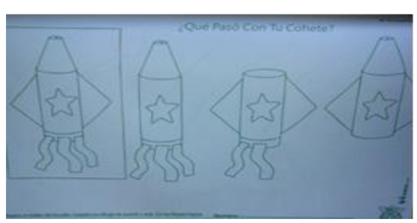


Figura 5 (Reyes, 2011, p. 101)

Metodología del taller

El taller se realizará en cinco fases. En la primera, se describirá la importancia del análisis de textos escolares como medio para estudiar la visualización con el fin de mejorar el aprendizaje de la geometría. En la segunda, se dará a conocer a los participantes el instrumento de análisis para aplicarlo a actividades tomadas de textos escolares de preescolar. En la tercera, los asistentes aplicarán las categorías de análisis a cuatro actividades tomadas de textos escolares de preescolar. Se hará entrega de un documento de trabajo compuesto por 1) las definiciones de las categorías y sus subcategorías, 2) las actividades que se caracterizarán y 3) una tabla de doble entrada para indicar la caracterización de la actividad. En la cuarta fase, los talleristas junto con los participantes en el taller contrastarán los análisis realizados. Para concluir, se presentarán los resultados del análisis realizado a las actividades y se establecerán elementos que se pueden considerar en el análisis de otros textos.

Referencias

Cabello, G. (2005). Funcionalidad de los materiales didácticos en el aprendizaje de la geometría. En *Memorias del XV Encuentro de Geometría y III Encuentro de Aritmética*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Córdoba, A. (2008). *Análisis semiótico de la función lineal en el Álgebra de Baldor* (Tesis de pregrado). Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Marmolejo, G. y González, M.T. (2011). La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de análisis de libros de texto. En *Memorias del XII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 355-364). Armenia, Colombia: Universidad del Quindío.

Reyes, D.C. (2011). *Angelitos B*. Bogotá, Colombia: Huella Editorial.

Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183-199.

GEOMETRÍA EXPERIMENTAL Y CONTEXTOS MATEMÁTICOS: ESTUDIO DE LA CONGRUENCIA A TRAVÉS DEL DISEÑO DE LOGOS

Octavio Pabón, Gustavo Moreno y Luis Pineda
Laboratorio de Matemáticas (LabMatUV), Universidad del Valle
octpabon@gmail.com, juniorgustavoadolfo@hotmail.com, lapa8920@gmail.com

Esta propuesta de cursillo busca que los profesores de matemáticas desarrollen un conocimiento fundamentado acerca de la integración de contextos realistas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Se lleva a cabo a través del planteamiento de tareas matemáticas cuyas soluciones vinculen diferentes tipos de estrategias y procedimientos y que promuevan el tratamiento experimental de ciertas propiedades geométricas, en particular la de congruencia de figuras geométricas, presentes en logotipos publicitarios.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales intereses de esta propuesta es crear un espacio de discusión y debate sobre la importancia de integrar contextos matemáticos, cotidianos y realistas en la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar. En efecto, propuestas como la Educación Matemática Realista enfatizan la importancia de utilizar contextos como los del arte, la literatura y otros campos de conocimiento en el trabajo en las aulas de matemáticas. En este orden de ideas, las filiaciones del trabajo en geometría en la escuela con campos disciplinares como el diseño y las artes, resultan particularmente útiles para el tratamiento de contenidos temáticos y procesos matemáticos como la resolución de problemas y la modelación matemática.

ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS DE REFERENCIA

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas desarrolladas en las últimas décadas otorgan especial atención al asunto de los contextos y sus usos diversos en la enseñanza. Según Reeuwijk (1997), tradicionalmente no se utilizan contextos en matemáticas hasta después de haber enseñado a los estudiantes las matemáticas formales. Es lo que se denomina el *enfoque de arriba a abajo*, en el que los estudiantes aprenden primero matemáticas abstractas y formales, la estructura de las matemáticas, sin utilizar contextos, y luego apli-

Pabón, O., Moreno, G. y Pineda, L. (2013). Geometría experimental y contextos matemáticos: estudio de la congruencia a través del diseño de logos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 163-166). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

can sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en contexto. Frecuentemente, estos "problemas de aplicación" aparecen al final de cada capítulo del libro de texto o incluso al final de éste, por lo que el profesor suele omitirlos por falta de tiempo. De otra parte, existe un amplio consenso sobre el potencial de los contextos y de la vida cotidiana; estos deberían desempeñar un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; es decir, no sólo en la fase de aplicación, sino también en la de exploración y la de desarrollo, donde los estudiantes descubren o, aún mejor, reinventan las matemáticas. "Ciertos contextos y la vida cotidiana pueden emplearse en las fases de aplicación, exploración y desarrollo del proceso de aprendizaje, pues permiten a los alumnos descubrir y reinventar las matemáticas" (Reeuwijk, 1997, p. 13). En la búsqueda de un buen contexto para la enseñanza de la geometría, la vinculación entre los ambientes de geometría dinámica y la geometría del diseño, es particularmente prometedora. Siguiendo a Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen (1996) y a Mammana (1995), es posible reconocer tres tendencias principales en el aprendizaje del razonamiento geométrico: en la construcción de demostraciones, en la geometría desde el contexto y en lo visual. En relación con el razonamiento en el aprendizaje de la geometría desde el contexto, se considera que el conocimiento geométrico puede y debe ser construido de una manera significativa en contextos que puedan servir como "campos de experiencia" o como "trampolines geométricos". El contexto deberá ser "realista" para los alumnos, donde realista es tomado en un sentido amplio. Una característica central es la de "reinvención a través de una matematización progresiva". A los alumnos se les confronta con situaciones en las que ellos observan y resuelven problemas en un contexto geométrico realista e investigan los invariantes de figuras geométricas y relaciones bajo cambios realistas. En este taller abordaremos esta problemática a partir del análisis del potencial de la geometría de los anuncios publicitarios.

GEOMETRÍA EN ANUNCIOS PUBLICITARIOS

Como señala Corbalán (2007/2010), se encuentran anuncios en diferentes lugares como prensa, radio, televisión e internet; en vallas, escaparates; también en los acontecimientos deportivos o logotipos de los diferentes vehículos. El investigador considera que el "consumidor que sea analfabeto funcional ante alguno de sus muchos lenguajes está indefenso porque los anuncios seducen con imágenes, músicas, asociaciones oníricas, juegos de palabras y códigos de todo tipo, ¡también geométricos!" (pp. 216-217). En este sentido, se propone el estudio, la deconstrucción y el tratamiento tanto en ambientes de lápiz y papel como en ambientes de geometría dinámica de algunos logotipos de marcas publicitarias famosas que desde una perspectiva experimental den y permitan reflexiones matemáticas y didácticas.

Logotipo	Contenido	Competencias matemáticas asociadas	Vinculación con el contexto
Símbolo de Volkswagen.	Congruencia de figuras planas.	Componen y descomponen figuras; analizan congruencia entre sus lados y ángulos. Resuelven problemas que involucran congruencia de trazos, ángulos y triángulos.	Conocer la realidad, utilizar el conocimiento y relacionar la información relevante. Desarrollo de habilidades de análisis, interpretación y síntesis de información. Trabajo en equipo. Conocer la realidad, utilizar el conocimiento y relacionar la información relevante. Desarrollo de habilidades de investigación. Desarrollo de habilidades de generalización y modelización a partir de relaciones observadas.

Tabla 1: Estructura de las tareas propuestas

METODOLOGÍA DEL CURSILLO

El cursillo está planeado para realizarse en tres sesiones. En la primera se plantean nuestras motivaciones, expectativas y algunos de los referentes teóricos que explican el sentido, alcance y proyecciones de la geometría en contexto y su eventual integración a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en las aulas de matemáticas. En este sentido, se ilustrará mediante ejemplos en el ambiente de lápiz y papel y en ambientes de geometría dinámica, las potencialidades del trabajo experimental cuando se vincula con contextos realistas, aun los estrictamente matemáticos. Se incluyen además actividades prácticas a realizar con los participantes en el cursillo.

En la segunda sesión se plantean elementos teóricos y metodológicos para la identificación e integración de buenos contextos para el tratamiento de propiedades geométricas, en particular, las propiedades de congruencia a partir del trabajo experimental y lúdico con el diseño de logos publicitarios. Se presentan variaciones sobre este tema desde la perspectiva del trabajo en laboratorios de matemáticas y en clubes de matemáticas; en particular, se discute acerca del diseño y la elaboración de nuevas tareas matemáticas en el contexto de las matemáticas cotidianas y las matemáticas del consumidor.

En la tercera y última sesión, se socializan algunos desarrollos teóricos y metodológicos recientes en el campo de la didáctica de las matemáticas sobre los recursos pedagógicos, el trabajo en redes de aprendizaje y las matemáticas cotidianas, a partir de ejemplos prácticos y de trabajos experimentales, que vinculan la modelación matemática y la resolución de problemas en su calidad de procesos centrales en las aulas de matemáticas.

Nivel al que va dirigido: Nivel medio. Profesores de educación básica, estudiantes de la licenciatura en educación en matemática, matemáticos.

Tiempo: La duración del cursillo será de hora y media.

Materiales: En lo posible, cada participante debe contar con: regla y compás, tijeras, lápiz y papel, calculadora científica y graficadora, computador portátil con algún programa de geometría dinámica. Se requiere una sala de computadores con un programa de geometría dinámica instalado (Cabri Géomètre, Regla y compas o GeoGebra).

REFERENCIAS

Corbalán, F. (2007). *Matemáticas de la vida misma*. Barcelona, España: Grao Editores.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Mammana, C. (Ed.) (1995). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: Proceedings of the ICMI Study Conference*. Catania, Italia: University of Catania.

Reeuwijk, M. van (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 12, 9-16.

PROBLEMAS ABIERTOS DE CONJETURACIÓN

Carmen Samper, **Óscar Molina**, **Leonor Camargo, Patricia Perry y Tania Plazas**
Universidad Pedagógica Nacional
csamper@pedagogica.edu.co, oscarjrmolina@gmail.com, lcamargo@pedagogica.edu.co,
pperryc@yahoo.com.mx, tania.plazas@gmail.com

Hoy se reconoce la importancia de la resolución de problemas y el uso de nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas. En este cursillo, los asistentes resolverán, con geometría dinámica, diferentes tipos de problemas geométricos abiertos, de conjeturación. A partir de las acciones del proceso de solución, determinaremos esquemas de utilización que permiten inferir significados personales. Así, se obtienen elementos que el profesor puede usar en clase para que los alumnos transformen sus significados en matemáticos.

INTRODUCCIÓN

El cursillo propuesto está asociado a una investigación, que adelantamos en la actualidad en un curso de geometría, para determinar cómo las conjeturas propuestas por estudiantes, como solución a problemas abiertos, se convierten en un elemento para el desarrollo del contenido matemático en clase. Hemos diseñado problemas abiertos de conjeturación, que clasificamos según dos asuntos: la estructura de su enunciado y los procedimientos realizados en Cabri para resolverlos. Enseguida se expone qué entendemos por problema abierto de conjeturación, la tipología diseñada y a qué refiere esquema de utilización, herramienta conceptual de la Aproximación Instrumental para identificar significados personales. Después, proponemos un problema típico de un texto de geometría y su transformación en problema abierto.

REFERENTES TEÓRICOS

Un *problema abierto* plantea una tarea con una pregunta que no revela o sugiere la respuesta esperada (Arsac et al., 1999; Silver, 1995, en Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010). En geometría, usualmente los problemas abiertos incluyen la descripción de una situación y una pregunta que pide establecer una conjetura, como proposición condicional, que expresa relaciones entre propie-

Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

dades de las figuras involucradas en ésta. Por eso se llaman *problemas abiertos de conjeturación* (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010).

La problemática relacionada con la comprensión y el uso que los estudiantes dan a las proposiciones condicionales durante procesos de producción de conjeturas y justificaciones nos llevó a pensar en usar problemas geométricos abiertos, en los que subyacen uno o más posibles teoremas del sistema teórico que se está conformando en clase, como un medio para solventar las dificultades de comprensión y uso de condicionales, que enfrentan los estudiantes (Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry, 2010). Estos problemas están diseñados para trabajar con el artefacto geometría dinámica, el cual favorece en el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa una exploración dinámica en la que la función de arrastre es clave. Específicamente, el uso de un programa como Cabri permite identificar la relación de dependencia entre propiedades geométricas al hacer ostensiva la ocurrencia simultánea de éstas, relación necesaria para decidir cuáles serán el antecedente y consecuente de la conjetura que se formula.

Respecto a la solución de problemas abiertos de conjeturación nos interesa estudiar el uso que dan los estudiantes al programa de geometría dinámica para explorar, poner en juego sus intuiciones, formular conjeturas y verificarlas hasta tener la versión que proponen. El respectivo análisis nos permite identificar significados personales[1] de los estudiantes, que se pueden constituir en la base sobre la cual planear acciones específicas de mediación por parte del profesor con el propósito de hacerlos evolucionar hacia significados matemáticos (i.e. propios de la comunidad matemática de referencia) y además propiciar la construcción del significado matemático de la condicional.

Adoptamos la Aproximación Instrumental propuesta por Rabardel (1995, citado en Bartolini Bussi y Mariotti, 2008), como lente para identificar el uso mencionado antes pues nos provee la herramienta conceptual *esquema de utilización*. Esto es un esquema mental del sujeto que infiere un observador a través de los signos que se comunican en la interacción social que se lleva a cabo o a través de las acciones "relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto" y que son el "medio de realización" de

[1] Éstos tienen que ver con, entre otras cosas, la interpretación que los estudiantes dan a los objetos o relaciones de índole matemática, su conocimiento declarativo acerca de tales objetos o relaciones, del estatus y del uso que tienen éstos en el marco de una teoría.

una tarea (Rabardel, 1995/2011, p. 171). Mariotti (comunicación personal) precisa que los esquemas inferidos pueden ayudar a identificar posibles significados personales que emergen de la actividad con el artefacto. Basados en esta idea, hemos identificado esquemas relativos a los tipos de problemas de conjeturación propuestos a nuestros estudiantes.

TIPOS DE PROBLEMAS

Dado que los problemas abiertos de conjeturación exigen formular una conjetura expresada como condicional, la parte de ésta que se debe buscar (antecedente o consecuente) depende de la información que aporta el problema y la pregunta que se propone. Por esta razón, clasificamos los problemas según el foco de la búsqueda: consecuente, antecedente o determinación de dependencia. En un marco de actividad instrumentada, el enunciado de cada tipo de problema favorece diferentes procedimientos de solución dando lugar a la siguiente clasificación.

El formato del enunciado de los *problemas de búsqueda del consecuente* se describe así: dadas las condiciones suficientes, hallar las consecuencias necesarias de éstas. En estos problemas, la representación gráfica de la situación descrita en el enunciado se basa sólo en la construcción de objetos que cumplen las condiciones con las que se cuenta, y la búsqueda de invariantes (reportados en el consecuente) se hace mediante la exploración directa de los objetos construidos; los denominamos *problemas de construcción sugerida*.

El formato del enunciado de los *problemas de búsqueda del antecedente* es: hallar las condiciones suficientes para las cuales las propiedades mencionadas en el enunciado son la consecuencia necesaria. Resolver estos problemas exige no sólo representar gráficamente los objetos mencionados en el enunciado, sino también realizar construcciones auxiliares que provean las condiciones geométricas suficientes para determinar, mediante la exploración, las propiedades de un objeto existente o las que aseguren la existencia de un objeto (que se debe reportar en el antecedente). Por ello, los denominamos *problemas de construcción creativa*.

El enunciado de los *problemas de determinación de dependencia* tiene el siguiente formato: dado un conjunto referencial de figuras geométricas y unas propiedades, establecer dependencias entre "tipos de figuras del conjunto referencial" y las "propiedades dadas". Aquí hay libertad de decidir si el conjunto referencial o las propiedades son el antecedente de la conjetura, y usar la geometría dinámica de acuerdo a ello.

UNA MUESTRA DE LA ACTIVIDAD DEL CURSILLO

En relación con los siguientes dos problemas abiertos obtenidos al transformar un problema típico de un texto de geometría, el cursillo proporcionará elementos conceptuales para responder las preguntas:

1) ¿Cuál es el tipo de cada problema abierto según la propuesta anterior?

2) La estructura de un esquema de utilización consiste en: determinar un invariante; formular una relación condicional que informa sobre el invariante descubierto como antecedente para las condiciones impuestas en la construcción; corroborar la conjetura. ¿Cuáles son las acciones instrumentadas particulares?

Problema original	Primer problema de conjeturación	Segundo problema de conjeturación
Demuestre que las bisectrices de ángulos par lineal forman un ángulo recto.	Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima? Justifique su respuesta.	Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. ¿Qué condiciones deben tener los puntos G y D en el interior de $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente, para que el $\angle GBD$ sea recto? Justifique su respuesta.

REFERENCIAS

Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M.A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15, 225-253.

Bartolini Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-805). Mahwah, EUA: LEA.

Rabardel, P. (2011/1995). *Los hombres y las tecnologías*. *Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Martín Acosta Gempeler, Tr.). Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2010). Geometría dinámica: su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces. *Educación Matemática*, *22*(3), 119-142.

Comunicaciones breves

Dificultades de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, para comprender el lenguaje matemático utilizado en demostraciones geométricas euclidianas

Paola Córdoba y Yadid Quintana
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
pao_acv@hotmail.com,yadiquincas29@hotmail.com

El lenguaje que se usa en las demostraciones geométricas presentadas por Euclides en su texto los *Elementos*, particularmente las traducciones entre códigos en dicho lenguaje, son la base de este artículo. Se expone un análisis referente a las dificultades que presentan los estudiantes que se están formando para ser profesores de matemáticas, en la comprensión del lenguaje matemático que se usa en las demostraciones geométricas de Euclides. Se usa la clasificación de la demostración hecha por Harel y Sowder que cita Molfino (2006), y así se establece una relación entre demostración y la traducción entre códigos en el lenguaje matemático.

Planteamiento del problema

Un aspecto de vital importancia en la formación académica de quienes se están preparando como profesores de matemáticas es la comprensión de las demostraciones euclidianas, además del uso de las mismas en distintas situaciones problémicas. Es así como a la luz de los autores que se mencionarán en el marco de referencia conceptual, se ha planteado como pregunta orientadora: ¿Qué dificultades en la comprensión del lenguaje matemático que se usa en las demostraciones geométricas euclidianas presentan los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas?

Para hacer un abordaje al anterior cuestionamiento se realizará, en primer lugar, una descripción teórica de la demostración en matemáticas y el uso de la traducción de códigos como medio de interpretación. Se proseguirá con la delimitación de la población, el análisis de los resultados obtenidos mediante una entrevista y una prueba, y se terminará con las conclusiones generadas por este trabajo investigativo.

Córdoba, P. y Quintana, Y. (2013). Dificultades de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, para comprender el lenguaje matemático utilizado en demostraciones geométricas euclidianas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 173-178). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Al hacer uso del término “lenguaje cotidiano” se tomará la definición propuesta por Radillo y Huerta (2007): “es aquel [lenguaje] utilizado en la vida diaria del individuo” (p. 265); es decir, es el lenguaje natural que se usa a diario, sin tecnicismos.

En las matemáticas se ha desarrollado un lenguaje particular, distinto al cotidiano, para transmitir el conocimiento y el pensamiento matemático, libre de cualquier influencia; está excesivamente formalizado (Radillo y Huerta, 2007).

En cuanto a las demostraciones geométricas de Euclides se presentan según Radillo y Huerta (2007, pp. 272-273) las siguientes dificultades:

> C1. Dificultades en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas.C2. Dificultades en cuanto a términos del español especializado, que son diferentes en el lenguaje cotidiano.
>
> C3. Dificultades en los sintagmas del español especializado que tienen significados muy precisos, con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano.
>
> C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica.
>
> C5. Dificultades en la traducción entre códigos.

El razonamiento se entiende como una construcción de hipótesis a partir de ideas ya fundamentadas, y en ocasiones no axiomáticamente demostradas. Rusell (1999) lo define como aquello que: “[U]tilizamos para pensar acerca de las propiedades de estos objetos matemáticos y para desarrollar generalizaciones que se puedan aplicar a clases completas de objetos-números, operaciones, objetos geométricos o conjuntos de datos” (p. 1). Harel y Sowder (1998, citado por Molfino, 2006) identifican dos tipos de razonamiento según la veracidad de las ideas planteadas; a saber:

1. Argumentación
2. Demostración

    Externa: puede ser autoritaria, ritual, simbólica.

Empírica: puede ser perceptiva e inductiva.

Analítica: puede hacerse a partir de transformaciones y axiomas.

METODOLOGÍA

En este caso la manera de aproximarse al problema de investigación planteado fue emplear técnicas de tipo cualitativo (Martínez, 2006). De las herramientas que hacen parte de este tipo de investigación, se usaron principalmente instrumentos de recolección de datos.

Se aplicó una prueba a dos estudiantes de la Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, de la Universidad Distrital, que en el periodo 2012-1 estaban inscritos en el curso Problemas Aritméticos II. La prueba consistió en presentarles una proposición de los *Elementos* y pedirles que usaran argumentos matemáticos y geométricos para explicar la veracidad de la demostración presentada por Euclides en la proposición 5. Mientras ellos trabajaban en la tarea propuesta se hizo observación directa. La proposición elegida fue la (1, 5): “En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales, y si los lados iguales se alargan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí” (Vera, 1970, p. 722).

ANÁLISIS DE DATOS

El Estudiante 1 presentó las siguientes dificultades al momento de resolver la prueba:

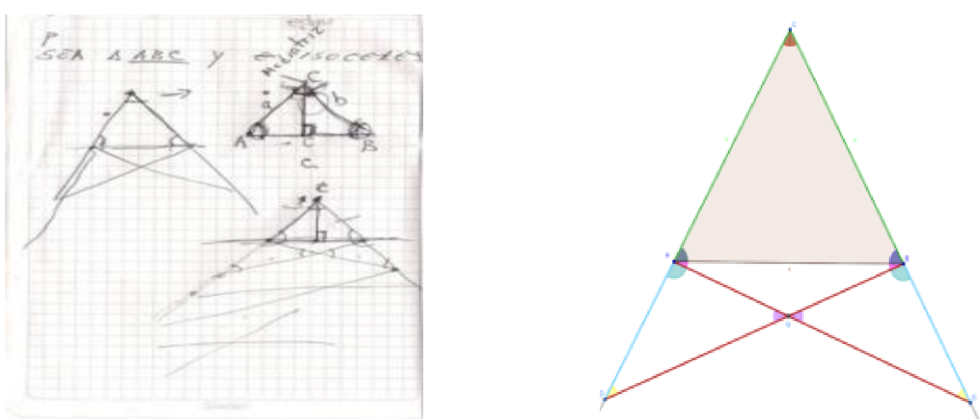


Figura 1: Solución dada por Estudiante 1

C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica. En relación con la descripción dada para el triángulo isósceles se observa que existe confusión respecto a los ángulos del triángulo, pues establece como requisito que uno de ellos debe medir 90 grados. Después por sugerencia de otro estudiante agregó otra condición: que dos de los lados del triángulo deben ser iguales. Esto constituye una demostración de tipo externo.

C2. Dificultades en cuanto a términos del español especializado, que son diferentes en el lenguaje cotidiano. Una dificultad constante radicó en hacer mal uso del lenguaje matemático, usando términos como “alargamiento” para hablar de prolongar rectas y “paralelas” sin demostrar o tan siquiera observar las rectas que cumplían tal característica; en principio, se observó que el estudiante no pensaba en la finalidad de la proposición, aislando las demostraciones sin realizar una axiomática. En particular, el estudiante tomó como sinónimos palabras del lenguaje cotidiano con respecto al lenguaje matemático, lo que puede generar confusiones.

C1. Dificultades en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas. No utilizar de manera escrita el lenguaje matemático al igual que no interconectar de manera axiomática las ideas para demostrar la veracidad de las afirmaciones. Esto expresa que los estudiantes no creen necesario demostrar ciertas propiedades, porque al parecer “ya están dadas” y por ello no es necesario plantearlas; esta es una dificultad que se puede evitar con el uso adecuado de la demostración en la enseñanza.

En cuanto al Estudiante 2 presenta las siguientes dificultades al momento de resolver la prueba:

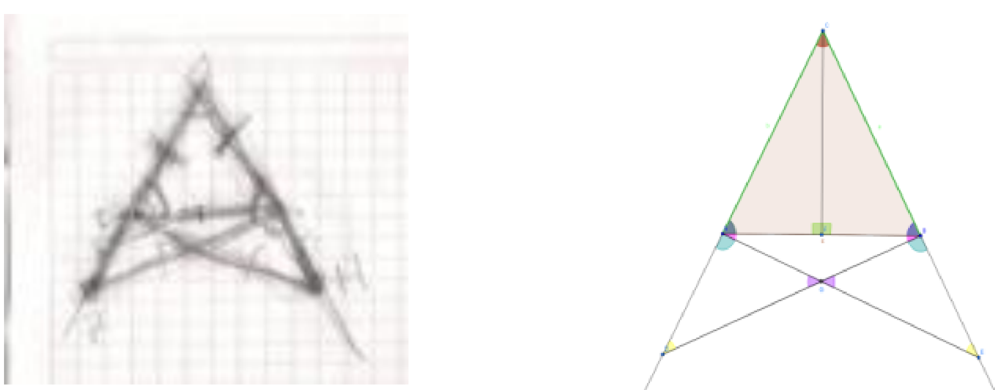


Figura 2: Solución dada por Estudiante 2

C3. Dificultades en los sintagmas del español especializado que tienen significados muy precisos, con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano. Dentro del proceso de comprensión de la demostración geométrica, el estudiante empleó en repetidas ocasiones el término “iguales”, tomándolo como un término del lenguaje cotidiano, ya que en la geometría este sintagma tiene el significado de congruencia; empleó tal término para referirse a la relación de igualdad geométrica. Con estos hechos, se puede afirmar que al momento de demostrar, el estudiante llevaba a cabo una demostración empírica, inductiva.

C4. Dificultades de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica. El estudiante no empleó la notación simbólica, ya que durante el proceso que desarrolló para comprender la proposición presentada, sus afirmaciones y argumentos se basaron únicamente en la representación gráfica, obviando el rigor que requería la demostración. A partir de esto, se puede catalogar esta demostración como externa, más precisamente una demostración ritual, pues supone que es verídica la información de la representación gráfica.

CONCLUSIONES

Los estudiantes no usan una secuencia lógica, que permita dar una interpretación cabal de la proposición 5 del libro 1, esto nos lleva a inferir que no ven la importancia de realizar una demostración específica de cada elemento que tratan, “consideran válido un razonamiento sólo por la forma del mismo, sin reparar en su contenido o su rigor” (Harel y Sowder, 1998, citado en Molfino, 2006, p. 36) realizando una demostración externa ritual.

La principal dificultad radicó en la forma en que se abordó la justificación de las proposiciones, pues los estudiantes daban como válidos elementos geométricos que se presentaban en la proposición o que lograban identificar a partir de la representación gráfica. Así, afirmamos que la demostración externa fue el principal tipo de demostración implementado, y además, que presentan dificultad en cuanto a términos del español especializado con condiciones que deberían representarse con más de dos expresiones simbólicas (Radillo y Huerta, 2007), pues jamás se llegó al nivel de rigor que requiere la demostración de la proposición.

Los estudiantes que fueron objeto de estudio no se catalogaron en la dificultad correspondiente a la categoría C1, ya que en ningún momento hicieron uso de la simbología matemática; por lo tanto, no usaron símbolos para cada una de las palabras que se mostraban en el desarrollo de la demostración euclidiana.

REFERENCIAS

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (Síntesis conceptual). *Revista de Investigación en Psicología*, *9*(1), 123-146. Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf

Molfino, V. (2006). *Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en geometría?* (Tesis de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, Montevideo, Uruguay. Recuperado de http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/vmolfino_tesis%20may%2006.PDF

Radillo, M. y Huerta, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclidiana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. En R. Abrate y M. Pochulu (Comps.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemáticas* (pp. 263-280). Villa María, República Argentina: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de http://unvm.galeon.com/Cap13.pdf

Russell, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. En L. Stiff y F. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (pp. 1-12). Reston, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vera, F. (Tr. y Ed.). (1970). Euclides: elementos de geometría. En *Científicos griegos* (vol. I, pp. 702-980). Madrid, España: Editorial Aguilar.

INICIACIÓN EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA USANDO GEOGEBRAPRIM EN CUARTO DE PRIMARIA

Jenny Escobar, Fredy Barbosa y Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional
mdma_jescobar164@pedagogica.edu.co, mdma_fbarbosa172@pedagogica.edu.co,
lcamargo@pedagogica.edu.co

Se pone en discusión el avance de una herramienta analítica para estudiar la posibilidad de introducir a niños de grado cuarto de primaria en la práctica de la demostración en geometría con el apoyo de un programa de geometría dinámica.

DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Este escrito presenta algunos avances del trabajo de grado *La demostración en geometría: una mirada desde la educación primaria*, que se enmarca en la línea de investigación "Argumentación y prueba¨ de la Maestría en Docencia de la Matemática, programa de postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

El objetivo del trabajo de grado es diseñar, implementar y evaluar una trayectoria de enseñanza que favorezca la actividad demostrativa en grado cuarto de primaria en una perspectiva sociocultural. Se busca que, mediante dicha trayectoria los estudiantes se inicien en la actividad demostrativa en geometría, práctica que caracteriza el quehacer matemático y que se evidencia en procesos como: explorar, descubrir, conjeturar y validar hechos geométricos.

El objetivo de esta comunicación es poner en discusión los primeros avances de la construcción de una herramienta analítica con la que estamos evaluando las intervenciones de los estudiantes y del profesor, en el curso de la implementación de la experiencia. La evaluación nos permitirá explicar los resultados obtenidos en el aprendizaje de los niños, hacer ajustes al diseño de la propuesta y ponerla a consideración de la comunidad de educadores e investigadores en matemáticas.

Escobar, J., Barbosa, F. y Camargo, L. (2013). Iniciación en la actividad demostrativa usando GeoGebraPrim en cuarto de primaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 179-186). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO REFERENCIAL

En consonancia con las ideas del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, *Æ • G* (Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry, en evaluación), de la Universidad Pedagógica Nacional, concebimos la actividad demostrativa para niños de cuarto de primaria como una práctica asociada a la resolución de problemas, que involucra dos procesos: la conjeturación y la justificación. Estos se relacionan porque se busca justificar aquello que se conjetura. La conjeturación incluye detectar un invariante mediante la exploración, verificarlo y expresarlo como solución a un problema; el resultado, aun cuando no se exprese como una condicional, se toma como una conjetura. La justificación busca la producción de un argumento que valide dicha conjetura, en un sistema de conocimiento compartido en la clase.

De acuerdo con Stylianides (2007, p. 291), consideramos la justificación, que semenciona en la definición de actividad demostrativa, como una demostración si es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor de un enunciado y si las afirmaciones provienen de un sistema de conocimiento en el que los estudiantes:

- Usan hechos geométricos que son aceptados por la comunidad de la clase; esto quiere decir que los estudiantes los conocen, los aceptan y recurren a ellos cuando los necesitan.
- Usan formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de la comunidad de la clase. En nuestra trayectoria, procuramos que los niños construyan enunciados condicionales en los que usen los hechos geométricos en situaciones específicas y eventualmente se refieran a los hechos geométricos como garantía de lo que afirman.
- Usan formas comunicativas convenidas, es decir, notación, lenguaje simbólico, y expresiones al alcance de la comunidad de la clase. En nuestro caso, intentamos que los niños hagan uso del lenguaje y la notación de objetos de la geometría plana como segmentos, circunferencia, congruencia, bisecar, etc.

Para instaurar un ambiente de clase en el que se lleve a cabo la actividad demostrativa con las características mencionadas, se hace necesario un esfuerzo explícito por parte del profesor para establecer normas sociomatemáticas que la promuevan (Cobb y Yackel, 1998), y una actitud para crear una atmosfera de resolución de problemas, por cuanto es ahí donde los estudiantes tienen la posibilidad de exponer sus ideas, argumentar a favor de ellas y justificarlas. Gracias a la autonomía que promueva el profesor, los estudiantes se animan a expresar el resultado de sus exploraciones y a defender los resultados obtenidos en el lenguaje y las formas de razonamiento aceptadas, y con sustento en los hechos geométricos establecidos en la clase. En la trayectoria que estamos evaluando hemos identificado, hasta el momento, las siguientes normas sociomatemáticas: (i) Cada resultado que se obtenga debe ser justificado usando las definiciones y hechos geométricos conocidos. (ii) Para hacer referencia a un objeto geométrico se debe usar el lenguaje acordado.

METODOLOGÍA

La metodología de investigación empleada en el trabajo de grado es un experimento de enseñanza que pone a prueba una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la demostración geométrica en grado cuarto de primaria. El diseño de la enseñanza se va modificando en las reuniones del grupo de investigación según sea la interacción que se genere por parte de los aprendices (Steffe y Kieran, 1994; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

El diseño del experimento contempla la resolución de siete problemas de geometría plana elemental en un ambiente de geometría dinámica mediante el uso del software GeoGebraPrim. Este tipo de ambiente da la posibilidad a los estudiantes de explorar, descubrir invariantes y enunciarlos para convertirlos en hechos geométricos. Algunos de ellos se usan para justificar otros, generalmente los que se enuncian como resultado de los últimos problemas, constituyendo un sistema teórico local. Los problemas se diseñaron en una secuencia que buscaba que los estudiantes tuvieran elementos teóricos para justificar que si un triángulo está inscrito en una circunferencia y uno de sus lados es el diámetro de ésta, entonces el triángulo es rectángulo.

Para efectos del análisis del experimento de enseñanza se hicieron videograbaciones y transcripciones del último problema:

> Problema 7. Construir una circunferencia de centro *O*, un diámetro *AB*, un punto *D* en ella y el triángulo *ABD*. Arrastrar el vértice *D* e investigar una propiedad del triángulo. Explicar por qué el triángulo tiene esa propiedad.

Los resultados obtenidos en dos problemas previos (4 y 6) les proporcionaban los hechos geométricos para poder justificar el hecho geométrico detectado en el último problema. En el problema 4, los estudiantes descubrieron que si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces el cuadrilátero es un rectángulo. En el problema 6 descubrieron que si tres segmentos congruentes, *OA*, *OB* y *OC*, tienen un extremo común, *O*, que es el punto medio del lado *AC* de un triángulo *ABC*, entonces el triángulo es rectángulo.

Para sustentar la pertinencia de la herramienta analítica que estamos usando mostraremos algunos fragmentos de la interacción sostenida por tres estudiantes y el profesor, durante la actividad demostrativa que se llevó a cabo alrededor del problema 7. En el Cuadro 1 se presentan las categorías de análisis que hasta ahora son parte de la herramienta. Las dos primeras categorías de la segunda columna aluden a la primera norma sociomatemática.

ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA	NORMAS SOCIOMATEMATICAS
Explora en busca de invariantes. (EBI) Detecta invariante. (DI) Verifica invariante. (VI) Formula conjetura. (FC) Usa hechos geométricos aceptados. (UHG) Usa formas de razonamiento válidas y conocidas. (UFV) Usa formas comunicativas aceptadas. (UFC) Enriquece la figura. (EF)	Justifica con los hechos geométricos aceptados. (JHG) Usa varias formas para justificar. (VFJ) Habla en lenguaje matemático. (HLM)

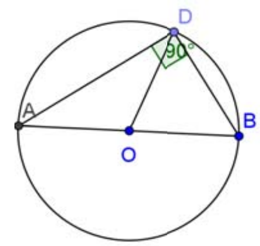
ANÁLISIS DE LOS DATOS

El fragmento con el que vamos a ejemplificar los análisis comienza después de que los estudiantes: (i) han reportado, mediante la opción ‘Texto’ del programa GeoGebraPrim la conjetura a la que llegaron luego de la exploración, es decir, que el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*; (ii) han hallado un primer camino para justificar la conjetura, construyendo el segmento *OD*, mediante el hecho geométrico resultado del problema 6; (iii) y la profesora les pide buscar otra manera de justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo.

23. Profesora: (…) ¿Qué otro camino [hay para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo]? (…)

…

25. Profesora: ¡No! Ya lo tienen ahí… sin decirme medidas. Miren, ustedes no utilizaron medidas. Utilizaron hechos geométricos, utilizaron hechos geométricos que tenemos.



…

30. Oñate: Al hacer el punto *D* y unirlo con *O* se… se da…

31. Torres: Para que se bisequen tiene que ser que se crucen […]

….

38. Torres: Para que se bisequen hay que hacer eso [señala con dos dedos lo que significa que dos segmentos se bisequen]. Mire, cuando se bisecan es que se cruzan.

…

41. Torres: Sí se bisecan, mire… vea, al cruzarse [toma un punto *C* de la circunferencia, traza las rectas *AC*, *CB* y *OC*]; éstos [señala lados *AC* y *CB*] se cruzan.

La profesora afianza la norma sociomatemática de usar varias formas de justificar [23] (VFJ) y de usar los hechos geométricos conocidos por la clase [25] (JHG). Los estudiantes se embarcan en una nueva exploración de la figura, en busca de propiedades que les permitan usar hechos geométricos conocidos. Oñate sugiere colocar un punto *C* en la circunferencia y unirlo con *O* [30] (EF), acción que Torres interpreta como la búsqueda de dos segmentos que se bisequen [31]. Por ello, intenta traer a colación un hecho geométrico relacionado con segmentos que se bisecan [31, 38] (UHG). Después, enriquece la representación en busca de otro camino que justifique la conjetura [41] (EF). Aunque es un intento fallido en busca de una propiedad con la que puedan justificar el hecho geométrico, es importante porque les da ideas para la siguiente exploración.

En la Figura 1 se muestran dos imágenes que ejemplifican el trabajo posterior de los niños en busca de argumentos geométricos (EBI) que justifiquen por qué el triángulo *ABD* es recto en *D*. Inicialmente, Torres propone hacer “otro triángulo rectángulo, en la parte de abajo, idéntico”. Para ello colocan un punto *C* en la circunferencia, procurando que no quede en el mismo semiplano determinado por la recta *AB* donde está *D*. Buscan hacer un triángulo parecido al triángulo *ABD* en el otro semiplano. Trazan las rectas *CO*, *CA* y *CB*. Luego, arrastran el punto *D* hasta que los puntos *C*, *O* y *D* quedan colineales (EF). Oñate exclama: “¡ah, se bisecan!” y Torres dice “¡ah, claro, ahí se bisecan los dos [segmentos]!”.

Figura 1: Exploración en busca de dos segmentos que se bisequen

Oñate se da cuenta de que se ha formado un cuadrilátero especial, pero no alude al hecho de que sea un cuadrado o un rectángulo, y pide a sus compañeros buscar en los apuntes de clase, qué hecho geométrico podrían usar (HG). Con ayuda de la profesora, elaboran la justificación:

50.	Oñate:	¿Y si hay un cuadrilátero? Vaya leyendo las citas, que ahí dicen muchas cosas.
51.	Torres:	¿Las que?
52.	Oñate:	Las citas, sí ahí [en el cuaderno].
53.	Oñate:	Si hay un cuadrilátero…
…		[La profesora se acerca al grupo]
58.	Profesora:	Bueno. Listo. Entonces ¿qué es lo que quieren justificar? ¿Esto? [Señala con el dedo el ángulo recto *D*]. Qué este triángulo sea rectángulo, ¿cierto? Hicieron las diagonales que se bisecan y son congruentes. Y cuando pasa eso… ese cuadrilátero, ¿el cuadrilátero es un…?
59.	Oñate:	Es un rectángulo.

…

65. Profesora: (…) ¿y qué pasa con los rectángulos?

…

70. Profesora: (…) ¿Cómo son sus ángulos?

…

72. Oñate: ¡Ángulos rectos!

…

75. Profesora: Entonces estoy justificando que todos estos ángulos son rectos [Los ángulos *A*, *B*, *C* y *D*] entonces [tapa la mitad del cuadrilátero] voy a justificar que este [Se refiere al ángulo *D*] ¿es?:

…

82. Torres: Recto.

83. Profesora: Recto, y ¿qué pasa con un triángulo que tiene un ángulo recto?

84. Oñate: Es un triángulo rectángulo.

En las intervenciones [50-53], los niños buscan hechos geométricos relacionados con cuadriláteros (HG). La profesora se acerca al grupo y les insinúa una vía para elaborar la justificación [58]. Oñate evoca el hecho geométrico que necesitan [59]. La profesora [65-70] busca que los estudiantes aludan a propiedades o hechos geométricos sobre los rectángulos para justificar por qué *D* es un ángulo recto [65]. Al hacer esto promueve el uso de una de las normas sociomatemáticas (JHG) y formula una nueva pregunta con el objetivo de que los estudiantes centren la atención en los ángulos del cuadrilátero *ABCD* [70]. Posteriormente, Oñate reconoce que los ángulos *A*, *B*, *C* y *D* son rectos [72], pues conocían esta propiedad de los rectángulos y la habían consignado en sus apuntes. Finalmente, la profesora orienta la discusión con una nueva pregunta que permite a Torres identificar el ángulo *D* como recto [82] y a Oñate usar la garantía anterior para llegar así a la justificación de la conjetura [83] (HG).

Reflexiones finales

Los análisis realizados hasta el momento nos permiten afirmar que la herramienta analítica parece ser útil para explicar la iniciación a la actividad demostrativa de estudiantes de primaria. Hemos podido detectar intervenciones en las que los niños exploran en busca de invariantes, enriquecen la figura para hacer conexiones con hechos geométricos, y con ayuda de la profesora justifican un invariante detectado usando un hecho geométrico conocido.

En el fragmento con el que se ejemplifica el análisis se aprecia que los niños logran hacer la justificación, pero no de manera autónoma. Sin embargo, valoramos su desempeño porque se hace evidente que ellos han empezado a refinar su lenguaje matemático, comienzan a adaptarse a las normas sociomatemáticas de la clase y quizá empiezan a comprender qué significa justificar con hechos geométricos. Estos son elementos considerados por Stylianides (2007) como centrales en el aprendizaje de la demostración.

REFERENCIAS

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P. y Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo. L. y Echeverry, A. (en evaluación). *Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Steffe, L.P. y Kieren, K. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 711-733.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Campo de problemas geométrico-algebraicos en la formación del profesor. Un posible estudio en entornos dinámicos

Rosa Ferragina y Leonardo Lupinacci
Universidad Nacional de General San Martín (Argentina
rosaferragina_1@hotmail.com, leolupinacci@yahoo.com.ar

Estudios preliminares realizados en el proyecto “Geometría y TIC: estudio didáctico de propuestas de enseñanza en la escuela secundaria”[1] permiten entrever que, tanto en la educación secundaria, como en la formación inicial de profesores, no se produce una conjunción de saberes entre la geometría métrica y la analítica, conformando así dos bloques separados de conocimiento, el segundo de los cuales, además, se sustenta solo en el desarrollo de técnicas algebraicas. El aporte de un entorno de geometría dinámica permitiría, a partir de las herramientas de construcción de figuras y sus transformaciones en tiempo real, la introducción de variaciones a las cuestiones geométricas iniciales, dando lugar a nuevos recorridos de estudio y a la conformación de un campo de problemas.

Marco de referencia

En los últimos años, una cantidad considerable de investigadores en Didáctica de la Matemática han considerado tema de interés la enseñanza de la geometría en la formación del profesor puesto que el estudio de la geometría favorece el desarrollo de la conjeturación, la argumentación deductiva y la modelización (e.g., Acosta, 2005, 2007; Santaló,1993; Santos Trigo, 2003; Villella,1999, 2001).

Para destacar la importancia de la geometría en la formación del profesor de matemática, exponemos nuestras coincidencias con la opinión de algunos didactas sobre el tema:

> La Geometría, puede mostrarse en su forma intuitiva, la primera históricamente, para llegar a la geometría en coordenadas y la introducción de las estructuras

[1] El proyecto se desarrolla dentro del área Didáctica de la Matemática del CEDE (Centro de Estudios en Didácticas Especificas) perteneciente a la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) en Argentina.

Ferragina, R. y Lupinacci, L. (2013). Campo de problemas geométrico-algebraicos en la formación del profesor. Un posible estudio en entornos dinámicos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 187-194). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

> algebraicas, pero estas comparaciones y variedad de posibilidades deben ser mostradas por el profesor de la materia, no esperar a que se las indique el profesor de didáctica o de historia y filosofía de las ciencias. (Santaló, 1993, p. 13)

Además, los objetos matemáticos que estudia la geometría pueden dibujarse o construirse y, a partir de la manipulación o modelización de los mismos, se logran desarrollos conceptuales que permitirán elaborar razonamientos de tipo deductivos (Villella, 2001).

Esta multiplicidad de sentidos que proponen los autores mencionados, podría permitir que en su formación, el futuro docente considere con mayor fundamento que la geometría debe estar presente en sus clases de matemática. En Argentina, pese a que los nuevos cambios curriculares para la enseñanza secundaria enfatizan el estudio de esta rama de la matemática, sin embargo, sigue siendo un área de escaso trabajo en las clases. Esto podría deberse a que los currículos vigentes para la formación básica del profesor, solo cuentan con dos espacios para el tratamiento geométrico. En el primer año de formación, el contenido se focaliza sobre la geometría euclidiana (una combinación entre métrica y sintética) y, en el segundo, se desarrolla la geometría analítica o de coordenadas que sustenta sus tratamientos en la elaboración de técnicas algebraicas. Entonces, esos dos espacios de formación quedan como dos bloques separados, produciéndose entonces una discontinuidad entre ambas, que no permite mostrar su complementariedad y evolución, división que se podría sustentar en un modelo epistemológico de referencia superficial (Gascón, 2002), que implica para el futuro profesor tanto una pérdida de conjunción de saberes, como de conocimiento y habilidades matemáticas.

La propuesta que aquí se presenta se orienta hacia la construcción de conocimiento pertinente (geométrico-algebraico) que recupere y concilie los marcos teóricos y las experiencias en el aula a través de desarrollos didácticos, tomando en cuenta que la formación de un profesor se sustenta en multiplicidad de dimensiones: una sólida base de conocimiento científico, conocimientos de pedagogía, didáctica del área que se ocupa de la especificidad del conocimiento matemático y sus prácticas de enseñanza, análisis del contexto social en que está inmersa la escolarización que es escenario de las futuras prácticas profesionales.

También es oportuno destacar que, en la formación del profesor, esta multiplicidad e integración de la geometría (en especial métrica y analítica) se podría potenciar con el empleo de algún software de geometría dinámica, puesto que adquirir conocimientos profesionales en el ámbito de estas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento propio de la matemática como en el análisis de los resultados de su implementación en la enseñanza. Cobra importancia entonces, aportar experiencias y espacios de reflexión en torno a la tecnología informática tanto para los docentes a cargo de la formación como para los estudiantes, futuros profesores:

> Se acepta que en el proceso de aprender la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados. Además, el desarrollo de herramientas tecnológicas está influyendo notablemente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. (Santos Trigo, 2003, p. 196)

Por ello, cuando se plantea la utilización de un software matemático, en la formación docente, se deberían construir nuevas praxeologías que incluyan los objetos computarizados como objetos con legitimidad matemática y, que además estén incluidos en las tareas, técnicas y tecnologías[2], para que de este modo el profesor (o futuro profesor) no minimice los efectos de su aplicación y restrinja su uso (Acosta, 2007).

En este artículo se describirá una nueva praxeología, en la formación de profesores, que para la resolución de un problema requiera del empleo de técnicas analíticas, pero que con la utilización previa de técnicas métricas se posibilite el diseño de estrategias, que luego se retomen con técnicas analíticas y, de este modo, se le dé al problema un mayor grado de generalidad, así como también se deje en evidencia la continuidad y/o complementariedad entre la geometría métrica y la analítica.

[2] En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), dentro de cada actividad matemática es posible identificar dos partes: la práctica matemática en sí, formada por las *tareas* y *técnicas* y, el razonamiento sobre dicha práctica, conformado por las t*ecnologías* y las *teorías*. La unión de estos dos aspectos de la actividad matemática, conforma una *praxeología matemática*.

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA

La praxeología anunciada se realizará a partir del siguiente problema analítico particular: Buscar los rombos que tienen dos vértices consecutivos en los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (3, 2)$, sabiendo que otro de los vértices está situado sobre el eje de abscisas.[3]

Resolución algebraica

Este problema puede resolverse analíticamente, sin realizar gráfico alguno, ni siquiera de los puntos dados a mano alzada. Entonces, lo primero sería considerar las condiciones de igualdad de lados del cuadrilátero:

$$\mathrm{d}(AB) = \sqrt{9+4}, \quad \mathrm{d}(AD) = \sqrt{x^2}, \quad \mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(AD), \quad \sqrt{9+4} = \sqrt{x^2}, \quad 13 = x^2$$

Por lo tanto, las posiciones del vértice D y del C correspondiente son:

$$D_1 = (\sqrt{13}, 0) \qquad C_1 = (3+\sqrt{13}, 2) \qquad D_2 = (-\sqrt{13}, 0) \qquad C_2 = (3-\sqrt{13}, 2)$$

Es decir que mediante este desarrollo analítico – algebraico, se han encontrado dos rombos que cumplen con las condiciones pedidas. Pero, un análisis del mismo problema empleando técnicas métricas con software dinámico, permitiría cuestionarse dónde ubicar el otro vértice sobre el eje de abscisas, ¿es éste consecutivo de A o de B?

Resolución métrica

Se puede llegar a la solución mediante el empleo de la técnica de los dos lugares geométricos. Si el vértice sobre el eje de abscisas es consecutivo de A, es posible comenzar construyendo una circunferencia (compás) de centro A, para trasladar la medida AB que, en una las intersecciones con el eje de abscisas, determina D. Luego, mediante la construcción de rectas paralelas, se determina el vértice faltante. Utilizando técnicas similares se logra llegar a la solución existente cuando el vértice sobre el eje de abscisas es el consecutivo de B.

[3] Problema propuesto por el Dr. Josep Gascón en el marco de la Escuela de Invierno de la Universidad Nacional de San Martín (Gascón, 2007).

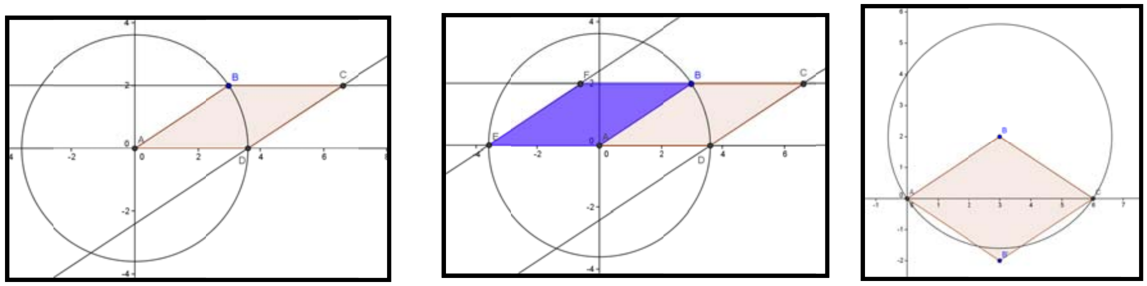


Figura 1: Construcciones por medio de la técnica de los dos lugares geométricos

Es decir, que si se realiza una resolución mediante técnicas métricas, con una construcción en un software de geometría dinámica[4], intervienen técnicas, como la conjunción de dos lugares geométricos, que podrían resultar equivalentes a las condiciones analíticas. Podría analizarse si la cantidad de soluciones que se determinan son las mismas, siguiendo una modelización algebraica o bien realizando la construcción dinámica. En el problema presentado, es posible evidenciar que sería conveniente volver sobre la resolución analítica para analizar de qué forma se obtendría la tercera solución encontrada. Esto estaría poniendo de manifiesto la complementariedad entre ambos tipos de técnicas, puesto que un problema que requiere la utilización de técnicas analíticas para ser resuelto con generalidad, podría necesitar de técnicas métricas para diseñar estrategias de resolución del ámbito analítico (Gascón, 2002).

De la exploración de un problema hacia el estudio en un campo de problemas

Los programas de geometría dinámica, como GeoGebra, permiten tener como primer contacto con el problema un trabajo exploratorio mayor al que se puede realizar en lápiz y papel, puesto que:

> La geometría dinámica constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos que utiliza nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción. (Acosta, 2005, p. 123).

[4] Para este trabajo se ha utilizado el software GeoGebra 4.2.

Estas nuevas cuestiones pueden surgir con la incorporación de la geometría dinámica, puesto que se hace necesario no sólo modificar las prácticas de enseñanza matemática (en todos los niveles), sino también determinar qué matemática se debería enseñar con esta herramienta (Acosta, 2005, 2007). Para que esta reformulación sea efectiva en la formación docente, resulta necesaria la creación de nuevas praxeologías, que posibiliten retomar problemas matemáticos que en algún momento de su estudio, quedaron sin resolver por limitaciones de las técnicas matemáticas disponibles, sean analíticas o métricas (Gascón, 2002).

Por ejemplo, una variante del problema anterior es: Buscar los rombos que tienen dos vértices consecutivos en los puntos $A = (m, 0)$ y $B = (3, 2)$, sabiendo que el otro vértice consecutivo de A, llamado $D = (x, 0)$, está situado sobre el eje de abscisas. Esta modificación permite implementar otras técnicas para explorar nuevos lugares geométricos que se darían con la relación existente entre las abscisas de A y D, para luego formular una tecnología basada en la dependencia funcional de las mismas desde la perspectiva analítica.

Resolución dinámica

Se realizan construcciones análogas a las del enunciado original, pero ahora se ha incorporado un deslizador ***m***, que para el problema representa el parámetro ***m*** correspondiente a la abscisa del punto A.

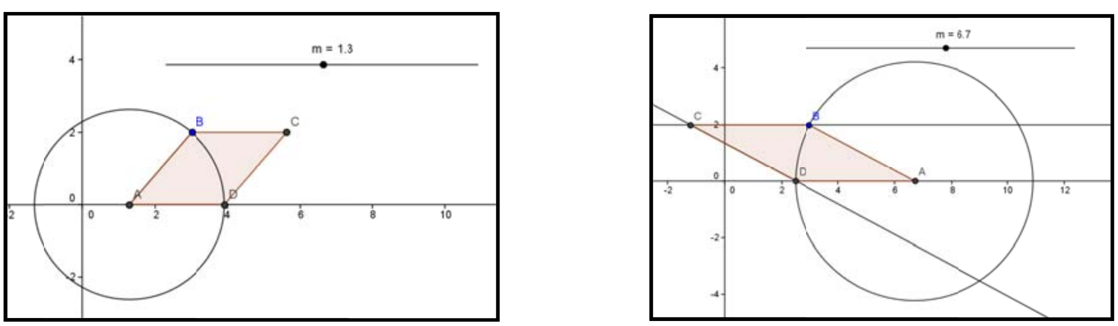


Figura 2: Incorporación de un parámetro en la construcción

El dinamismo del software posibilita visualizar las múltiples soluciones para los distintos valores de ***m*** y, también, conjeturar una posible relación existente entre la posición del vértice A con la del vértice D. Esta potencial relación sólo dependería de las abscisas de los puntos A y D. GeoGebra permite utilizar una técnica para determinar la existencia de una relación entre dos objetos construidos, que consiste en la construcción de un punto dinámico. Se ingresa entonces, en la barra de entrada el punto P con las componentes: (x(D), x(A)).

Cabría preguntarse ahora qué tipo de curva es la que se muestra y cómo se podría obtener esta relación en términos de las abscisas de A y D.

Resolución algebraica

Con las condiciones del enunciado, se expresan las medidas de los lados y se igualan ambas distancias:

$$\sqrt{(m-3)^2+4} = \sqrt{(m-x)^2} \Rightarrow -6m + 2mx = x^2 - 13 \Rightarrow m = \frac{x^2-13}{2(x-3)}$$

Se ha logrado una expresión que indica la relación existente entre las abscisas de los puntos D (x) y A (***m***). Ingresando esta expresión en la barra de entrada, podemos visualizar que su gráfica se corresponde con la trayectoria descripta por el punto P. Cada una de las soluciones geométricas, determina una de las ramas de la gráfica de la función.

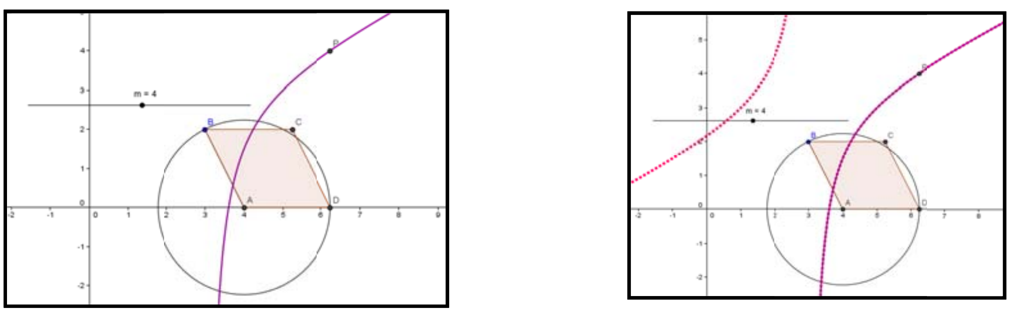


Figura 3: Rastro que deja el punto dinámico y superposición del rastro con la relación funcional encontrada

Otras posibilidades para estudiar en este campo de problemas son: ¿Qué ocurriría si se intercambian las componentes del punto dinámico P? ¿Por qué si se considera el punto D como consecutivo de B, se obtiene una recta en la trayectoria del punto P?

CONCLUSIONES

De un modo general, nos propusimos reflexionar sobre la revalorización de la geometría tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, para el ámbito de la formación de profesores, que posibilita: la elaboración de conjeturas como un proceso previo a una formalización algebraica, la efectividad de una herramienta tecnológica para la construcción de conocimiento geométrico cuando se la implementa en praxeologías que permitan un uso significativo.

De un modo específico, hemos propuesto, para la formación inicial de profesores, el trabajo sobre problemas geométricos que pueden evolucionar en un campo de problemas geométrico-algebraicos, tanto por su potencialidad en la exploración como por la elaboración de conjeturas y modelos, en una integración con entornos de geometría dinámica y con las prácticas de enseñanza en las aulas.

REFERENCIAS

Acosta, M.E. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Revista Educación Matemática, 17*(3), 121-140.

Acosta, M.E. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Ruiz, A. Estepa y F. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85-100). Jaén, España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2002). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático. En *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales N°28.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Documento recuperado de:
http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/DISERTACIONESMATEMATICAS_28.pdf

Gascón, J. (en prensa). El proceso de algebrización de las matemáticas escolares. En *Escuela de invierno de Didáctica de la Matemática.* Buenos Aires, Argentina.

Santaló, L. (1993). *La geometría en la formación de profesores.* Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Santos Trigo, L. (2003). Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos. *Boletín de Asociación Matemática Venezolana, 10*(2).

Villella, J. (1999). Cuando la geometría es el tema de la reflexión matemática. En *Documentos para la capacitación docente*. *UNSAM.* Buenos Aires, Argentina: Baudino Ediciones.

Villella, J. (2001), *Uno, dos, tres… geometría otra vez*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.

FRACTAL: FORMAS DE RECONOCER EL MUNDO A TRAVÉS DE CÁLCULOS MATEMÁTICOS TOTALMENTE NUEVOS Y ATRACTIVOS LA AVENTURA DEL SABER

Grupo de Matemáticas "Henry Hopf"[1]
C.E.D. Colegio Villas del Progreso, Sede B, Jornada Tarde
angaritacervantes@gmail.com, mastervidepr@gmail.com

El Grupo de Matemáticas "Henry Hopf", iniciado en 2011, pretende responder el cuestionamiento: ¿Es posible conocer y aplicar los conceptos de la teoría de los fractales a nivel elemental, de forma que puedan generarse nuevos conocimientos en el contexto de los estudiantes? En este artículo, compartimos diversas actividades que nos han permitido comprender algunas nociones y elementos que hacen parte de la mencionada teoría.

JUSTIFICACIÓN

Las discusiones ulteriores a la decisión de implementar la reorganización curricular por ciclos escolares, nos ha llevado a preguntarnos qué es necesario, indispensable y pertinente para nuestros estudiantes tratándose del conocimiento que pretendemos impartir en nuestras cátedras.

En los últimos siglos, se le ha exigido a la matemática contribuir con la solución de problemas reales; en el sentido de que aporte nuevas formas de explicar la realidad en la que estamos inmersos.

Nuestros estudiantes deben ser parte de esta inquietud social, de forma que reconozcan las necesidades del mundo, y vean que pueden aportar significativamente a las soluciones que se requieren. No solo vean, sino que identifiquen una de las tantas formas en las que pueden contribuir de manera provechosa a la sociedad. Como fundador del Grupo de Matemáticas "Henry Hopf", considero que esto se logrará de manera efectiva si compartimos con ellos las formas actuales de ver el mundo que, si bien están basadas en los viejos pilares

[1] El grupo de docentes y estudiantes está conformado por: Rafael Angarita, Leidy Argüello, Yuliana Higuera, Angie Campero y otros.

Grupo de Matemáticas "Henry Hopf". (2013). FRACTAL: formas de reconocer el mundo a través de cálculos matemáticos totalmente nuevos y atractivos. La aventura del saber. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 195-202). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

de las estructuras algebraicas (no consideradas a cabalidad en nuestros planes de estudio), implican paradigmas que nos alejan de la concepción de un mundo rústico, lineal y determinista a la que los tenemos atados.

Uno de los paradigmas más notorios en este sentido, es el resultante de la teoría de los sistemas dinámicos, específicamente en el subcampo de las formas fractales. La intención del Grupo Hopf, es explorar las nociones de esta nueva matemática, mostrando que sus conceptos se pueden tratar a nivel elemental, proveyendo una nueva manera de ver, analizar y describir el mundo.

Compartiremos con el lector algunas de las actividades que nos han permitido reconocer ciertas propiedades de las formas fractales; en particular, de los fractales clásicos.

PRECONCEPTOS

En este artículo recurrimos a la definición de fractal dada por Mandelbrot:

> Fractal (del latín Fractus, que significa irregular, quebradizo) es el conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional (no entera). Los fractales son el resultado de la repetición sin fin de patrones geométricos que se suponen de forma indefinida. (Mandelbrot, 1982)

La dimensión puede determinarse desde diversas aproximaciones; entre ellas, las particularmente útiles con los fractales clásicos, son:

1. La relación que determina la dimensión D de un objeto geométrico, usando un recubrimiento de N piezas de tamaño característico R:

$$N = R^D$$

2. Una definición más general es la llamada *dimensión por cajas o de capacidad*, donde también se pretende determinar el número $N(r)$ mínimo de cajas o bolas de radio r, necesarias para recubrir completamente el conjunto de puntos que forma nuestra forma fractal. Matemáticamente se determina por medio de la expresión:

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{r}}$$

De hecho, las dos formas de determinar la dimensión coinciden para objetos totalmente autosimilares.

ACTIVIDADES

Explicaremos tres de las actividades trabajadas en el grupo, y también la manera en la que ayudan a comprender las características según las cuales una forma se considera fractal.

Tarjetas fractales

Esta actividad se toma del laboratorio de fractales, desarrollado en el sitio http://classes.yale.edu/fractals/Labs/PaperFoldingLab/PFLProcSierp.html. El proceso para construir el equivalente al triángulo de Sierpinsky es:

(1) doblamos una hoja por la mitad, hacemos un corte, desde la mitad del doblez, y hasta la cuarta parte de la longitud de la hoja; (2) doblamos una de las mitades, y luego llevamos ese doblez hacia "dentro", de forma que quede como en la imagen. En la imagen doblamos la mitad izquierda, de ahora en adelante, debe doblarse siempre esta mitad; (3) cortamos nuevamente cada mitad: la parte izquierda hasta la mitad del tamaño del corte. En la mitad derecha, hasta la octava parte. De cada corte, doblamos y llevamos hacia dentro la mitad izquierda; (4) el proceso puede continuarse cuantas veces se quiera. A continuación se presenta las imágenes de la secuencia de indicaciones para obtener una tarjeta como la que se muestra al final.

A partir de esta tarjeta, que representa el triángulo de Sierpinsky, podemos determinar las siguientes características:

> Calcular la suma de las longitudes de los cortes realizados, suponiendo que el proceso se realiza muchas veces.

Por simplicidad, supongamos que el primer corte tiene longitud 2 unidades; así, el primer doblez tiene longitud 1. Teniendo en cuenta que cada corte que se realice es de la mitad de la longitud del corte anterior, en la siguiente tabla se muestra la lista de las longitudes de los cortes en cada paso:

Paso	Número de cortes	Longitud del corte
1	1	$2=2^1$
2	3	$1=2^0$
3	9	$\frac{1}{2}=2^{-1}$
4	27	$\frac{1}{4}=2^{-2}$
	$\cdots$	
N	3^{n-1}	$2=2^{2-n}$

Por tanto, la suma de las longitudes de los cortes es:

$$2+3(1)+9(\frac{1}{2})+27(\frac{1}{4})+...+3^{n-1}(\frac{1}{2^{n-2}})+...$$

Factorizando:

$$2(1+\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2+...)$$

La suma dentro del paréntesis es una progresión geométrica con radio 3/2, por lo tanto, diverge. Esto implica que la longitud de los cortes es infinita.

Dejamos a los lectores el cálculo de los siguientes:

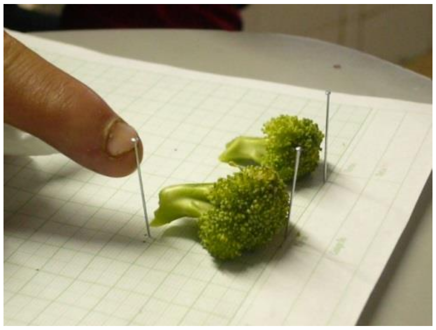
a) Calcular la longitud de la suma de los bordes resultantes de cada corte (En cada corte se generan tres bordes), suponiendo que el proceso se realiza muchas veces.

b) Al hacerse los dobleces se crean espacios huecos. Suponiendo que se cubren con cuadros de papel, podemos determinar el área de la figura obtenida.

c) Teniendo en cuenta la suposición del inciso anterior, podemos determinar el volumen de la figura resultante.

Dimensión fractal de un brócoli

Podemos usar artesanalmente la definición de dimensión por capacidad en un brócoli. El brócoli es un ejemplo muy cercano de lo que es un fractal, puesto que parte del brócoli es similar al brócoli completo. En este caso, nuestros estudiantes desarrollaron el siguiente algoritmo para determinar una aproximación de su dimensión fractal: (1) usando papel milimetrado, determinar la longitud más larga necesaria para "construir" una caja que contenga completamente al brócoli; (2) dividimos el brócoli en partes más o menos iguales, ¿cuántas? Las que nos permita la forma del brócoli; (3) Tomamos una de ellas, es nuestra decisión tomar la más grande o la más pequeña, y repetimos el primer paso; (4) continuamos este proceso hasta donde lo permita la forma y el tamaño del brócoli, y registramos en una tabla de tres columnas tituladas: "Número del paso", "Número de partes" y "Longitud del lado".



Aplicamos entonces la definición de dimensión fractal. En este punto podemos usar el método de aproximación que consideremos adecuado. El proceso tuvo una segunda parte en la que los estudiantes dibujaron la silueta del trozo de brócoli y contaron la cantidad de cuadritos que quedaban encerrados en ella.

L-Sistemas

En 1968 Aristid Lindenmayer propone una herramienta que permite estudiar el desarrollo de ciertas especies de plantas, por medio de axiomas o reglas de repetición. El ejemplo clásico es el juego de palabras, que comienza con las letras *a* y *b*. Para cada letra se especifica un axioma de repetición; por ejemplo, cuando aparezca la letra *a*, la podemos remplazar por *b*, y si tenemos la letra *b*, podemos remplazarla por las letras *ab*. Si queremos desarrollar las primeras etapas del juego, nos quedaría:

a *b* *ab* *bab* *abab* …

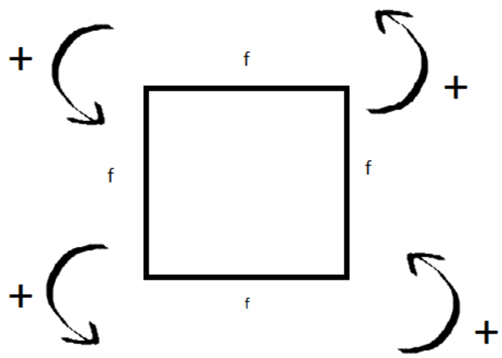
El programa Fractint trae consigo sintaxis de programación que permite la simulación de L-Sistemas, con los cuales es posible generar formas fractales y, muy importante, aproximaciones de formas naturales, como árboles, plantas, entre otros. Recomendamos al lector seguir el tutorial de Fractint en la dirección http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo2/frames.htm, en donde encontrará las nociones básicas del manejo de L-Sistemas en fractint. Solo mencionaremos aquí los comandos básicos de Fractint, para generar estos L-Sistemas:

{}:	Indican el inicio y terminación del comando de generación.
Angle *x*:	Esta palabra, seguida por el valor *x*, hace que el programa internamente calcule el ángulo de giro; es decir, ángulo de giro 360/*x*.
Axiom:	Aquí se indica el axioma de formación principal. Posteriormente se pueden indicar otros axiomas de repetición.
F:	El sistema dibuja una línea recta.
+:	El sistema gira el cursor tantos grados como indique la sentencia “Angle *x*” en el sentido contrario al de las manecillas del reloj mecánico.
–:	El sistema gira el cursor tantos grados como indique la sentencia “Angle *x*” en el sentido de las manecillas del reloj mecánico.
@*x*:	El valor de *x* suele ser un número entre 0 y 1. Indica un factor de reducción en la línea que se dibuja.
G:	Se mueve hacia delante sin dibujar nada.
[]:	Dentro de estos corchetes se suelen escribir códigos. Lo que el programa interpreta es: desarrollo el código que hay dentro de los corchetes, luego regreso el cursor al inicio del corchete, y continúo con el código que sigue después del corchete. Este comando es especialmente útil cuando se hacen códigos para simular plantas.

Por ejemplo, para construir un cuadrado, el código es:

Cuadrado{ Angle 4 Axiom f+f+f+f }

Veamos: Al indicar “Angle 4”, el sistema internamente hace 360/4 = 90, por lo tanto, los giros serán de 90º. Ahora, el axioma es “f+f+f+f”, es decir, el programa interpretará:

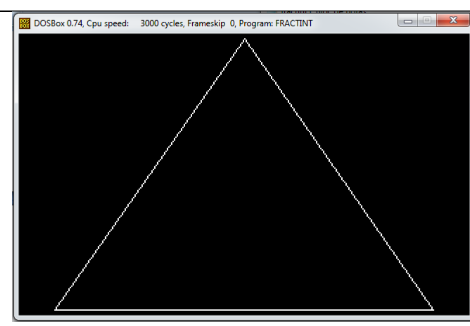


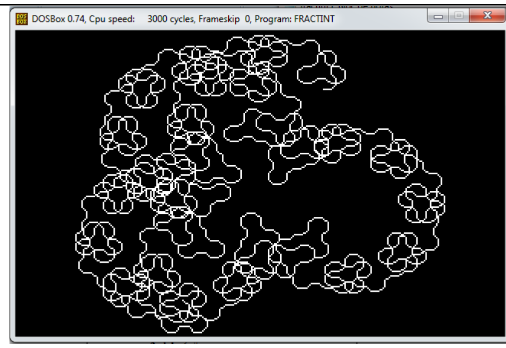
Para terminar, a continuación presentamos cuatro figuras y el código con el que simulamos cada una. Además, invitamos al lector a que descargue el programa, puede hacerse de forma gratuita en el enlace

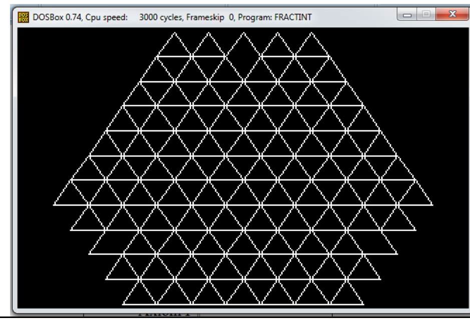
http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html

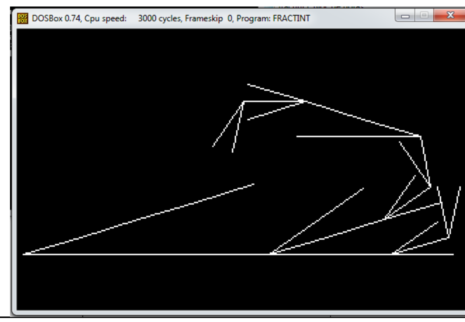
Una vez instalado el programa, pueden probar con los códigos que les proporcionamos y esperamos que esto sea incentivo para que traten de escribir los suyos.

Código	Imagen

Progreso{
Angle 3
Axiom f+f+f
F= f+f+f+f+f+f
}
	

XYC{
Angle 8
Axiom f+f+f+f
F= f+f+f+f-f-f+f
}
	

Angie{
Angle 3
Axiom F
F= f+f-f+f+f-f+f
}
	

Anxe {
Angle 18
Axiom X
X = [+f] f [x+] +x+x
F= f f
}
	

REFERENCIA

Mandelbrot, B. (1982). *Fractal geometry of nature*. New York, EUA: W. H. Freeman and Company.

Logros y desaciertos cuando se aprende a demostrar

<u>Luis Lara</u> y Carmen Samper
Colegio Ciudadela Educativa de Bosa IED, Universidad Pedagógica Nacional
luisfernandolara26@yahoo.es, csamper@pedagogica.edu.co

Se presentan algunos de los resultados obtenidos en un estudio en el que se caracterizaron los argumentos de un grupo de estudiantes de educación básica secundaria cuando, en el marco de la actividad demostrativa, formularon una conjetura como respuesta a un problema y la justificaron. En particular, se muestran dos momentos que proporcionan evidencia de que los estudiantes entendieron qué es demostrar y cómo se construye una demostración, y de que el proceso vivido por uno de ellos se vio afectado por un conflicto epistémico.

Introducción

Este artículo se basa en un trabajo de grado de maestría (Fonseca y Lara, 2013), adscrito al grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ·G*) de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Exponemos aspectos relacionados con los argumentos producidos por un grupo de estudiantes de educación básica secundaria cuando construían una demostración en un entorno que favoreció la actividad demostrativa.

Planteamiento del problema

Investigadores en educación matemática, como Pedemonte (2005) y Godino y Recio (2001), identifican problemáticas de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Hanna (1996, citada en Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2007) señala que en las pocas escuelas donde se trata la demostración, a pesar de ser un aspecto central en matemáticas, prevalece el aprendizaje memorístico lo cual carece de valor educativo. Además, Jones (2000) menciona que los estudiantes no ven la necesidad de hacer demostraciones deductivas porque se privilegia la verificación y se deja a un lado la exploración y la explicación. Para enfrentar esta realidad desde una perspectiva sociocultural del aprendizaje, el grupo *Æ·G* ha propuesto estrategias metodológicas que favorecen la actividad demostrativa tanto en el contexto universitario como en el escolar y, por ende, el desarrollo de habilidades argumentativas.

Lara, L. y Samper, C. (2013). Logros y desaciertos cuando se aprende a demostrar. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 203-210). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Nuestro interés como profesores de secundaria era proponer tareas en el aula que favorecieran la argumentación entre estudiantes porque esta es un elemento esencial para entender lo que es una demostración y aprender a construirla. Teniendo en cuenta todo lo anterior, uno de los aspectos que analizamos en el trabajo de grado fue el tipo de argumentos que producen los estudiantes cuando trabajan en grupo en un ambiente que propicia la actividad demostrativa.

Marco de referencia conceptual

Actividad demostrativa

El grupo de investigación Æ·G propone, para el ámbito escolar y universitario, lo que denominan *actividad demostrativa*, constructo complejo con el cual, siguiendo a de Villiers (1993), consideran la demostración como medio de comunicación, validación, explicación, sistematización y descubrimiento. La actividad demostrativa involucra dos procesos no necesariamente independientes: la *conjeturación*, cuyo producto es una conjetura, y la *justificación* cuyo resultado es la validación de la conjetura, ya sea dentro de un sistema teórico o con explicaciones empíricas, según el respectivo nivel escolar (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2012).

Modelo de Toulmin

El modelo de argumentación propuesto por Toulmin es una herramienta útil para analizar los argumentos que los estudiantes producen durante el desarrollo de las acciones de la actividad demostrativa. Asumimos que un *argumento* es un enunciado oral o escrito, utilizado para convencerse o convencer a otros. Según el modelo, un argumento tiene estructura ternaria: los *datos* (D) son información que dan lugar a la *conclusión* (C) y la *garantía* (G) es la regla de inferencia que relaciona los *datos* con la *conclusión*. Estos tres elementos no necesariamente están explícitos en un argumento. La manera como estos se estructuran y relacionan define el *tipo de argumento*: deductivo, abductivo o inductivo (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2012). En los esquemas con los que representamos cada tipo de argumento (ver Figuras 1, 2 y 3) destacamos el hecho de que en cada caso, el producto es diferente y se indica en un recuadro punteado.

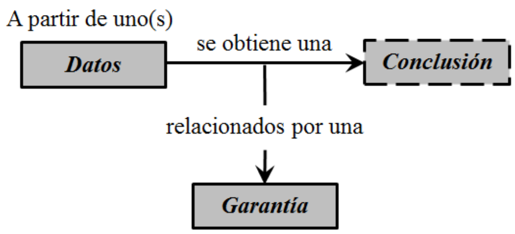


Figura 1: Esquema de argumento deductivo

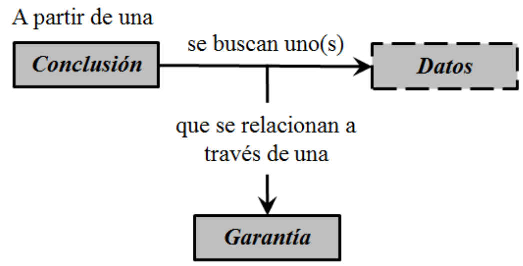


Figura 2: Esquema de argumento abductivo

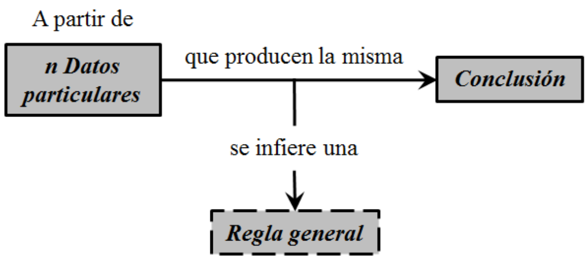


Figura 3: Esquema de argumento inductivo

MARCO METODOLÓGICO

Nuestro estudio adoptó una metodología cualitativa, centrada en la corriente descriptiva-interpretativa, que correspondió a un estudio de caso no participante y estructurado (Cohen y Manion, 1989/1990). Fue estructurado porque usamos la aproximación metodológica del grupo Æ·G con el fin de generar un entorno favorable para aprender a demostrar.

Diseñamos una secuencia didáctica y la implementamos en el segundo semestre de 2011, durante aproximadamente dos meses, en el Colegio Ciudadela Educativa de Bosa I.E.D., con estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria (14-16 años). El estudio de caso se hizo sobre la actividad de un grupo de tres estudiantes del curso, Diana, Dayana y Cristian, cuando resolvieron dos problemas.

El desarrollo del estudio se hizo en dos fases. En la primera fase, diseñamos e implementamos la secuencia didáctica cuyo propósito era construir un sistema teórico local para que los estudiantes, en un momento determinado, pudieran formular y demostrar una conjetura. Para ello, se generó un entorno favorable para aprender a demostrar caracterizado por tres elementos (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2012): *las tareas* favorecieron la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas en forma de condicional; *la interacción social en el aula* entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes permitió la comunicación y discusión de ideas que se validaron o rechazaron a través de la argumentación; *el uso de geometría dinámica* (Cabri) favoreció la construcción y exploración de propiedades geométricas y permitió que los estudiantes produjeran conjeturas que se organizaron en un sistema teórico local con apoyo del profesor.

En la segunda fase, grabamos en audio y video cada una de las sesiones del desarrollo de la secuencia didáctica, recogimos las producciones escritas de los estudiantes, transcribimos las dos últimas sesiones correspondientes al proceso de conjeturación y al proceso de justificación, y finalmente las analizamos.

Como resultado del estudio de la situación: *Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma*, los estudiantes formularon una conjetura aproximada a "Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo". Luego, justificaron dicha conjetura usando un esquema de tres columnas, "esquema-deducción" (Samper, Molina y Echeverry, 2011), en el que consignaron el dato, la garantía que proviene del sistema teórico local conformado y la conclusión de sus argumentos respectivamente en las columnas tituladas "Qué sé", "Qué uso" y "Qué concluyo".

ANÁLISIS DE DATOS

A continuación presentamos, a modo de ejemplo, el análisis realizado a un proceso de justificación de la conjetura que habían obtenido; en dicho proceso logramos identificar dos momentos en los que encontramos evidencia de argumentos y de comprensión de lo que significa demostrar en matemáticas. En el primer momento, ellos formularon tres argumentos completos, ligados con la información suministrada en la conjetura pero no encadenados como para convertirse en pasos de la respectiva justificación. En un segundo momento, un integrante del grupo propone escoger uno de los tres argumentos completos para determinar el primer paso de la justificación; luego, de manera colectiva, plantean los demás pasos para formular la justificación. Después identificamos el conflicto epistémico que obstaculizó la construcción de la justificación.

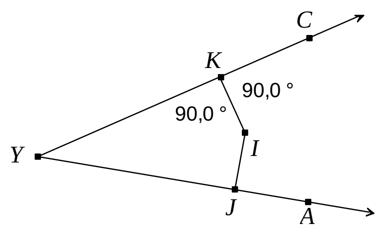
Primer momento: Formulan tercer argumento ligado a la situación

Los estudiantes formularon tres argumentos ligados a la situación de estudio (ver Figura 4). En lo que sigue, Cristian y Diana escriben el tercer argumento.

394. Cristian: La definición de ángulos congruentes. Cópiela que esa es la que vamos a hacer. La que vamos a usar.

395. Diana: [Escribe “D. de Ángulos congruentes” en la columna *Qué uso*, tercera línea.]

396. Cristian: Aaaah. Pues lo mismo que acá [señala la columna *Qué sé* del segundo argumento: $\angle IKC$ 90º, $\angle IKY$ 90º.]



397. Diana: Que son ángulos rectos. Algo así había dicho.

[…]

405. Diana: Ya, ya, ya. [Escribe $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos.] ¿Entonces? ¿Qué concluiríamos? Que el ángulo *C*, *K*, *I* es congruente con *Y*, *K*, *I* [escribe $\angle CKI \cong \angle YKI$.] Tenemos tres hipótesis. Ahora, ponemos a Dayana que saque [elija] cuál es.

Para este tercer argumento, Cristian desarrolla un argumento deductivo completo que Diana lo transforma pues escribe que $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son rectos (*datos*). Al inicio de este diálogo [394], Cristian le solicita a Diana que copie la definición de ángulos congruentes pues esa es la que van a usar (*garantía*); al final [405], Diana escribe $\angle CKI \cong \angle YKI$ (*conclusión*). Cuando Diana menciona que hay que elegir una de las tres hipótesis [405] se evidencia que son conscientes de que hay que organizar la justificación para usar los tres argumentos escritos en la hoja.

	Qué sé	Qué uso	Qué concluyo	
	$\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$	D. Segmentos congruentes	$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$	
	$\angle IKC$ 90° $\angle IKY$ 90°	D. Rectas perpendiculares	$\overline{IK} \perp \overline{YC}$	Tres argumentos
	$\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos	D. Ángulos congruentes	$\angle CKI \cong \angle YKI$	
(1)	$\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$	D. Segmentos congruentes	$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$	
	IK distancia del punto a la recta	D. Distancia de un punto a una recta	$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$	
	IJ distancia del punto a la recta	D. Distancia de un punto a una recta	$\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$	
	$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$	D. Rectas perpendiculares	$\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY$, $\angle IJA$ son ángulos rectos	Justificación
	$\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY$, $\angle IJA$ son ángulos rectos	HG. Ángulos rectos	$\angle IKC \cong \angle IKY$ $\angle IJY \cong \angle IJA$ $\angle IKC \cong \angle IJY$ $\angle IKY \cong \angle IJA$	

Figura 4: Argumentación plasmada en el esquema-deducción

Segundo momento: Elaboran segundo y tercer paso de la *justificación*

En el diálogo que sigue, los estudiantes escriben la *conclusión* del segundo paso de la justificación cuyo *dato* es "*IK* distancia del punto a la recta" y cuya *garantía* es la definición de distancia de un punto a una recta, y proponen el tercer paso de la justificación.

814. Diana: *I*, *K* es perpendicular con *Y*, *C* [en la columna *Qué concluyo* del segundo paso, escribe "$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$".] […] Ahora escribimos eso [$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$] acá [en la columna *Qué sé* del tercer paso.]

815. Cristian: No.

816. Diana: ¿Qué más nos falta?

817. Cristian: Se hace lo mismo con el de abajo [con el $\overrightarrow{YA}$ para plantear que $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.]

[…]

822. Diana: Sí. [Como tercer paso, escribe en la columna *Qué sé*: *IJ* distancia del punto a la recta; *Qué uso*: Definición distancia de un punto a una recta; *Qué concluyo*: $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$] Ya. Ahora, eso sí lo escribimos aquí abajo [en la columna *Qué sé* del cuarto paso], esas conclusiones.

Cristian rechaza la propuesta de Diana de colocar como *dato* del tercer paso $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y propone formular el mismo argumento con respecto al $\overline{IJ}$ y al $\overrightarrow{YA}$. Diana escribe su argumento en el esquema-deducción [822]: en la primera columna los *datos*; en la segunda, la *garantía*; y en la tercera, la *conclusión*. De esta forma, queda establecido el segundo paso de la justificación. Cuando termina de escribir este paso, así como en la primera intervención de Diana [814], se evidencia que ella comprende que una justificación implica el encadenamiento de argumentos porque menciona que la *conclusión* que acaban de obtener pasa a ser el *dato* de otro paso.

Conflicto epistémico sobre la bisectriz

Las siguientes intervenciones de Cristian, muestran lo que denominamos *conflicto epistémico* que consistió en rechazar la representación del rayo en el interior del ángulo pues no comprendía que dibujarlo no significaba atribuirle la propiedad de ser bisectriz, propiedad que finalmente debía justificar.

103.	Cristian:	¿A qué es lo que tenemos que concluir? El punto está sobre la bisectriz. O sea que aún no sabemos la bisectriz. O sea, no hemos sacado esto [borra la bisectriz del $\angle CYA$.] Aún no hemos sacado esto. […]
		[…]
472.	Diana:	Yo veo dos triángulos congruentes: *J*, *Y*, *I* y *I*, *K*, *Y*.
473.	Cristian:	No porque… es que Diana se está confundiendo con esta línea [$\overrightarrow{YI}$ bisectriz del $\angle CYA$.]
474.	Profesor:	Déjenla. Bueno, no sé.
475.	Cristian:	No, porque esta línea aún no existe [indica con el cursor la bisectriz del ángulo.]

Este conflicto, que requirió la intervención del profesor para sobrepasarlo, se convirtió en obstáculo para desarrollar la justificación como Diana quería, usando la congruencia de triángulos. Una vez aclarado que dibujar el rayo no implicaba asegurar la propiedad de ser bisectriz, pudieron proceder con el plan de Diana y terminar la justificación.

CONCLUSIONES

Identificamos durante el proceso de justificación que, en el primer momento, los estudiantes hicieron *argumentos* ligados a la *situación* del problema (*AS*), mientras que en el segundo, ellos plantearon *argumentos paso* de la justificación (*AP*). En la Figura 4 se evidencia cómo los estudiantes reutilizaron sus *AS* escribiéndolos como *AP*, en el lugar correcto de la justificación final. El análisis nos permite afirmar que Cristian y Diana lograron comprender lo que es una demostración y aprendieron a producirla. Ambos estudiantes reconocieron el papel de cada parte de la conjetura, escrita en forma de condicional, que debían justificar, es decir, entre lo dado (antecedente) y la conclusión (consecuente). Luego de formular los tres *AS*, Cristian menciona la necesidad de formular más argumentos para poder llegar a la conclusión de esta conjetura. Diana entiende que para justificar la conjetura se deben encadenar argumentos pues indica que la *conclusión* de un paso pasa a ser el *dato* de otro.

REFERENCIAS

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 305-323). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa* (Francisco Agudo López, Tr.). Madrid, España: Ediciones La Muralla (primera edición en inglés, 1989).

Fonseca, J. y Lara, L.F. (2013). Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Godino, J. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-3), 55-85.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *25*, 313-348.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (evaluación). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 1-16). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2011). *Elementos de geometría*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon,* 26, 15-29.

LA VISUALIZACIÓN NO ES UNA ILUSIÓN ÓPTICA

José Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria-UNIFRA
leivasjc@unifra.br

Este artículo presenta resultados de una investigación cualitativa: un estudio de caso realizado en el Brasil, con siete estudiantes de maestría en educación matemática. El estudio se centra en la representación que se produjo en los inicios de un curso de geometría a cargo del investigador. Tratamos de distinguir ente visualización e ilusión óptica en dos representaciones presentadas a los estudiantes, una de una ilusión y otra, una representación geométrica. El análisis de las respuestas de los estudiantes mostró que el espacio de la representación no es evidente para el grupo investigado y que se requieren actividades visuales representativas con el fin de desarrollar la habilidad.

INTRODUCCIÓN

Hay figuras que despiertan un alto grado de curiosidad en la gente, específicamente en los estudiantes. En torno a tales figuras, generalmente, se suscitan discusiones sobre qué es lo que se observa, y se les atribuyen diferentes significados. Por ejemplo, la Figura 1 ilustra una imagen dual; para algunos representa un cáliz y para otros, dos perfiles muy cercanos. En la Figura 2 se muestran dos líneas rectas paralelas y otras que las cortan y pasan por el centro de la figura; éstas hacen parecer curvas a las dos líneas paralelas.

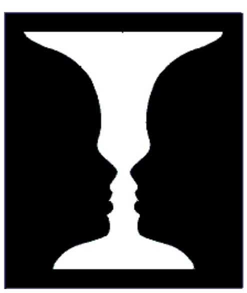


Figura 1: Cáliz (Recuperado de http://www.taringa.net/posts/imagenes/3383033/Ilusiones-optica.html

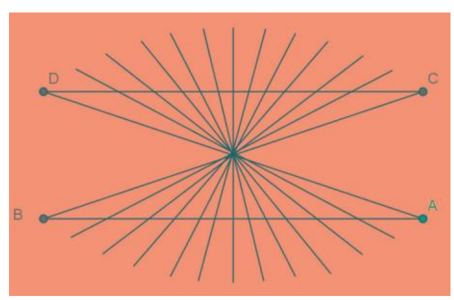


Figura 2: Paralelas y rectas

Leivas, J. (2013). La visualización no es una ilusión óptica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de* Geometría *y sus Aplicaciones* (pp. 211-218). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Esas figuras y muchas otras sirven para motivar esta ponencia cuyo título indica que intentaremos distinguir rápidamente visualización de ilusión óptica. Ambas figuras son representativas del tema denominado ilusión óptica. Obsérvese que la primera es una imagen cualquiera, mientras que la segunda es una representación matemática.

Las ilusiones ópticas han sido estudiadas por psicólogos desde hace mucho tiempo e indican que no siempre lo que se ve es lo que se piensa que es, debido a que nuestros ojos al fijarse en un objeto se acostumbran a él y el cerebro puede captar indicios no necesariamente correctos. En otras ocasiones, el cerebro puede llenar los vacíos existentes y producir una imagen falsa del objeto, constituyéndose así una ilusión óptica que no es el objeto de este artículo.

En este artículo, nos interesa traer algunos aspectos de la visualización, como campo de investigación existente desde hace algún tiempo en la educación matemática y, en particular, en geometría. En nuestras aulas, en todos los niveles educativos, los estudiantes encuentran dificultades para interpretar representaciones geométricas, es decir, visualizar objetos representados en el papel, ya sean planos o espaciales. A su vez, nos encontramos con profesores que no pueden representar adecuadamente entidades geométricas para sus estudiantes.

El artículo presenta una investigación con siete estudiantes de un programa de maestría, inscritos en un curso de geometría a cargo del autor. Todos los participantes eran profesores de educación básica en el Brasil. La investigación es de naturaleza cualitativa puesto que examina la interpretación de los individuos al inicio del curso, tratándose entonces de un estudio de caso. Les presentamos la Figura 3, clásica en los estudios de ilusión óptica, y verificamos cuáles eran sus interpretaciones. Luego se les dio una representación geométrica, Figura 4, y les pedimos que la interpretaran. Nuestra hipótesis era que los sujetos tendrían dificultades para interpretar esa representación geométrica. Así, nuestra pregunta de investigación fue la siguiente: ¿cómo interpretan los estudiantes investigados una representación geométrica dada?

A continuación, haremos algunas consideraciones sobre el tema de la visualización y también de la representación, para analizar las respuestas dadas por los individuos.

VISUALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN

Piaget e Inhelder (1948/1993) al tratar sobre la representación del espacio en los niños concluyeron que la percepción del espacio no conduce a su representación. Esto quiere decir que el hecho de que los niños perciban sensiblemente el espacio no garantiza que lo sepan representar. Para estos investigadores

> La percepción es el conocimiento de los objetos, que resulta de un contacto directo con ellos. La representación consiste, por el contrario, –sea al evocar objetos en su ausencia, sea al reproducir una percepción en presencia del objeto– en completar el conocimiento perceptual de los objetos, haciendo referencia a otros objetos no percibidos de inmediato. (p. 32)

Más aun, Piaget e Inhelder (1948/1993) afirman que la representación del espacio no es dada a priori, sino construida. En sus investigaciones verificaron que el niño construye la representación del espacio de manera inversa a la que se le presenta generalmente en la escuela. En la enseñanza de las matemáticas es usual presentar primero nociones de geometría euclidiana, y sólo después de ello tratar temas de geometría proyectiva (representación de sólidos usando perspectiva) y por último, ya en las matemáticas superiores, se presenta la topología (relaciones de vecindad, separación, orden, clausura y continuidad).

Con respecto al espacio perceptual y al representativo, Piaget e Inhelder (1948/1993) llegaron a la conclusión de que las imágenes de los objetos no son sólo resultado de la percepción, y que la construcción del espacio comienza en el plano de la percepción y continúa en el plano de la representación.

Los *Parâmetros Curriculares Nacionais* (MEC/SEF, 1998), documento nacional del Brasil que guía en alguna medida la educación básica, indican que el uso del computador permite generar ambientes de aprendizaje que hacen surgir nuevas formas de pensar y aprender, ya que “[D]esarrollan procesos metacognitivos, en la medida que el instrumento permite reflexionar sobre los contenidos presentados y sus formas de representación, lo que lleva al estudiante a ‘pensar acerca del pensar’” (p. 147).

Para desarrollar el pensar acerca del pensar y ser capaz de percibir y representar los objetos geométricos es necesario, en nuestra opinión, que desarrollemos la habilidad de visualización mediante diversas vías: usando tecnologías computacionales u otros recursos didácticos pertinentes.

En una primera reformulación de las normas planteadas por el *National Council of Teachers of Mathematics,* se destacó el pensamiento visual identificando "la geometría y el sentido espacial" lo que Costa (2000) enfatizó en el "uso de la visualización y el razonamiento espacial para solucionar problemas dentro y fuera de las matemáticas" (p. 162). La norma también señala el uso de la visualización y la modelación geométrica para resolver problemas.

Los expertos en matemáticas reconocen la utilidad de trabajar con objetos abstractos de origen concreto por cuanto la visualización hace explícitas posibles representaciones concretas que develan relaciones abstractas interesantes para el quehacer del matemático. Kilpatrick, Gómez y Rico (1994) señalan que la visualización es un área de investigación actual, y los estudios de Andrade y Nacarato (2004) indican la tendencia a la visualización y la representación debido al uso de la experimentación. En Gutiérrez y Boero (2006) también se resalta la estrecha relación entre la enseñanza de la geometría y la imaginación, intuición, visualización y representación espacial en el desarrollo del pensamiento geométrico.

Entendemos la visualización como "el proceso de formación de imágenes mentales, con el propósito de construir y comunicar cierto concepto matemático, con miras a ayudar en la resolución de problemas analíticos o geométricos" (Leivas, 2009, p. 22). Por lo tanto, es una habilidad que se puede desarrollar en la gente, incluso en quienes son invidentes, puesto que crean imágenes mentales de objetos geométricos mediante varios mecanismos que se pueden utilizar de la misma manera que los recursos materiales. Así, pues, hacemos una clara diferencia básica entre la habilidad de visualización, que se puede desarrollar, y las ilusiones ópticas, que dependen de la visión de la persona.

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN Y SUS RESULTADOS

La investigación tuvo lugar durante el primer semestre de 2013. A los participantes en el estudio se les distribuyó un cuestionario que debían responder y entregar al profesor-investigador. Se les pidió que cada quien respondiera sin consultar al compañero del lado. Se proyectó la clásica Figura 3 para que la observasen y respondiesen la pregunta: ¿Usted qué visualiza en la figura?

En 1915 W. E. Hill publicó por primera vez esta imagen, con la idea de que es difícil ver lo que debemos ver. Representa una chica hermosa mirando de lado, pero también puede representar la imagen de una anciana mirando al suelo. En realidad, la clave de la identificación está en la percepción de lo que se espera ver. Si el espectador se concentra en el collar de la joven, esto puede representar la boca de la anciana. El mentón y las mejillas de la niña representan la nariz de la dama.

Figura 3: La muchacha y la vieja (Recuperado de http://www.ilusionario.es/PERCEPCION/inver_percep.htm)

El protocolo de las respuestas está a continuación.

1. Estudiante 1: Figura con dos imágenes (rostros de dos personas, mujeres), una de pelo largo y otra de pelo corto.
2. Estudiante 2: Rostro de un niño (perfil) sumergido en la arena (tierra) con la parte de la cabeza cubierta con un paño.
3. Estudiante 3: Al principio parece ser el perfil de una persona por encima de los hombros en una especie de colina cubierta por la copa de los árboles.
4. Estudiante 4: Rostro de un niño; pluma de un pájaro; ola.
5. Estudiante 5: Rostro de perfil; ola.
6. Estudiante 6: Una dama con una pluma en la cabeza, abrigo de piel y el velo en la cabeza.
7. Estudiante 7: Una persona (mujer) con el pelo negro, con un velo blanco.

Del protocolo de respuestas obtuvimos que apenas uno de los investigados respondió que había dos imágenes. Aunque es una figura de ilusión óptica y se podían dar un montón de posibilidades, las respuestas parecen corroborar lo que Piaget e Inhelder (1948/1993) indicaron como percepción, a saber: el conocimiento de los objetos, resultante del contacto directo con ellos. Esto sucedió porque el investigador nada les informó a los estudiantes sobre la imagen proporcionada.

Como la intención del investigador era verificar si los profesores investigados habían notado el espacio perceptivo y representativo (visualización), en consonancia con lo que él creía que era adecuado para el nivel de conocimiento de los estudiantes y también para motivarlos a seguir el curso que se iniciaba, propuso la representación de la Figura 4.

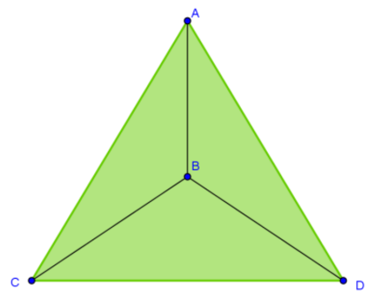


Figura 4: ¿Triángulo o tetraedro? (Construcción realizada en GeoGebra)

Nuestra experiencia e investigaciones han demostrado que estudiantes y profesores no pueden interpretar (visualizar) correctamente ciertas representaciones geométricas, y tampoco son convincentes las que hacen. Con frecuencia, las representaciones que se les proporcionan a los estudiantes son reproducciones xerografiadas o las disponibles en libros de texto o los medios de comunicación digital.

Se presenta el protocolo de las respuestas sobre el significado de la Figura 4.

1. Estudiante 1: Figura geométrica compuesta por tres figuras más, tres vértices, tres lados, ángulos, figura plana, figura del espacio.
2. Estudiante 2: Una pirámide de base triangular ACD.
3. Estudiante 3: Un triángulo de medidas laterales iguales y con un centro marcado con el punto B, dando una sensación de profundidad para observar los lados y la parte inferior de la figura.
4. Estudiante 4: Vértices, segmentos de líneas, triángulos.
5. Estudiante 5: Pirámide de base triangular, puntos, vértices, lados.
6. Estudiante 6: Un tetraedro, un triángulo con su centro marcado. Tres triángulos.
7. Estudiante 7: En primer lugar, sería un tetraedro, donde la base es el triángulo BCD y el vértice es A. Pero para ello deberíamos tener las aristas BC y BD punteadas y no continuas, para imaginarnos un sólido y no tres triángulos ABC, ABD y BCD con el vértice B en común.

El protocolo indica que los estudiantes visualizan una representación de objeto espacial y no una posibilidad de representación formada exclusivamente de triángulos planos. La Figura 4 podría estar representando cuatro triángulos planos: ABC, ABD, BCD, ACD, el último de los cuales no fue reconocido por ninguno de los estudiantes, incluido el Estudiante 7. Observemos que este estudiante está considerando la posibilidad de que sea un tetraedro, pero para ello exige que las aristas deberían ser punteadas, lo que no es correcto para esta situación pues todas las aristas serían visibles.

El Estudiante 6 es el único que indica la posibilidad de que la representación sea de un objeto plano y también de uno espacial. Al afirmar que hay tres triángulos representados no tiene en cuenta el triángulo ACD que en el caso de que representara un tetraedro correspondería a la cara lateral que es invisible.

El Estudiante 5 visualiza un objeto espacial, citando apenas elementos constitutivos del mismo, y no describiéndolo, de forma similar a lo que hizo el Estudiante 4, mientras que el Estudiante 2 percibe la representación de una pirámide, vista desde arriba, en la que visualiza la base como el triángulo ACD y el vértice B.

Los Estudiantes 1 y 3 perciben en la representación la presencia de una figura del espacio e indican elementos constitutivos de la misma.

Para concluir el artículo, señalamos que el análisis de los protocolos puede indicar que los alumnos tienen alguna percepción de representaciones geométricas, con predominio de representación de objetos del espacio. Creemos que esto tiene que ver con el hecho de que el interior de las regiones triangulares ha sido coloreado y no sólo por los segmentos de la frontera, caso en el que quedaría más evidente la representación de polígonos y no de regiones poligonales. Este es un punto que debe ser investigado en el futuro.

Entendemos que los aspectos visuales, como constructos mentales, presentan lagunas que no deberían existir en el nivel de formación en el que están los investigados. La investigación puso de manifiesto que es necesario desarrollar la habilidad de visualización en los estudiantes a lo largo de su formación inicial, académica y en acción continuada.

REFERENCIAS

Andrade, J.A. y Nacarato, A.M. (2004). Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista*, 17, 61-67.

Gutiérrez, Á. y Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Kilpatrick, J. (1994). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 1-18). México: Grupo Editorial Iberoamérica y una empresa docente.

Leivas, J.C.P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática* (Tesis de doctorado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.

Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF). (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília, Brasil: Autor.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança* (Bernardina Machado de Albuquerque, Tr.). Porto Alegre, Brasil: Artes Médicas (primera edición en francés, 1948).

HIPERSUPERFICIES MÍNIMAS

Ana Marín, Rubén Ortiz y Joel Rodríguez
Universidad de Cartagena, Instituto Tecnológico de Morelia
amarinr@unicartagena.edu.co, rortizo@unicartagena.edu.co, joel@ifm.umich.mx

Proponemos una versión geométrica del principio del maximo, la cual nos permite comparar las hipersuperficies a nivel local que coinciden en un punto y mostrar una versión geométrica del principio del máximo para hipersuperficies minimas.

Debido a la relación existente entre las ecuaciones diferenciales parciales (Protter y Weinberger, 1984) y la geometria diferencial (Carmo, 1992), se observa que las hipersuperficies con curvatura media constante son automáticamente elípticas, y esto permite aplicar el Principio del máximo a dichas curvaturas. También, a operadores como el de la curvatura media H para una hipersuperficie M, como sigue:

> Supongamos que H_1, H_2 son las curvaturas medias de las hipersuperficies M_1, M_2 respectivamente, si M_1 es la gráfica en $\mathbb{R}^{n+1}$ de una función f de clase C^2 y M_2 es la gráfica $\mathbb{R}^{n+1}$ de una función g de clase C^2 donde f y g están definidas en un abierto V acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave ∂V. Supongamos que $f(0) = g(0)$ y $f \geq g$ en ∂V. Si $H_1 = 0$ y $H_2 = 0$ en V, entonces $f = g$ en V.

Nuestro objetivo general es encontrar una generalización del enunciado anterior para un operador L más general que el de la curvatura media H, es decir, nos concentraremos en demostrar el siguiente resultado:

> Sea V un abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Sean f y g dos soluciones de clase C^2 de la ecuación diferencial
>
> $$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i = 0, \quad \text{en } V$$
>
> Si a_{ij}, b_i dependen de los valores $u_i(x)$, la matriz (a_{ij}) es definida positiva, $f(0) = g(0)$ y $f \geq g$ en ∂V, entonces $f = g$ en V.

Marín, A., Ortiz, R. y Rodríguez, J. (2013). Hipersuperficies mínimas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 219-220). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Para resolver tal problema proponemos construir una variante de la demostración del Principio del máximo, estudiar algunas de las versiones más importantes del Principio del máximo en el caso general de dimensión $\boldsymbol{n}$. Construir un operador así:

Tomamos $u = f - g$. Obtenemos el operador

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i = 0,$$

por último, demostramos que el operador L es elíptico; y aplicamos el Principio del máximo.

Algunos de los resultados de geometría para problemas elípticos con condición de Dirichlet y de Neumann sobre la frontera son susceptibles de extensión a operadores elípticos más generales que la curvatura media. Este hecho es un punto de partida para futuras investigaciones.

REFERENCIAS

Carmo, M. do. (1992). *Riemannian geometry*. Boston, EUA: Birkhäuser.

Protter, M. y Weinberger, H. (1984). *Maximun principle in differential equations*. NewYork, EUA: Springer Verlag.

EL ROL DEL PROFESOR Y EL SOFTWARE GEOGEBRA: EXPERIENCIA DE AULA BAJO LA TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

Cristina Mejía y Óscar Molina
The English School, Universidad Pedagógica Nacional
cmejia@englishschool.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

En este artículo se presenta parte del trabajo de grado que estoy desarrollando para optar por el título de maestría en Docencia de las Matemáticas. Específicamente, se recuentan detalles de una experiencia de aula en la que el objetivo es formular una conjetura en la clase de geometría con estudiantes de grado octavo, y a partir de tal recuento se realiza un análisis parcial del rol del profesor, bajo el modelo de la Mediación Semiótica. Dicha experiencia está centrada en el uso de un software de geometría dinámica como artefacto, y basada en un ciclo didáctico fundamentado en la aproximación metodológica para la enseñanza del grupo *Æ • G*.

PROBLEMÁTICA

Desde mi propia experiencia, el hecho de que la institución en la que laboro no sólo esté bien dispuesta a aceptar la integración de herramientas tecnológicas en el aula de matemáticas, sino que también la promueva como parte fundamental de la práctica de sus profesores, nos ha puesto ante un reto ineludible: incluir las herramientas en nuestra práctica profesional y en la actividad matemática de nuestros estudiantes. Muchas experiencias relativas a la inclusión de tecnología en el aula se han documentado en diversos contextos (Villarreal y Borba, 2010). Me interesa realizar un estudio deliberado que me permita hacer una experiencia de aula significativa bajo un marco de referencia que proporcione elementos teóricos que soporten dicha inclusión. Considero pertinente, desde mi trabajo de grado para optar por el título de Maestría en Docencia de la Matemática, dar un ejemplo del rol que puede tener un profesor que usa artefactos en su proceso de enseñanza. Para precisar este rol, el estudio se enmarca bajo la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS) propuesta por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008). Esta Teoría proporciona unos lentes mediante los cuales es posible estudiar y comprender el papel de un profesor que pretende aprovechar artefactos (para este caso, artefactos computacionales como programas de geometría dinámica), usados como mediadores para favo-

Mejía, C. y Molina, Ó. (2013). El rol del profesor y el software GeoGebra: experiencia de aula bajo la teoría de la mediación semiótica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 221-228). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

recer procesos de aprendizaje. La TMS propone diseñar un ciclo didáctico que favorezca el aprendizaje de los estudiantes. En mi trabajo de grado, el ciclo propuesto, está fundamentado en la aproximación metodológica para la enseñanza (que pretende favorecer la actividad demostrativa[1] de los estudiantes) del grupo Æ • G de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Con esta comunicación, espero poner a consideración los avances de mi trabajo de grado, basado en una experiencia de aula, en la que reconociendo el potencial semiótico del software de geometría dinámica GeoGebra4, se diseñó e implementó una secuencia didáctica a partir de la cual se pretende analizar del rol del profesor, bajo la TMS.

MARCO REFERENCIAL

La TMS ofrece un marco conceptual para realizar un análisis del rol del profesor, pues tiene en cuenta el enfoque de la mediación semiótica enunciada por Vigotsky (Mariotti, 2009), según el cual el conocimiento es consecuencia de actividades instrumentadas que emergen y evolucionan dentro de la interacción social. Esta teoría, reconoce que la enseñanza y el aprendizaje se pueden ver como la evolución de signos (e.g., gestos, su producción oral o escrita, o una construcción realizada empleando un software de geometría dinámica). Los signos de los estudiantes, que surgen mediante el uso intencionado de un artefacto, pueden ilustrar sus significados personales, y con la mediación del profesor pueden evolucionar a signos matemáticos asociados a significados matemáticos (una definición o teorema por ejemplo). Mariotti (2009) sostiene que reconocer el potencial semiótico de los artefactos en términos de significados personales y de significados matemáticos permite al profesor, quien es el experto, emplear los artefactos como herramientas de mediación semiótica, y posibilita que los estudiantes conecten sus significados personales, generados por el uso del artefacto, con significados matemáticos reconocibles por dicho experto. Los signos producidos por los estudiantes pueden estar muy pegados al artefacto, es decir, ser producto del uso del artefacto para el abordaje de una tarea específica, o ser producto de la reconstrucción de un contexto relacionado con la actividad desarrollada con el artefacto; estos signos para

[1] Actividad conformada por dos procesos, el de conjeturación (cuyo producto es una conjetura) y el de justificación (cuyo producto es la explicación, prueba o demostración del enunciado conjeturado).

la TMS son los “signos del artefacto” que se espera que evolucionen a “signos matemáticos” (i.e., aquellos que están asociados a la teoría matemática misma). Los “signos pivote” son los signos que indican conexión entre el contexto del artefacto y el contexto matemático y facilitan la transición de un contexto al otro. Así, la producción de signos está fuertemente ligada a las acciones que fueron propuestas para ser desarrolladas con el artefacto (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

La TMS propone el diseño e implementación de una serie de actividades, a las que han dado el nombre de ciclo didáctico, con el propósito de desarrollar los componentes del proceso semiótico (Mariotti, 2009). Para este estudio se utilizó como ciclo didáctico la aproximación metodológica inspirada en la propuesta del grupo de investigación *Æ • G*. Esta aproximación se concentra en proponer tareas que los estudiantes desarrollan en clase, tareas que propician la actividad demostrativa desde un enfoque sociocultural en el que la interacción entre los miembros de la comunidad de clase es vital.

CONTEXTO DEL ESTUDIO Y METODOLOGÍA DE LA CLASE

Esta experiencia de aula se llevó a cabo con un grupo de 13 estudiantes de grado octavo del colegio *The English School*, quienes se organizaban en 4 o 5 grupos, de 2 o 3 personas cada uno. La institución cuenta con salas de computadores de pantalla táctil, y los salones de clase, con tableros inteligentes. Estos tableros tienen un software dirigido a propósitos educativos y fueron de gran utilidad para el desarrollo del experimento. Las clases fueron filmadas de manera tal que los registros obtenidos pudieron derivar en los datos de investigación.

En este artículo presento un pequeño ejemplo con el que pretendo ilustrar cómo se podría usar la TMS para el análisis de protocolos de clase. La metodología empleada en la clase protagonista del análisis que aquí se reporta consistió en el planteamiento de una tarea para cuya realización se reconoce el potencial semiótico del artefacto GeoGebra, y que puede generar una actividad que permite al profesor, mediante la interacción, emplear los artefactos como herramientas de mediación semiótica. Con tal actividad se pretende agregar un elemento más al sistema teórico local que se está construyendo con la comunidad de clase, dicho elemento es un teorema, y se espera que los estudiantes realicen una conjetura a partir de la exploración con el artefacto y el trabajo en grupo. En este proceso, la profesora propicia de manera intencionada que estudiantes conecten sus signos y significados personales con signos (que ella considera matemáticos) producidos por otros estudiantes. Para tal efecto, en la clase la profesora genera discusiones instruccionales con cada uno de los grupos, a partir de los signos producidos, para luego orientarla hacia una discusión que los haga evolucionar a signos y significados matemáticos.

ANÁLISIS DE DATOS

Para la clase que se presenta como ejemplo se tenía el propósito de formular el enunciado del teorema de la mediatriz (*Si una recta r es mediatriz de un segmento, entonces todos los puntos de r equidistan de los extremos del segmento*) como conjetura, a partir de una actividad propuesta a los estudiantes en la que se hace uso de GeoGebra. En el ejemplo se analizan extractos de la producción de dos grupos, a la luz de la TMS. Cabe resaltar que en este análisis se parte del reconocimiento del potencial semiótico de GeoGebra para generar conjeturas, así, el objetivo del análisis es reconocer cómo usa el profesor el potencial semiótico del artefacto para mediar semióticamente la evolución de signos de los estudiantes.

En la clase anterior a la que se analiza se había construido la definición de mediatriz de un segmento: *La recta mediatriz de un segmento $\overline{AB}$es la recta perpendicular a dicho segmento por su punto medio*. Como actividad inicial de la clase que nos interesa, se solicita a los estudiantes construir un segmento $\overline{AB}$ en GeoGebra. La profesora, segura de que todos los grupos siguieron la instrucción, pide encontrar varios puntos que equidisten de A y B. El siguiente extracto muestra el intercambio verbal entre la profesora (P) y un estudiante (SA) cuando los estudiantes están realizando la tarea propuesta:

P: [Dirigiéndose a todo el curso] Encuentre en ese segmento un punto que equidiste del punto A y del punto B

P: ¿Qué punto encontraron? Déjenme ver. Un punto que equidiste de los extremos del segmento [dirigiéndose al grupo de SA] ¿qué punto encontraste tú?

SA: E! [señalando un punto en el segmento]

P: ¿Y cómo sabes que equidista?

SA: Porque está en la mitad de los dos [señalando los puntos A y B]

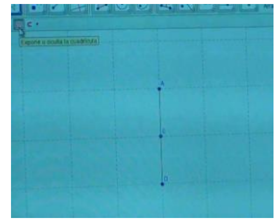
P: ¿Y cómo sabes que está en la mitad?

SA: Porque… no sé, porque usamos cuadrícula

P: Ah ok, ¡usaste cuadrícula!

SA: Ajá

P: O sea, como usaste cuadrícula garantizas que está en la mitad. Bueno, bien. O sea ¿el primer punto que se les ocurrió fue qué punto? ¿Cómo se llama ese punto?



SA: El punto medio

El grupo ha construido el punto medio del segmento pero sin emplear las herramientas de manera adecuada. Este es un signo que se puede considerar como del artefacto: ello, porque los estudiantes construyen el punto medio con base en una opción de GeoGebra (ver la cuadrícula del plano) pero que no se constituye en la construcción robusta que la profesora esperaba. Ella recorre todos los grupos y se percata de que han empleado el mismo método.

A continuación, de manera intencionada, la profesora valida la construcción realizada por el grupo de AA, signo que se podría considerar como matemático pero que la profesora usa como pivote, pues lo utiliza para que el signo del grupo de SA evolucione. El siguiente fragmento ilustra eso:

1. P: [Dirigiéndose al curso] Bueno aquí AA se fue por otro lado. AA construyó la mediatriz
2. SA: ¿Cómo construyó la mediatriz?
3. AA: Con la herramienta mediatriz
4. P: Y como él sabe que la mediatriz… ¿por dónde corta al segmento?
5. SA: ¡Por la mitad!
6. SA: [Produce un signo: construye la mediatriz del $\overline{AB}$ y señala el punto de corte, mientras la profesora realiza su intervención]
7. P: Por el punto medio
8. AA: Entonces ese punto de corte [entre la mediatriz y el segmento] va a ser un punto que equidista de A y un punto que equidista de B

Habiéndose dado cuenta de que la construcción (signo) del grupo de AA es apropiada para lo que se quiere (construir la mediatriz del $\overline{AB}$), la profesora pide a AA que recuente su método con el propósito de propiciar la evolución del signo producido por el grupo de SA. El significado matemático de punto medio emerge entonces. Como se ilustra en la intervención [6] del fragmento anterior, la acción de la profesora es efectiva. Luego de esto, la profesora pide a todos los estudiantes que encuentren otro punto con la condición solicitada. La profesora se centra en el grupo de AA. Está interesada en que los estudiantes usando el software logren establecer que todos los puntos de la mediatriz cumplen con tal condición. Además se interesa porque produzcan un signo que sea una conjetura y que ello evolucione a un teorema.

P: ¿Encontraron otro punto?

AAr Sí, si encontramos [en voz muy baja e insegura]

P: ¿Dónde?

AAr En la mediatriz del segmento [han construido un punto *D* sobre la mediatriz]

P: En la recta mediatriz…y ¿cómo saben que ese punto equidista de los extremos del segmento?

AA Porque está perpendicular a la …

P: ¿Y tenemos alguna herramienta que nos ayude a verificar eso?

AA: Pues… porque está perpendicular al segmento *AB* y está en la mitad.

P: Pero ¿cómo saben que efectivamente equidista?, ¿tenemos algún hecho geométrico?, hicieron alguna prueba con las herramientas de GeoGebra?, ¿qué herramienta se les ocurre usar ahí?

AAr: La herramienta distancia [señalando el ícono con el dedo]

P: Ah, vamos a usar la herramienta distancia

AAr: [Emplea la herramienta para verificar que la distancia del punto *D* a los puntos *A* y *B* es la misma]

P: Ahora sí tal vez podemos decir que lo estamos mostrando, ahora toca probarlo. ¿Dónde pueden encontrar otro punto que equidiste de los extremos?

AA: En cualquier parte de la mediatriz [señalando con el dedo la recta como si empleara la herramienta arrastre]

P: ¿Cualquier punto de la mediatriz va a equidistar? Muéstrenme otros dos, o ¿qué podrías hacer para no mostrarme otro, empleando las herramientas de GeoGebra?

AA: Emplear la herramienta arrastre

P: Para arrastrar a quién

AA: D [mientras tanto está arrastrando al punto *D* empleando el dedo sobre la pantalla táctil]

P: ¿Y qué pasa?

AA: Pues que las distancias se mantienen. Que en ambas siempre siempre es la misma [señalando con los dos dedos las distancias entre los puntos de la mediatriz a los puntos *A* y *B*]

P: Ah, que las distancias se mantienen. Escriban una conjetura. Escríbanme que hecho geométrico acaban de encontrar.

La profesora mediante sus intervenciones, favorece que los estudiantes usen la herramienta arrastre para que se den cuenta de que cualquier punto de la recta equidista de los extremos del segmento. El signo que el grupo había realizado antes (construcción con la cual solo establecían al punto medio como uno de los puntos solicitados) evolucionó a uno que permitía establecer la conjetura esperada por la profesora (construcción de un punto sobre la mediatriz, toma de medidas y arrastre de tal punto para verificar que cumplía con la condición solicitada). Así, el primer signo que la profesora podía haber considerado como matemático pues hacía uso de la definición de mediatriz y era una construcción robusta, la profesora lo usó como pivote pues le vio una conexión con el artefacto (vía función del arrastre) y con lo esperado desde las matemáticas (conjetura: enunciado del teorema objetivo de la clase). La conjetura producida por el grupo fue: *Si ubicamos un punto en cualquier parte de la mediatriz del* $\overline{AB}$ *entonces este punto equidista de los puntos A y B.* En resumen, los significados personales del grupo de AA se transformaron: la primera construcción y, por ende, su primera respuesta (el punto medio del segmento equidista de los extremos del segmento) evolucionaron a una construcción de un punto cualquiera sobre la mediatriz, y con tal construcción, a la formulación de una conjetura (la esperada por la profesora). Signos y significados evolucionaron.

CONCLUSIONES

Los avances en mi estudio me han mostrado que la TMS sí es afortunada para proporcionar una manera de analizar la producción de los estudiantes en un entorno mediado por artefactos y por un experto. También introduce elementos que aunque no son nuevos, sí señalan una nueva vía para enfocar los trabajos de investigación y a su vez una nueva forma de plantear situaciones en las clases, en las que el uso de los artefactos sea intencionado y no pierda de vista las metas educativas.

Por otro lado, la aproximación metodológica del grupo $\mathcal{Æ} \bullet \mathcal{G}$ favorece de manera efectiva la actividad demostrativa por cuanto las tareas propuestas claramente redundan en proporcionar evidencias de los procesos de conjeturación y justificación por parte de los estudiantes.

REFERENCIAS

Bartolini Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini Bussi, G.A. Jones, R.A. Lesh y B. Sriraman (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (segunda edición revisada, pp. 746-783). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum.

Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M.A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology - Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 89-132). New York, EUA: Springer.

Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 427-440.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Molina, Ó. (Sometido a consideración). *Innovación en un aula de geometría de nivel universitario*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Villarreal, M. y Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: Notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education*, *42*(1), 49-62.

PRIMEROS PASOS EN LA BÚSQUEDA DE EXPERIENCIAS DE AULA CON GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA: EL CASO DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Neila Méndez y Lina Bohórquez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
neilarociomendez@yahoo.com, dilimaco_15@hotmail.com

En la búsqueda bibliográfica hecha para la construcción de la idea del trabajo de grado para la licenciatura, encontramos una relación de la geometría hiperbólica y el modelo del plano hiperbólico con el tejido en crochet. Así se despierta en nosotras el interés por esa geometría y por cómo podría llevarse al aula de matemáticas en la educación básica (media vocacional). Como primera aproximación, desde las dudas que surgieron para ese propósito, se hizo una breve búsqueda de experiencias de trabajo con geometría hiperbólica en la educación básica, con el fin de determinar cuáles modelos, temáticas y otros aspectos se tienen en cuenta al trabajar en el aula.

PRIMEROS PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDEA PROBLEMA

Al emprender la realización del trabajo de grado de la licenciatura, lo primero fue identificar una problemática de interés: la geometría es uno de nuestros temas predilectos; luego, en la indagación para consolidar la idea del trabajo nos enfocamos en la diversidad de geometrías y encontramos el trabajo sobre geometría hiperbólica desarrollado, en 1997, por los profesores David Henderson y Daina Taimina de la Universidad de Cornell (EUA). En su artículo *Crocheting the hyperbolic plane* (Henderson y Taimina, 2001), los autores exponen cómo construyeron un modelo físico del plano hiperbólico tejido en crochet, sus propiedades matemáticas y cómo se evidencia la geometría hiperbólica en el modelo; inclusive, muestran una representación de un triángulo hiperbólico en el modelo (ver Figura 1).

Fue importante encontrar un trabajo de crochet con una geometría que hasta el momento era, y aún es, muy poco conocida por nosotras, ya que dio origen a varios cuestionamientos que más adelante se presentan. Consultando un poco

Méndez, N. y Bohórquez, L. (2013). Primeros pasos en la búsqueda de experiencias de aula con geometrías no euclidianas en la educación básica: el caso de la geometría hiperbólica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 229-234). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

más sobre el trabajo de los mencionados profesores, dimos con una entrevista[1] a ellos, realizada en 2004. Allí afirman la existencia de la geometría hiperbólica en elementos de la naturaleza como los arrecifes de coral, algunas criaturas de mar e incluso en algunas hojas de lechuga, ¡una hoja de lechuga tiene relación con la geometría!

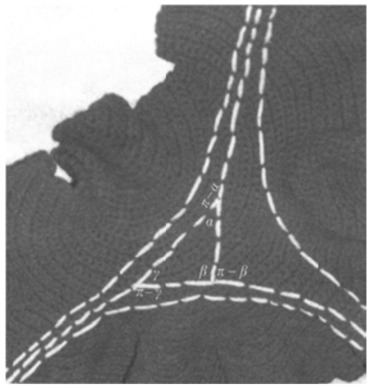


Figura 1: Representación de un triángulo en el modelo hiperbólico en crochet (Henderson y Taimina, 2001, p. 26)

En una primera búsqueda sobre la geometría hiperbólica se encontró que guarda relación con el enunciado del quinto postulado de los *Elementos* de Euclides. Tal postulado fue abordado por muchos personajes que intentaron demostrarlo, debido a su complejidad, notable diferencia respecto a los otros cuatro postulados, y a que fue el que más tardíamente se utiliza en el Libro I. A lo largo de la historia, se encontraron enunciados equivalentes al quinto postulado, uno de ellos: *Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y solo una.*

En el siglo XIX, de manera independiente Gauss, János Bolyai y Lobatchevski llegan a descubrimientos sobre una nueva geometría, que en su momento llamaron geometría no euclidiana, y que ahora se conoce como geometría hiperbólica. Se caracteriza, entre otros aspectos, por el hecho de que por un punto exterior a una recta hay infinitas rectas paralelas y los ángulos internos de los triángulos suman menos que dos rectos.

Desde ese panorama, comenzamos a pensar sobre las geometrías no euclidianas, específicamente sobre la geometría hiperbólica y cómo llevarla a un aula de la educación básica. Comenzaron a surgir cuestiones como: ¿cómo emplear

[1] La entrevista la realizó el *Magazine Cabinet* y el texto de la misma está disponible en http://cabinetmagazine.org/issues/16/crocheting.php.

el recurso de la profesora Taimina para la enseñanza de algunas nociones de esa geometría en la educación básica?, ¿qué temas?, ¿en qué cursos?, ¿qué deberían saber los estudiantes para trabajarlo?, ¿qué debería saber el profesor para enseñarlo?

Luego de reflexionar y atender consejos por parte de profesores, se determinó como primer paso: la indagación sobre experiencias de aula con la geometría de nuestro interés, realizadas en educación básica. Se hizo entonces la respectiva búsqueda en bases de datos: libros, artículos, trabajos de grado. En este artículo se hace una breve presentación de lo encontrado hasta el momento, pero antes de ello, un comentario sobre el quinto postulado.

LA NEGACIÓN DEL QUINTO POSTULADO

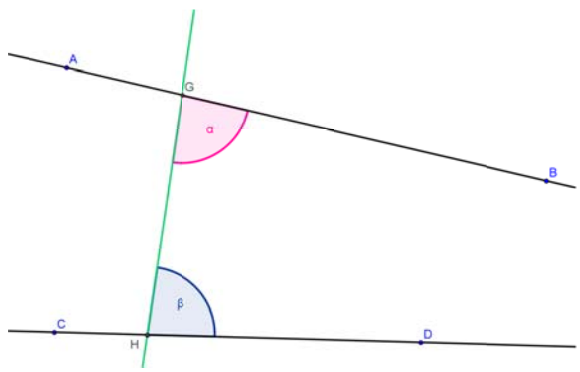


Figura 2: Representación del quinto postulado de Euclides que versa: Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.[2]

Hace cerca de dos siglos surgieron diversas geometrías que son *consistentes* con el modelo euclídeo, es decir que aunque difieren en el quinto postulado (Figura 2), "tienen un sistema lógico y coherente". Lo que se demuestre en ambas es cierto, sin olvidar que cada una tiene un campo de aplicación. A finales del siglo XIX, se logró demostrar que el quinto postulado de los enunciados por Euclides podía ser no válido, así se dio lugar a la división: geometrías euclidianas y geometrías no euclidianas. Son geometrías no euclidianas, entre otras, la geometría elíptica y la geometría hiperbólica; en ambas se niega el quinto postulado; en la geometría elíptica se acepta que "No existe paralela alguna a una recta dada que cruce por un punto dado"; mientras que en la hi-

[2] Tomado de: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/01/postuladoslibro1.htm

perbólica se acepta que “Existen infinitas rectas que son paralelas a una recta dada por un punto dado”.

DE LO ENCONTRADO HASTA EL MOMENTO

Desde la indagación sobre la enseñanza de las geometrías no euclidianas y, en particular, de la geometría hiperbólica, se ha encontrado que entre los años 2000 y 2009, en Estados Unidos, Portugal y Brasil se han llevado al aula conocimientos relacionados con la geometría hiperbólica. Evidencia de ello: en Estados Unidos, el trabajo de grado de Donald Christi (Christi, s.f.); en Portugal, la tesis de doctorado de la profesora María Teresa Neto (Neto, 2009). A continuación se presenta un recuento de lo encontrado:

Christi Donald en su trabajo de grado en la Universidad de Iowa, trabaja con un curso de 51 estudiantes de grado noveno en Estados Unidos, sobre la geometría hiperbólica. En la primera parte del curso, los estudiantes habían estudiado geometría euclidiana, posteriormente trabajaron con la geometría esférica haciendo uso de bandas de caucho y una pelota de tenis; cuando llegaron a los triángulos y la medida de los ángulos internos, los estudiantes descubrieron que la suma era mayor de 180º, en ese momento la profesora introdujo algunos aspectos históricos y su relación con la prueba del quinto postulado de Euclides. Trabajaron una prueba de 34 teoremas que debían clasificar: cuáles eran de la geometría euclidiana, cuáles de la geometría hiperbólica y cuáles de ambas geometrías. Para realizar esa clasificación, los estudiantes habían interactuado con un modelo de geometría hiperbólica, un software desarrollado por Joel Castellanos (Modelo del disco de Poincaré); también trabajaron con Geometer’s Sketchpad para experimentar con geometría euclidiana. Donald concluye que el uso de recursos tecnológicos le permitió a los estudiantes visualizar el espacio hiperbólico, y el desarrollo de la actividad proporcionó a los estudiantes la oportunidad de reconocer la existencia de otras geometrías.

En su tesis doctoral para optar por el título de Doctora en Didáctica de la Universidad de Aveiro, María Teresa Neto (2009) tenía como problema de investigación: ¿De qué manera y qué otros modelos de geometría plana, diferentes del euclidiano, pueden ayudar a los estudiantes de secundaria a desarrollar el razonamiento deductivo? El objetivo era analizar entornos de aprendizaje en los que los estudiantes resolvían problemas, en el contexto de la argumentación y demostración. Hace el análisis a la resolución de unos problemas en diferentes geometrías; específicamente, resolvieron un problema haciendo uso del modelo del semiplano superior (modelo de geometría hiperbólica), esto con un estudio de caso de dos estudiantes de grado décimo en Portugal. La profesora concluye que los estudiantes trabajaron varios sistemas axiomáticos, evolucionaron a un pensamiento más estructurado gracias a la introducción de las otras geometrías y la resolución de problemas en dicho contexto.

En la propuesta que hacen para introducir la geometría no euclidiana en el currículo de geometría de secundaria, Gray y Reza (2007, citando a Lenart, 1993) señalan que la introducción de la geometría no euclidiana a temprana edad (10-11 años) puede ser ventajosa ya que los estudiantes no han desarrollado sesgo alguno hacia la geometría euclidiana y sus pensamientos no se verá limitado por sus experiencias en el plano. Se refieren a que la mejor forma de enseñar la geometría hiperbólica es por medio del modelo de Poincaré. Concluyen que la mayoría de los estudiantes que han recibido algún curso de geometría en la escuela secundaria, terminan el curso sin tener noticia de otras geometrías.

A modo de conclusión, sobre los pasos que se han dado en la búsqueda de experiencias de aula con la geometría hiperbólica en la educación básica, se resalta la implementación de recursos tecnológicos de modelos para la geometría hiperbólica; el más mencionado es el disco de Poincaré ya sea desde la creación de herramientas en GeoGebra o el modelo diseñado por el profesor Joel Castellanos. Entre otros modelos que se mencionan, se encuentra el Semidisco superior, pero no se ha hallado, hasta el momento, alguna experiencia sobre la geometría hiperbólica con un modelo físico como el de Henderson y Taimina.

Se ha resaltado la importancia de implementar otras geometrías en el aula porque enriquece el pensamiento de los estudiantes; en primera medida, porque desarrollan niveles de pensamiento cada vez más estructurados, reconocen aspectos históricos de la evolución de las matemáticas, y en particular de las geometrías.

REFERENCIAS

Christi, D. (s.f.). *Hyperbolic geometry in the high school geometry classroom* (Tesis de grado). Iowa State University, Iowa, EUA. Recuperado de http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/Donald_C_MSM_F05.pdf

Gray, A. y Sarhangi, R. (2007). *A proposal for the introduction of non-euclidean geometry into the secondary school geometry curriculum.*

Recuperado de http://pages.towson.edu/gsarhang/Modules%20for%20Non-Euclid%201.doc

Henderson, D. y Taimina, D. (2001). Crocheting the hyperbolic plane. *The Mathematical Intelligencer*, *23*(2), 17-28. Recuperado de http://www.math.cornell.edu/~dwh/papers/crochet/crochet.PDF

Neto, M (2009). *O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas* (Tesis de doctorado). Departamento de Didáctica y Tecnología Educativa, Universidad de Aveiro, Portugal.

EFECTO DE UN DISPOSITIVO DE FORMACIÓN INICIAL DOCENTE SOBRE EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA

Hernán Morales
Universidad Católica de la Santísima Concepción (Chile)
hmorales@ucsc.cl

En este artículo se presentan los avances del desarrollo de una tesis doctoral, que tiene como propósito determinar cuáles son los efectos del proceso de enseñanza, en didáctica de la geometría, en el nivel universitario, sobre la práctica profesional de un estudiante de pedagogía, y si esto tiene un efecto sobre el desarrollo de competencias del alumno de la escuela. Para responder la pregunta de investigación se propuso una actividad que consiste en construir un capítulo de un libro de geometría, para luego describir la aplicación de este en la escuela. Los resultados preliminares son contradictorios, porque los estudiantes manifiestan su aprobación al método, pero su aplicación en la práctica no es alentadora.

EL PROCESO DE FORMACIÓN DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS, DESDE EL AULA UNIVERSITARIA A LA ESCUELA

En Chile, el proceso de formación inicial de profesores tiene entre sus características una formación teórica y práctica. La formación teórica se realiza en las universidades, y la práctica, en estadías en escuelas o colegios. En el caso de los profesores de matemáticas, este proceso de formación busca el desarrollo de competencias profesionales de ese ámbito. Algunas de esas competencias se comienzan a desarrollar en la asignatura de didáctica de la geometría y luego se consolidan en la asignatura de práctica pedagógica que tiene lugar en las instituciones escolares. Sin embargo, es difícil saber cuál es el efecto del proceso de desarrollo de competencias iniciado en la universidad sobre la práctica que el estudiante realiza en un colegio, debido a la "distancia" entre estas dos actividades y a que este proceso debe competir y enfrentarse a otras influencias: la tradición de modelos de enseñanza; el currículo chileno (MINEDUC, 2011); la obligatoriedad de usar ciertos textos; la instalación, en escuelas o colegios, de modelos de enseñanza distintos de los enseñados en la universidad; obligaciones administrativas, entre otras. Entonces, esto nos lleva a pre-

Morales, H. (2013). Efecto de un dispositivo de formación inicial docente sobre el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos de secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 235-241). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

guntarnos: ¿Cuáles son los efectos del proceso de enseñanza en didáctica de la geometría sobre la práctica de un estudiante en un colegio? ¿Cómo se pueden explicar esos efectos?

Ya existen investigaciones que entregan alguna información sobre lo que sucede desde el trabajo del investigador hasta el estudiante que inicia su labor como profesor. A partir de tales estudios se señala que el énfasis debe hacerse en la adaptación de las explicaciones matemáticas al nivel de los estudiantes, deben usarse las experiencias mismas de los estudiantes para esas explicaciones, debe mostrarse cómo se conectan entre sí los temas matemáticos, y que no son entidades aisladas (Leatham y Peterson, 2010). Otro elemento que se debe considerar son los errores de los estudiantes y que ellos reflexionen en torno a que sus alumnos también los cometerán. En otras palabras, el error de un alumno representa una situación problemática que puede guiar al profesor en un trabajo reflexivo sobre las elecciones, decisiones y acciones que él efectúa en función del procedimiento erróneo. Cada situación de trabajo del error es distinta debido a sus particularidades, y ella presenta obligaciones y posibilidades a la actividad del profesor (Normandeau, 2010). Se señala también que cuando tienen lugar las primeras prácticas en la escuela, el estudiante debe ir acompañado por el académico que lo formó pues de no ser así, puede ser guiado de manera débil en ambas áreas, la matemática y la didáctica. Esta aseveración es tan radical, que se afirma que solo los profesores universitarios deberían guiar este proceso, de modo que el estudiante cuando ya sea profesor continúe aprendiendo sobre cómo enseñar matemáticas y gestionar una clase (Fernández y Erbilgin, 2009). Otro elemento para tener en cuenta es el uso de textos. Se menciona que un proceso de formación de profesores debe contemplar el desarrollo de la competencia para analizar los textos y que debe estar formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, y 6) argumentaciones (Font y Godino, 2006).

La propuesta para responder las preguntas señaladas anteriormente está dada en la planificación y puesta en práctica de un proceso de formación de un profesor de matemáticas; proceso este, fundamentado en torno a un grupo de saberes matemáticos, disidentes, poco habituales en la tradición frontal e idealista de la enseñanza de las matemáticas en Chile, pero coherentes con el currículo oficial y con el desarrollo de las competencias matemáticas del alumno, y que considera tres etapas. En la primera etapa, “Relación de investigación”, se lleva a cabo la transposición didáctica (Chevallard, 1985/1991) del saber didáctico al conocimiento didáctico; y se planifican y definen aquellos aspectos del saber didáctico que se enseñarán a los estudiantes universitarios y que harán parte de lo que llamaremos *dispositivo de formación*. Este dispositivo incluye un método de referencia que denominamos *capítulo paradigmático modelo*. Luego de definido este dispositivo, se pasa a una segunda etapa, "Relación de formación", en la que el académico enseña los aspectos esenciales del conocimiento didáctico al estudiante, futuro profesor, siempre en el contexto de la asignatura de didáctica de la geometría, utilizando el dispositivo mencionado. Esta acción ocurre en el aula universitaria, donde se realiza la devolución (Brousseau, 1997) en un medio didáctico y en condiciones del contrato didáctico y donde el estudiante construye su propio capítulo paradigmático, construcción esta, que implica la transposición didáctica del saber matemático al conocimiento matemático enseñable (Chevallard, 1985/1991). El profesor va evaluando esta construcción para proponer sugerencias de mejora y coherencia respecto del capítulo paradigmático modelo, al mismo tiempo que evalúa el trabajo del estudiante para su calificación final en la asignatura. Posteriormente, en la tercera etapa, "Relación didáctica", el estudiante enseña el conocimiento matemático en un colegio. Esta tercera etapa ocurre durante la asignatura de práctica pedagógica. Así, este estudiante, enseña al alumno los conocimientos matemáticos ya definidos. Este proceso, al igual que el anterior, también ocurre en un medio, la sala de clases de un colegio, y en condiciones de contrato didáctico, y se hace presente el capítulo paradigmático construido por el estudiante.

Las actividades incluidas en el capítulo paradigmático deben responder a la siguiente pregunta: ¿cuáles son las tareas que debe proponer un profesor para que el alumno "active" sus esquemas y ponga en actividad sus conceptos en acción? (Vergnaud, 1990). Nuestra propuesta considera dos tipos de tareas. La primera fundamentada en el constructivismo de Bruner (1996); es decir las tareas deben seguir la siguiente lógica: concreto, pictórico, abstracto. Lo concreto lo entendemos como el uso de material concreto como objetos, imágenes, videos, mapas. Lo pictórico se refiere al trabajo en guías escritas de ejercicios en los cuales aparecen las representaciones pictóricas de lo concreto. Lo abstracto implica el uso de algoritmos, como una etapa final luego de lo pictórico. Estas tres etapas deben estar conectadas, de modo que una tarea pueda ser representada a través de lo concreto, lo pictórico y lo abstracto, con el objetivo, como ya lo señalamos, de activar los esquemas de los alumnos. Así, cada vez que el profesor piensa una tarea en la etapa de la transposición didáctica, debe considerar esta lógica. El segundo tipo de tarea está vinculado a la clase de desempeño que se espera que realice el alumno. Para definir los desempeños contamos con dos fuentes de información: los programas de estudio del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2011) que señalan los aprendizajes esperados, y las competencias PISA (OCDE, 2006) que presentan una relevante fundamentación sobre el tipo de tareas que se deben proponer a los alumnos. Estas son: de reproducción, de conexión, de reflexión:

Grupo de reproducción	Grupo de conexión	Grupo de reflexión
- Representaciones y definiciones estándar - Cálculos rutinarios - Procedimientos rutinarios - Solución rutinaria de problemas	- Construcción de modelos - Solución, traducción e interpretación estándar de problemas - Métodos múltiples claramente definidos	- Planteamiento y solución de problemas de nivel complejo - Reflexión e intuición - Enfoque matemático original - Métodos múltiples complejos - Generalización

Figura 1: Competencia matemática

Considerando lo descrito, el proyecto que se desea implementar se propone describir los efectos de un dispositivo diseñado para la formación de profesores de matemáticas en el ámbito de la didáctica de la matemática, sobre el desarrollo de competencias matemáticas en alumnos de educación secundaria.

MARCO METODOLÓGICO

En términos generales, el marco metodológico considerará lo siguiente: en primer lugar señalemos que será una investigación cualitativa, con elección deliberada de estudiantes y estudio en el terreno, en el medio de acción natural de los estudiantes. El proceso considera que durante el desarrollo de la asignatura de didáctica de la geometría, cada estudiante construirá un capítulo paradigmático. Luego de finalizada esa asignatura, y cuando el estudiante se encuentre en la asignatura de práctica pedagógica, el estudiante aplicará su capítulo paradigmático frente a los alumnos de un colegio. Se elegirán de 2 a 5 estudiantes que hayan realizado capítulos paradigmáticos interesantes; la elección se hará a partir de la evaluación de logro de las competencias de los estudiantes en la asignatura de didáctica de la geometría. Además, como cada uno de los estudiantes habrá considerado temas distintos, se podrá comparar la información entre ellos. Durante el proceso en que el estudiante realice la Relación didáctica (tercera fase), se podrán observar y obtener evidencias del proceso de adquisición y logro de competencias de los alumnos del colegio (Balacheff y Margolinas, 2005), en el ámbito de las matemáticas. Esto permitirá responder la pregunta de investigación.

Para el desarrollo de la investigación utilizaremos la ingeniería didáctica - Artigue (1996, citado en Campos, 2006) que

> [D]esigna un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. La ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. (p. 1)

Señalemos que la ingeniería didáctica considera tres dimensiones en su construcción:

- una dimensión epistemológica que está asociada a las características del saber puesto en funcionamiento,
- una dimensión cognitiva que está asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza,
- una dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de re-enseñanza.

Es claro que la ingeniería didáctica es coherente con la estructura didáctica presentada anteriormente, ya que la dimensión epistemológica es correspondiente con el saber sabio y su transposición didáctica; la dimensión cognitiva está asociada al alumno; y la dimensión didáctica está asociada al profesor, la devolución, el medio y el contrato didáctico.

Ya definido el camino de nuestra metodología de investigación, Artigue (1995) señala que el proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

- análisis preliminares,

- concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas,
- experimentación.

También utilizaremos un enfoque etnográfico (Spradley, 1979), ya que el investigador tiene una observación participante, de modo que se sumerge en la realidad social que investiga. El investigador observa, acompaña y comparte las rutinas típicas del fenómeno que investiga. Él debe suponer que no sabe nada, y que va a aprender todo lo posible de sus informantes. Se trata de conocer el significado que tienen las acciones y los eventos para la gente (estudiantes y alumnos) que se estudia. Estos significados pueden expresarse a través del lenguaje, la palabra o la acción. El enfoque etnográfico nos entrega la fundamentación para participar como observadores en la puesta en acción de las prácticas pedagógicas de los estudiantes, y explicar que sucede con los aprendizajes de la geometría en los alumnos. Nos entrega también la fundamentación para obtener la percepción y argumentación de los estudiantes y alumnos sobre la construcción y puesta en acción del "capítulo paradigmático", conociendo sus "regularidades y variaciones". Esto se hace a través de la observación y de entrevistas en profundidad a los estudiantes y alumnos.

ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN

En la actualidad, este trabajo se encuentra en desarrollo en la Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Los estudiantes construyeron su capítulo paradigmático e iniciaron ya su práctica pedagógica para comenzar la etapa de observación de la aplicación del capítulo paradigmático en la escuela. Su construcción ha sido ya desarrollada, y los estudiantes han propuesto interesantes trabajos, que podrán ser vistos en la exposición de este trabajo.

Las primeras etapas de la observación de la aplicación aún no son muy alentadoras, ya que los estudiantes, en sus primeras actividades de práctica pedagógica, están repitiendo un modelo de enseñanza muy tradicional, copiando tal vez, cómo a ellos les enseñaron geometría. Es algo que está por verse y aún se requiere más información.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, Luis Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la* *investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (p. 33-60). México: Grupo Editorial Iberoamérica & una empresa docente. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Balacheff, N. y Margolinas, C. (2005). cK¢ Modele de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 1-32). Francia: La Pensée Sauvage – Editions. Disponible en http://ckc.imag.fr/images/d/df/Balacheff-Margolinas2005.pdf

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, y V. Warfield, Trs. y Eds.). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. (1996). *The culture of education*. Cambridge, EUA: Harvard University Press.

Campos, E.D.F. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1*(2). Disponible en http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/12

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Editorial Aique (primera edición en francés, 1985).

Fernández, M. y Erbilgin, E. (2009). Examining the supervision of mathematics student teachers through analysis of conference communications. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 93-110.

Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Leatham, K.R. y Peterson, B.E. (2010). Secondary mathematics cooperating teachers' perceptions of the purpose of student teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 99-119.

MINEDUC. (2011). *Programas de estudio del Ministerio de Educación*, Santiago, Chile.

Normandeau, M.-P. (2010). *Erreurs arithmétiques des élèves et interventions de l'enseignant débutant: une analyse didactique en termes de schèmes* (Tesis doctoral). Université de Montréal, Montréal.

OCDE. (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. España: Autor.

Spradley, J. (1979). *The ethnographic interview*. New York: EUA: Holt, Rinehart and Winston.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

EL APRENDIZAJE DE PROPOSICIONES CONDICIONALES USANDO GEOMETRÍA DINÁMICA

Nabil Ortegón, Guillermo Salas y Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
nabilortegon@hotmail.com, gsalas@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

Reportamos avances de una investigación en curso, enfocada en el proceso de conceptualización de la proposición condicional en matemáticas por parte de un grupo de estudiantes de educación básica. Se diseñaron tareas enmarcadas en un ambiente de geometría dinámica que buscan propiciar la interpretación de lo que es y lo que expresa una condicional en matemáticas. Con ellas pretendemos que los estudiantes comprendan que el consecuente es necesariamente resultado de las condiciones que se reportan en el antecedente y que el antecedente es suficiente para el consecuente. Presentamos respuestas a las tareas donde se evidencia lo mencionado anteriormente.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ · G*) de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), en consonancia con otros investigadores como Laudien (1999) en Chile, Laborde (2000) en Francia y Hoyles y Küchemann (2002) en Inglaterra, ha identificado algunas dificultades de los estudiantes relacionadas con la afirmación condicional como objeto matemático y como una herramienta en la deducción. Por ejemplo, observaron que los estudiantes interpretan la condicional como equivalente a su inversa pues creen que el antecedente y el consecuente son intercambiables, y que el mensaje es el mismo.

Las condicionales son afirmaciones usadas para expresar generalizaciones de propiedades matemáticas, ya sean como teoremas, postulados o conjeturas. Los investigadores concuerdan en que la falta de esta comprensión afecta la posibilidad de aprender a demostrar matemáticamente porque las condicionales juegan un papel importante en la deducción a través de esquemas de razonamiento válidos como modus ponendo ponens y modus tollendo tollens.

A partir de una prueba que realizamos a estudiantes del grado noveno del Instituto Pedagógico Nacional y del colegio República Bolivariana de Venezuela,

Ortegón, N., Salas, G. y Samper, C. (2013). El aprendizaje de proposiciones condicionales usando geometría dinámica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 243-250). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

corroboramos la existencia de esas dificultades. Los resultados de la prueba mostraron que los estudiantes: i) interpretan la condicional como bicondicional; ii) no identifican argumentos deductivos válidos; y iii) no pueden determinar si la conclusión dada en un argumento se puede deducir de manera válida de los datos de la hipótesis.

Lo anterior sustenta la pregunta que orienta nuestra investigación:

> ¿Cómo aprovechar la geometría dinámica para favorecer que los estudiantes escolares usen y aprovechen significativamente lo que es una proposición condicional en geometría?

Una aproximación a la respuesta, en calidad de hipótesis, podría ser que el uso de la geometría dinámica impulsa la comprensión y el uso correcto de la condicional, y ayuda a los estudiantes a mejorar sus habilidades argumentativas para justificar afirmaciones. Laudien (1999) se pregunta a qué edad o nivel escolar (si los hay) comienzan los estudiantes a distinguir una condicional de una bicondicional; a su vez Hoyles y Küchemann (2002) suponen que los estudiantes pasan de lo empírico a lo deductivo en grados superiores de bachillerato. En el desarrollo de nuestra investigación esperamos poder aportar algún tipo de respuesta a estos interrogantes y suposiciones.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

De acuerdo con nuestra hipótesis, nuestra atención se dirigió hacia artículos e investigaciones que aportan algunos elementos conceptuales y metodológicos en torno a esta problemática.

Gutiérrez (2005) asegura que es importante usar la geometría dinámica (GD) como herramienta de mediación porque permite que los estudiantes formulen conjeturas con un alto grado de convicción de la veracidad de estas y ayuda a mejorar su habilidad de razonamiento deductivo. Colette Laborde – refiriéndose a artículos publicados en el mismo número de la revista *Educational Studies in Mathematics* que el suyo (Laborde, 2000), señala que Jones, Mariotti, Gutiérrez y Hadas concluyen que la GD proporciona posibilidades para la formulación de justificaciones teóricas, posiblemente con la mediación del profesor. Por último, Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry (2010) sostienen que las tareas propuestas a estudiantes universitarios en un ambiente de trabajo apoyado por GD impulsan la interacción social en el aula y posibilitan la superación de dificultades asociadas a la comprensión de la condicional.

Echeverry, Molina, Samper Perry y Camargo y (2012) analizaron si unas estrategias didácticas usadas a lo largo de un semestre con estudiantes universitarios favorecieron el uso y la interpretación de la condicional. Para analizar respuestas a dos pruebas realizadas, una a principio del semestre y otra al final, establecieron dos grupos de categorías de análisis. El primero grupo se usó para estudiar el *tipo de justificación*, es decir para identificar en el argumento que expone el estudiante para justificar su decisión, cómo usan la información dada y si el argumento guarda relación con la lógica matemática. El segundo grupo de categorías de análisis se usó para estudiar el *uso de la condicional dada*; buscaban determinar si el estudiante reconocía la condicional como un instrumento para validar sus decisiones y cómo usaban los esquemas de razonamiento modus ponendo ponens y modus tollendo tollens. Estas categorías de análisis se convierten en el punto de partida para diseñar las que usaremos en el curso de nuestra investigación.

Por último, partiendo de que la matemática es una producción cultural, Moreno y Waldegg (2001), bajo el enfoque sociocognitivista, hacen referencia a que la interacción entre individuos se puede dar en dos líneas: simétrica y asimétrica. La primera se define como la interacción equilibrada; algunas formas de esta son: i) la cooperación; ii) el aprendizaje en grupo. La segunda se define como la interacción que tiene el experto (docente) con los estudiantes. En esta se reconoce la interacción tutorial, en la que el experto orienta al aprendiz y le ayuda a realizar alguna tarea. Este enfoque reconoce el conflicto sociocognitivo que surge por las interacciones sociales entre los estudiantes (e.g., distintos puntos de vista, diversos métodos y respuestas, discusiones, todo ello importante en el aprendizaje).

METODOLOGÍA

Para desarrollar nuestra investigación seguimos una metodología de indagación empírica, a través de experimentos de diseño. La investigación se está realizando con ocho estudiantes de décimo grado del Colegio República Bolivariana de Venezuela. Inicialmente se diseñó y se aplicó una prueba con la finalidad de identificar problemáticas específicas de los estudiantes que están participando en este experimento respecto a la interpretación de proposiciones condicionales. Al finalizar el experimento se realizará otra prueba para determinar si hubo cambios que se puedan atribuir a las acciones específicas de enseñanza en las que la GD juega un papel importante.

Posteriormente, se diseñó una secuencia de tareas para desarrollar en un ambiente de GD, encaminadas a que los estudiantes comprendan que una proposición condicional en geometría es aquella que expresa una dependencia entre propiedades. Aceptando que la construcción de conocimiento es un acto social, las respuestas a las tareas serán discutidas con los estudiantes para que a partir de ellas esta pequeña comunidad mejore su comprensión de lo que es una condicional. Simultáneamente, se realizó un análisis previo de las posibles actuaciones de los estudiantes en el proceso de resolución de las tareas, identificando construcciones, exploraciones y respuestas que podrían dar y la mediación correspondiente que debía hacer el profesor. Lo que sigue será analizar el registro de las construcciones que hacen los estudiantes, las conjeturas que plantean y las discusiones que tienen durante su trabajo y en el momento de la socialización, teniendo como referente las categorías que emergieron del análisis de la prueba inicial que son susceptibles a cambios.

Por último, las conclusiones de esta investigación, tendrán en cuenta aspectos particulares como: i) ambiente de aprendizaje ii) las tareas como herramienta para comprender la importancia de una condicional en una demostración y iii) el uso de la GD como mediadora en estos procesos.

EN CUANTO A LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

A partir de las respuestas de los estudiantes a las cuatro peguntas de la prueba inicial, establecimos nuestro primer conjunto de categorías de análisis. Para ilustrar, presentamos la Pregunta 2 y las respuestas de los estudiantes.

Pregunta 2: ¿Usted cree que la siguiente afirmación estaría en un libro de geometría? Explique su respuesta.

Si el cuadrilátero *ABCD* es rectángulo entonces el cuadrado de un número es mayor o igual a cero.

Respuestas:

> "Sí, porque tiene que ver con figuras geométricas".
>
> "No debería estar esta afirmación porque para que un cuadrilátero *ABCD* sea rectángulo, el cuadrado de un número no tiene que ser mayor o igual a cero".
>
> "Pues yo pienso que no porque a veces cosas de geometría se encuentran en libros de matemáticas o problemas de ecuaciones".

En la primera respuesta observamos que el estudiante no identificó dependencia; establecimos la categoría NID (no identifica dependencia). El argumento en la segunda respuesta menciona algún tipo de dependencia y por ello surge la categoría ID (identifica dependencia). Finalmente, la tercera respuesta no tiene relación con lo que se está preguntando y por ello se estableció la categoría RFC (respuesta fuera de contexto).

La siguiente tabla resume las categorías establecidas a partir de la prueba:

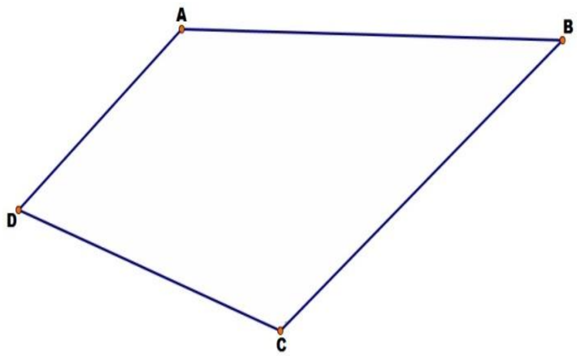
Categoría	**Significado**
Respuesta fuera de contexto (RFC)	Realiza una interpretación incorrecta de la situación y la asocia a un tipo de respuestas que no tienen relación con lo que se está preguntando.
Condicional implícita (CI)	Reconoce la condicional que subyace a la situación pero en la explicación no lo menciona de forma explícita en su respuesta.
Identifica dependencia (ID)	Identifica la dependencia entre las propiedades mencionadas en la situación.
No identifica dependencia (NID)	No identifica relaciones de dependencia entre propiedades.
Condicional explicita sin formato (CESF)	Responde con una condicional pero no usa el formato si… entonces…

Tabla 1: Categorías de análisis

DISEÑO DE LAS TAREAS

Estas tareas buscan que los estudiantes reflexionen sobre las dependencias que existen entre conjuntos de propiedades y formulen esas dependencias a través de proposiciones condicionales. El usar la GD permite que los estudiantes identifiquen el antecedente y el consecuente de una proposición condicional a través de las exploraciones y descripciones realizadas.

Entre las tareas planteadas hay problemas como el que se presenta en la Figura 1. Con este problema se busca que los estudiantes determinen la relación entre tipo de cuadrilátero y las propiedades de las diagonales, y que se percaten de que todas y cada una de las condiciones en el antecedente hacen una diferencia en el resultado que se reporta en el consecuente. Es decir, los estudiantes no deben dar una conclusión respecto a una propiedad si no están seguros de que las condiciones construidas que reportan en el antecedente realmente se tienen. Por ello, es imprescindible saber qué punto arrastran, qué medidas toman y en qué se están fijando cuando realizan el arrastre.



Construye las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.

Arrastra hasta lograr que las diagonales sean congruentes y que se bisequen (que el punto de intersección sea el punto medio de ambos segmentos). Describe el proceso de exploración.

Escribe la conjetura.

Figura 1: Ejemplo de problema propuesto a los estudiantes

A continuación describimos nuestra expectativa sobre el proceder de los estudiantes: 1) con el arrastre, hallando el punto medio de cada diagonal y su medida, logran que sean congruentes y se bisequen; 2) hacen una construcción robusta (Healy, 2000) de un cuadrilátero que cumpla las condiciones, trazando dos diámetros de una circunferencia y luego el cuadrilátero determinado por los extremos de estos. La conjetura esperada es: *si* ***las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan*** *entonces* ***es un rectángulo.***

Un grupo de estudiantes concluyen, a partir de una primera construcción, lo siguiente: “si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces se encuentran dos triángulos isósceles iguales y dos diferentes”. Ante el cuestionamiento del profesor sobre la seguridad de su respuesta, proceden a maximizar su construcción y un estudiante nota que “se descuadró. Lina me va avisando cuando el punto se cuadre”. Es decir, observan que en efecto las diagonales no se bisecan. Realizan nuevamente la construcción y cambian su conjetura por la siguiente: “si las diagonales del cuadrilátero son congruentes y se bisecan entonces se forma un rectángulo”.

En la siguiente sesión, el docente retomó lo ocurrido en la clase anterior para reforzar la importancia de las relaciones entre los dos conjuntos de propiedades: las que están en el antecedente y las que están en el consecuente. Les explicó que aunque visualmente las representaciones obtenidas parecen cumplir las dos condiciones de las diagonales, haber obtenido resultados diferentes significa que no están reportando una dependencia real.

Construcción 1 ($p \rightarrow q$)   Construcción 2 ($p \rightarrow s$)

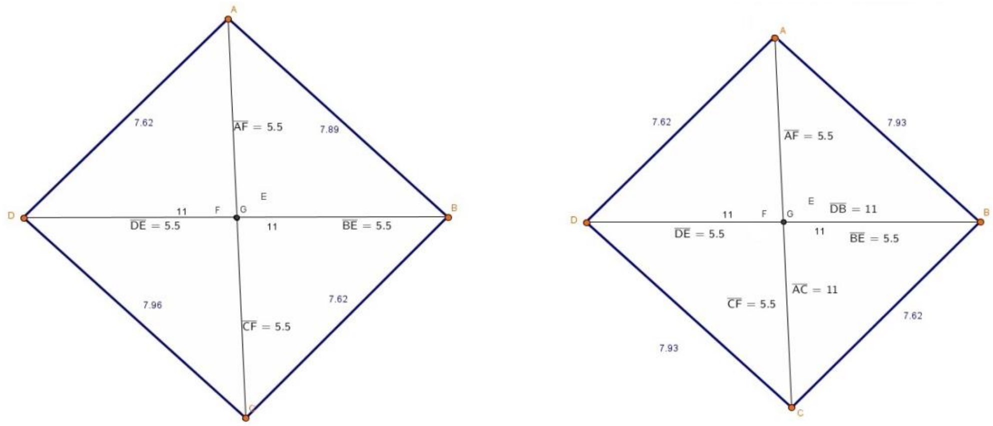


Figura 2: Construcción errónea y acertada

Aprovechó la situación para explicar que una condicional reporta una dependencia entre las propiedades dadas en el antecedente y las que constituyen el consecuente. El docente explicó que una exploración a partir del arrastre ofrece ideas de posibles dependencias, pero que como hay diferentes variables que están en juego es posible que no se consiga de manera precisa la construcción deseada. Por ello, sólo con una construcción robusta se puede asegurar la posible validez teórica y, por ende, establecer la conjetura. Así, el profesor indica que en la hipótesis de la primera conjetura sólo se debe mencionar la congruencia de las diagonales y que añadir la otra condición permite concluir que el cuadrilátero es un rectángulo.

Son experiencias visuales de este tipo, las que esperamos que ayuden a los estudiantes a entender lo que es y expresa una condicional, experiencias posibles sólo a través de la geometría dinámica.

CONCLUSIONES

Dado que lo que estamos reportando es el avance de la investigación, no podemos llegar a conclusiones respecto a la eficiencia de la secuencia de tareas para responder de forma positiva nuestra pregunta de investigación. Sin embargo, respecto a la prueba inicial, como solamente 18 de las 32 respuestas las clasificamos como ID, CI y CESF, ello indica que, en general, los estudiantes reconocieron que los problemas trataban sobre dependencias entre propiedades pero nunca expresaron ese reconocimiento formulando explícitamente una condicional. Por otro lado, las acciones y repuestas del problema sobre las diagonales del cuadrilátero ofrecieron elementos suficientes para que el docente pudiera tratar asuntos respecto a la condicional, propiciando así la comprensión de ésta.

REFERENCIAS

Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P. y Camargo (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 77-92. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2055/1/2012-Echeverry%26Proposicion.pdf

Gutierrez, Á. (2005). Aspectos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploración con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 27-44). Córdoba, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robst and soft cabri Construtions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 101-117). Hiroshima, Japón: Universidad de Hiroshima.

Hoyles, C. y Küchemann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*(3), 193-223.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 151-161.

Laudien, R. (1999). Misunderstanding of if-then as if and only if. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 225-231). Columbus, EUA: Eric Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2001). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. en C. Castiblanco, L. Moreno, F. Rodríguez, M. Acosta, L. Camargo y E. Acosta (Eds.), *Memorias del seminario nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas* (pp. 52-57). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O. y Echeverry, A. (2010). Geometría dinámica. Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces. *Educación Matemática, 22*, 119-142.

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA EN EL BACHILLERATO, CON ÉNFASIS EN SU DIMENSIÓN CULTURAL

Jesús Salinas
Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM-México
jes54@unam.mx

Se presentan algunos resultados de un experimento de enseñanza, utilizado para introducir un curso de geometría, con una perspectiva histórica. En dicho experimento se hace énfasis en la dimensión cultural de las matemáticas y, en consecuencia, en valores de las matemáticas. El contexto histórico que se toma en cuenta es el que enmarca la aparición y el desarrollo de la aritmética pitagórica. Se realizan actividades mediante las cuales los alumnos conocen aspectos históricos y culturales que propiciaron el surgimiento del enfoque deductivo de las matemáticas. El objetivo central del artículo es mostrar y analizar la opinión que expresan los alumnos del enfoque histórico utilizado.

INTRODUCCIÓN

En este artículo se describe brevemente un experimento de enseñanza basado en la historia de las matemáticas, que tiene el propósito de poner de relieve la dimensión cultural de las matemáticas (Fauvel, 1991; Bishop, 1991/1999) y conocer la opinión de los alumnos acerca de este enfoque. Un experimento de enseñanza involucra una secuencia de episodios de enseñanza. Dichos episodios "incluyen un agente de enseñanza, uno o más estudiantes, un testimonio de los episodios de enseñanza, y un método de registro de lo que sucede durante el episodio"[1] (Steffe y Thompson, 2000, p. 274).

Las matemáticas, como toda creación del ser humano, son un fenómeno cultural (White, 1959/1982). Por ello, su dimensión cultural se debe tener en cuenta, pues no solo están constituidas por contenidos conceptuales y procedimentales que se pueden usar en la solución de problemas, sino que también poseen valores (Bishop, 1991/1999). Sin embargo, este aspecto social y cultural de las matemáticas se suele desconocer por las prisas en adquirir técnicas matemáti-

[1] Esta y las demás traducciones de citas que aparecen en el documento son mías.

Salinas, J. (2013). Una introducción a la geometría en el bachillerato, con énfasis en su dimensión cultural. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 251-258). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cas y por el deseo de lograr una enseñanza matemática “eficiente” (Kline, 1972).

Los valores son una parte inherente de la educación en todos los niveles y juegan un papel importante en establecer un sentido de identidad personal y social en los estudiantes (Bishop, 2008). En consecuencia, si solo pretendemos comprender las matemáticas como una tecnología simbólica concreta, comprenderemos solo una pequeña parte de ellas: de hecho, quizá la menos importante para la educación y para el futuro del ser humano (Kline, 1972; Bishop, 1991/1999).

En este documento presentamos la opinión de alumnos de primer semestre de bachillerato acerca de un experimento de enseñanza, en el cual, desde una perspectiva histórica, se trata explícitamente un valor de las matemáticas, el racionalismo, y se aborda conjuntamente con el tratamiento de contenidos conceptuales y procedimentales. De esta manera, nos propusimos acercar a los alumnos a una comprensión no solo técnica sino cultural de las matemáticas (Fauvel, 1991; Kline, 1972; Bishop, 1991/1999).

MARCO TEÓRICO

Para el diseño de este experimento adaptamos diferentes ideas que se articulan en la perspectiva sociocultural de Vygotski (1978/2009), la cual considera los procesos de mediación semiótica de las herramientas culturales, de los instrumentos psicológicos y de la mediación social. Vygotski considera el proceso de aprendizaje como un proceso de apropiación de los métodos de acción de una cultura dada. En esta apropiación, los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial. Para que un experimento de enseñanza pueda propiciar un aprendizaje, mediante la adquisición de instrumentos psicológicos, debe cumplir tres características fundamentales: intencionalidad, trascendencia y significado (Feuerstein, 1990). La *intencionalidad* se refiere a la principal función del sujeto mediador: transformar una experiencia incidental en intencional. Esta intencionalidad se enfoca en el objeto de aprendizaje. En este caso, se realizó llamando la atención de los alumnos hacia el aspecto de interés del objeto de aprendizaje, es decir, el carácter histórico de los conceptos matemáticos de número y figura geométrica. La *trascendencia* se refiere a que la enseñanza debe conducir hacia algo que trascienda el tema específico y apunte hacia la transmisión de la cultura. En este experimento de enseñanza, se hicieron explícitos valores que sustentan el enfoque racionalista de la matemática helena. Con respecto al *significado*, se llamó la atención a identificar propiedades de los números y su relación con las figuras geométricas.

Las matemáticas, como fenómeno cultural, son producto y portadoras de valores. Bishop (1991/1999) describe tales valores como parejas complementarias relacionadas con tres dimensiones: ideológica, actitudinal y social, en las cuales ubica respectivamente los valores de racionalismo y objetivismo, control y progreso, apertura y misterio. En este experimento de enseñanza destacamos, explícitamente, el racionalismo como el valor central de las matemáticas (Kline, 1972).

En la antigüedad, la cultura helena dio preeminencia a la razón como la vía más adecuada para el conocimiento. Desde entonces y representado paradigmáticamente por las matemáticas, que han privilegiado el razonamiento deductivo, el racionalismo se ha convertido en una ética primaria. Así, "el racionalismo, como opuesto a la tradición, al dogma religioso y a la experiencia o la condición personal, es el principio rector del desarrollo matemático" (Bishop, 1991/1999). Como escribió Morris Kline (1972):

> En su aspecto más amplio las matemáticas son un espíritu, el espíritu de la racionalidad. Este es el espíritu que desafía, estimula, vigoriza, y conduce las mentes humanas para ejercitarse al máximo. Este espíritu trata de influir decisivamente en la vida física, moral y social del hombre, pretende responder a los problemas planteados por nuestra propia existencia, se esfuerza por comprender y controlar la naturaleza, y se ejerce para explorar y afirmar las más profundas y máximas implicaciones del conocimiento ya obtenido. (p. 27).

METODOLOGÍA

Se propició la interacción entre alumnos y entre profesor-investigador y alumnos como parte del proceso de negociación de significados. Las actividades se resolvieron en parejas constituidas por los propios alumnos. Todas las intervenciones del profesor-investigador estuvieron orientadas a describir previamente el contexto histórico y cultural en el que se desarrolló la aritmética pitagórica y en explicar las ideas esenciales de Pitágoras acerca de los números.

Para comenzar, se explicó a los alumnos el cambio de enfoque de la matemática helena, que dio origen a la geometría deductiva, y que representa una superación muy importante respecto del carácter empírico, característico de la matemática de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto. Los alumnos realizaron una investigación sobre los antecedentes históricos de los sistemas numéricos y acerca del origen del pensamiento filosófico, y de las matemáticas en Grecia. Posteriormente, se realizaron actividades de clase cuyos contenidos se tomaron y adaptaron de la aritmética pitagórica.

La población

La población observada fue un grupo de 24 alumnos de primer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 12 hombres y 12 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

Instrumentos de observación

Los datos obtenidos se tomaron de las hojas de actividades realizadas en el salón de clase y de un cuestionario. Tales datos se expresaron en forma de textos y se realizó un análisis cualitativo de ellos. En este artículo se documenta el análisis de las respuestas al cuestionario.

Procedimiento

Se implementó una secuencia didáctica conformada por diversas actividades. La duración fue de 7 horas.

Apertura de la unidad didáctica. Se abordó la concepción filosófica de número de los pitagóricos y se describió en qué consistía su aritmética (González, 2009). Se trabajó con los números poligonales y se mostró la estrecha relación que los pitagóricos establecieron entre el aspecto geométrico y el aritmético. Esta fase se realizó en dos sesiones de hora y media cada una.

Desarrollo de la unidad didáctica. Los estudiantes resolvieron problemas de la aritmética pitagórica centrando su atención en patrones aritméticos y geométricos, series y sucesiones y la representación de los números poligonales.

Cierre de la unidad didáctica. Se les pidió probar un teorema de la aritmética pitagórica, es decir, dar un argumento que mostrara la validez de la proposición: La suma de dos números triangulares sucesivos da un número cuadrado. Para esta actividad los alumnos dispusieron de una hora.

Al término de la secuencia didáctica se administró un cuestionario, con las siguientes preguntas:

1. El tratamiento de aspectos históricos de la matemática ¿te despertó mayor interés por las matemáticas? Sí o No. ¿Qué aspecto te resultó interesante?

2. ¿Qué diferencia crees que tuvo la matemática griega con respecto a la de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto?

3. La dimensión histórica de las matemáticas ¿te hizo ver una dimensión humana de ellas? Sí o No. ¿Cuáles?

4. ¿Te resultaron interesantes los problemas de la aritmética pitagórica relacionados con los números poligonales? Sí o No. ¿Por qué?

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Pregunta 1. El tratamiento de aspectos históricos de la matemática ¿te despertó mayor interés por las matemáticas?

La respuesta de 17 alumnos (70%) fue afirmativa, cuatro opinaron que no les había despertado mayor interés y uno no respondió. Es un resultado que habla, en términos generales, de una opinión positiva de los alumnos acerca del experimento de enseñanza y propicia una reflexión en el profesor con respecto a considerar la historia de las matemáticas como una estrategia didáctica, pues apunta a un propósito central de la educación matemática: estimular y apoyar el aprendizaje de los alumnos (Wittmann, 1984).

Algunas respuestas a la pregunta ¿Qué aspecto te resultó interesante? fueron:

> "Pues me resultó interesante en general ya que nos enseñó a ver las matemáticas no solo con aritmética, álgebra u otros aspectos sino que nos enseña a ver a las matemáticas en el aspecto histórico desde sus principios y orígenes y esto está muy bien ya que siempre hay que conocer las cosas desde sus orígenes y con qué propósito o cómo y por qué surgieron".

> "Pues para mí lo interesante de todo esto es el hecho de que en la antigüedad los pitagóricos pensaban que se podía explicar todo por medio de una base numérica y comprendiendo las bases de la matemática se podían explicar toda clase de fenómenos. También es interesante el aspecto de que una persona se haya interesado tanto por el saber más que para ser importante, para comprender todo el mundo que lo rodea, y así poderse explicar mejor la realidad de las cosas".

En este tipo de respuestas se observa que algunos alumnos se interesan por conocer la historia de las matemáticas. Asimismo, valoran el conocimiento y ven las matemáticas como un medio para conocer la realidad.

Pregunta 2. ¿Qué diferencia crees que tuvo la matemática griega con respecto a la de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto?

Algunas respuestas:

> "Yo creo que las matemáticas de Mesopotamia y Egipto eran más de práctica aunque tenía que ver con un pensamiento mágico y religioso, mientras que la griega era de razonamiento y crítica intelectual".

> "La diferencia radica en la forma de pensar de estas personas ya que se puede decir que la matemática griega fue la primera en alcanzar el carácter de avanzada pues no solo fue utilizada para la contabilidad de algunas cosas, como el ganado por ejemplo, o las semillas que en este caso eran muy importantes para la vida que se llevaba en ese tiempo, también se estudiaron las propiedades de los números y se llevaron a cabo la creación de fórmulas para representar situaciones generales de la matemática".

Se puede observar en estas respuestas que los alumnos se dan cuenta, en cierta medida, de la relación de las matemáticas con la cultura de las sociedades en que se desarrollaron. La lectura de las respuestas muestra que los alumnos asocian las matemáticas antiguas con algunas características de las culturas egipcia, mesopotámica y griega. Distinguen el contraste entre una actitud práctica y otra más teórica o intelectual, que acentúa un valor racional. Asimismo, se percatan de que las actitudes de estas culturas también promueven un tipo de pensamiento, mágico y religioso o de crítica intelectual. También, se encuentra implícita la idea de que las matemáticas ayudan a desarrollar el pensamiento, más allá de sus aplicaciones.

Pregunta 3. La dimensión histórica de las matemáticas ¿te hizo ver una dimensión humana de ellas? ¿Cuál?

Algunas respuestas:

> "Cómo fue evolucionando el hombre tiene una relación con la aparición de las matemáticas, debido a que es una invención humana para ver la realidad de otro modo, pues se quiere tener un control sobre las cosas así que busca método como las matemáticas".

> “La dimensión que para mí me hizo ver es que conforme vamos evolucionando nosotros la matemática también lo hace ya que la adaptamos para nosotros y la hacemos más sencilla de comprender o en algunos casos más compleja para aumentar o descartar las dudas sobre lo que nos rodea”.

Por una parte, es interesante que identifiquen las matemáticas como invención humana para conocer la realidad. Por otra, las respuestas reflejan otras características y valores importantes de las matemáticas: el sentimiento de seguridad y el control que da el conocimiento en un mundo en constante cambio; un sentimiento de progreso, de crecimiento, y el aspecto importante de este valor es que lo desconocido se puede llegar a conocer (Bishop, 1991/ 1999).**Pregunta 4**. ¿Te resultaron interesantes los problemas de la aritmética pitagórica relacionados con los números poligonales? ¿Por qué?

> “La verdad sí me parecieron muy interesantes ya que es otra forma de resolver o más bien de encontrar números está muy bien que haya puesto eso porque eso todavía nos exige más ya que tenemos que pensar más y eso puede hacer que crezca nuestro intelecto en las matemáticas y sí está muy padre”.

> “Era una actividad muy buena para pensar bien en cómo obtener los números ya que no teníamos fórmulas y el cómo dibujar la siguiente posición y saber que los números también se pueden representar con algunas figuras geométricas a través de los puntos”.

> “Te hacían razonar y reflexionar cada número para poder plantear una solución y al hacer tantas operaciones te interesabas tanto que planteabas diversos métodos para llegar a un posible resultado”.

No obstante ser de carácter intelectual y no de aplicación a situaciones reales, en general las respuestas expresan gusto e interés por este tipo de problemas. Les resultó estimulante buscar y descubrir soluciones por ellos mismos y valoran las matemáticas como medio para desarrollar su pensamiento.

Conclusiones

Este experimento de enseñanza permitió que los alumnos tuvieran un acercamiento novedoso a la aritmética pitagórica: descubrieron patrones numéricos y geométricos de los números poligonales y la relación entre ellos. Asimismo, los alumnos se introdujeron al reto de realizar una prueba matemática como un medio fundamental de validar un resultado matemático. En general, los estudiantes manifestaron que este enfoque les resultó interesante. Además, esta experiencia hizo posible que los alumnos establecieran un contacto con el carácter racional del pensamiento matemático, lo valoraran y pusieran en práctica. Además, en las opiniones de distintos alumnos se esbozan otros valores como el control y el misterio, que representan un tipo de variables afectivas, creencias y actitudes, cuyos valores podrían subsecuentemente ser internalizadas en el respectivo sistema afectivo-cognitivo de los alumnos. Finalmente, se observó, que también distintos alumnos expresan una idea fundamental de los propósitos de la educación matemática: darse cuenta de que las matemáticas ayudan a comprender la realidad (Wittmann, 1984).

REFERENCIAS

Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural* (Genis Sánchez Barberán, Tr.). Barcelona, España: Paidós (primera edición en inglés, 1991).

Bishop, A.J. (2008). Values in mathematics and science education: Similarities and differences. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *5*(1) 47-58.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 13-16.

Feuerstein, R. (1990). The theory of structural cognitive modifiability. En B. Presseisen (Comp.), *Learning and thinking styles: Classroom interaction* (pp. 68-134). Washington, D. C., EUA: National Education Association.

González, P.M. (2009). *Pitágoras. El filósofo del número*. Madrid, España: Nivola Libros y Ediciones.

Kline, M. (1972). *Mathematics in Western culture*. London, Reino Unido: Pelican.

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum.

Vygotski, L.S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner y Ellen Souberman, Eds.; Silvia Furió, Tr.) Barcelona, España: Crítica (traducción del inglés, 1978).

White, L.A. (1982). *La ciencia de la cultura. Un estudio sobre el hombre y la civilización* (Gerardo Steenks, Tr.). Barcelona, España: Paidós (primera edición en inglés, 1959).

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 25-36.

¿ARGUMENTAR PARA DEFINIR O DEFINIR PARA ARGUMENTAR?

Luz Silva y **Carmen Samper**
Universidad Pedagógica Nacional
luzhsilva@hotmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

Se presenta y se ilustra un marco de referencia de un estudio en curso para obtener el título de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia); estudio sobre la conexión entre las acciones de definir y argumentar, que puede contribuir a la práctica de profesores en ejercicio y en formación. La habilidad para construir una definición es un posible indicio de comprensión, mientras que saberla de memoria no garantiza la comprensión del concepto (Vinner, 1991). Por ello, se ha criticado la enseñanza de definiciones de geometría que no haga énfasis en el proceso subyacente de definir, lo cual favorece la argumentación. Según Kublikowski (2009), la definición y la argumentación están conectadas.

PROBLEMA

Las evidencias empíricas y los aportes teóricos de investigadores en educación matemática ponen de manifiesto la necesidad de un nuevo enfoque en el tratamiento de las definiciones en geometría. No se deben presentar a partir de enunciados previamente construidos por matemáticos o autores, como aparecen en los libros de texto, y solo utilizarlas posteriormente para argumentar, sino que se debe dar al estudiante la oportunidad de participar en la formulación y elección de las propiedades que definen el objeto o la relación, acción que también favorece la argumentación. Esta necesidad genera la pregunta: ¿qué características tienen las tareas para el aula, que propician la argumentación en torno a la definición de un concepto?

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Definición

En Calvo (2001), una definición matemática es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular –sus elementos son nociones primitivas o definidas previamente– y consistente –sin contradicciones lógi-

Silva, L. y Samper, C. (2013). ¿Argumentar para definir o definir para argumentar? En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 259-266). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cas. Calvo menciona dos características de las definiciones matemáticas: convencionalidad y minimalidad.

La *convencionalidad* se refiere a que las definiciones no están predeterminadas sino que las selecciona el matemático, el autor de un libro de texto o el profesor, atendiendo a dos factores principales: el tipo de caracterización del concepto matemático que se requiera en un momento dado y las convenciones en el grado de restricción utilizado para definir un concepto matemático. Con respecto a este segundo punto, de Villiers (1994) clasifica las definiciones en jerárquicas y particionales. Una *definición jerárquica* permite que los conceptos más particulares sean subconjuntos de los más generales, mientras que en una *definición particional*, los subconjuntos de conceptos se consideran disyuntos.

La *minimalidad* se refiere al hecho de que una definición no incluya información redundante. Cuando este es el caso se habla de una *definición económica*; sin embargo, a una definición se le puede agregar más información de la necesaria sin que pierda el formato de definición matemática. Por ello, Govender y de Villiers (2002) consideran que una definición es incorrecta si contiene una propiedad incorrecta o si las propiedades mencionadas son insuficientes.

Cada definición determina un conjunto de objetos, llamado *conjunto de ejemplos*, que cumplen las condiciones dadas en la definición. Se habla de *definiciones equivalentes* cuando dos o más definiciones determinan el mismo conjunto de ejemplos (Calvo, 2001, p. 30).

Formación de conceptos

Una de las teorías sobre la formación de conceptos matemáticos en el ámbito educativo, la desarrolló Vinner (1991), quien propone la distinción entre concepto e imagen del concepto. El *concepto* es el objeto matemático determinado por una definición formal, mientras que la *imagen del concepto* es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Vinner considera que al desarrollar las matemáticas deductivamente en el aula, como ocurre por lo regular, es posible que el profesor presente en sus clases una secuencia de definiciones, teoremas y demostraciones que desde el punto de vista pedagógico podría ser incorrecta al no tener en cuenta el proceso de adquisición de conceptos y de razonamiento lógico. Por esta razón, Vinner pone de manifiesto que cuando se decide cómo enseñar matemáticas, es necesario tener en cuenta no solo cómo se *espera* que los estudiantes adquieran conceptos matemáticos sino también, y principalmente, cómo los estudiantes *realmente* adquieren esos conceptos.

El gran reto para los profesores es favorecer la articulación entre la definición del concepto y la imagen del concepto para avanzar en la construcción de objetos geométricos. ¿Y cómo se puede favorecer esta construcción?

- Considerar propiedades relevantes e irrelevantes en las representaciones juega un papel importante en la comprensión del concepto, como se evidenció en el estudio de Hershkowitz y Vinner (1982). Por ello, es conveniente considerarlas dentro del proceso de construcción de un concepto.

- Construir figuras representativas con diferentes instrumentos puede apoyar la construcción de un concepto matemático formal teniendo en cuenta que cada instrumento puede aportar diferentes aproximaciones al concepto, contribuyendo así con diferentes características de este (Chassapis, 1998). Por ello, es conveniente diseñar actividades en torno a un mismo concepto que requieran el uso de instrumentos distintos.

- Convertir la construcción y el análisis de definiciones en una tarea consuetudinaria del aula, tal como lo proponen Samper, Molina y Echeverry (2011), hace posible modificar la imagen conceptual y el espacio de ejemplos de los estudiantes. También hace posible mostrar que las definiciones son arbitrarias y que dependen del contexto teórica en el que se construyen. Tal tarea se puede apoyar con el uso de un software de geometría dinámica. Hacer propia la propuesta mencionada contribuye a responder la pregunta en cuestión.

- Construir un espacio de ejemplos que les permita a los estudiantes familiarizarse con un concepto y adoptar nuevos conceptos (Watson y Mason, 2005). Ello ayudará a enriquecer la imagen conceptual.

De Villiers (2004, 1998) distingue dos maneras diferentes de definir los conceptos: descriptiva (a posteriori) y constructiva (a priori). Definir de manera descriptiva un concepto significa que se define después de haber conocido, por algún tiempo, propiedades de este. En otras palabras, la imagen del concepto está desarrollada antes de formular una definición del concepto. Una definición a posteriori generalmente se hace seleccionando unas propiedades del concepto a partir de las cuales se pueden deducir las demás. Ese subconjunto de propiedades se convierte en la definición, y las propiedades restantes se derivan como teoremas.

Definir de manera constructiva (a priori) significa que cierta definición de un concepto se cambia a través de la exclusión, generalización, especialización, sustitución o adición de propiedades, construyendo un nuevo concepto en el proceso. En este caso, la definición del nuevo concepto precede a la posterior exploración de las propiedades adicionales y al desarrollo de la imagen del concepto. Mientras que el objetivo principal de una definición a posteriori es sistematizar el conocimiento existente, la función principal de una definición a priori es producir nuevo conocimiento.

Argumentación

Un argumento se considera como una razón que se ofrece a favor o en contra de una proposición u opinión (Boero, Douek y Ferrari, 2008). Leitao (2007) considera la argumentación como una actividad discursiva que se caracteriza por la defensa de puntos de vista y la consideración de perspectivas contrarias. Para Boero, Douek y Ferrari, la argumentación no solo es el proceso que produce un discurso conectado de manera lógica –no necesariamente deductivo– sino también el texto producido en ese proceso. Como lo plantea Leitao, cuando se presenta la necesidad de defender un punto de vista se genera un proceso de negociación en el cual se formulan las ideas propias y, posiblemente, se transforman. Este proceso le confiere a la argumentación el potencial de promover conocimiento al involucrar al sujeto que argumenta en un proceso de revisión de sus propios puntos de vista y de su conocimiento.

Según Kublikowski (2009), la argumentación y la definición están conectadas de diferentes formas. Algunas de ellas son: argumentación acerca de la definición, argumentación desde la definición y argumentación por definición.

- Una *argumentación acerca de la definición* tiene como fin llegar a una definición, que es el punto final, la conclusión de una discusión. El proceso argumentativo termina cuando se obtiene la definición.

- En la *argumentación desde la definición*, una definición es el punto inicial de una discusión. Ocurre cuando quien argumenta construye argumentos usando definiciones bien establecidas e indiscutibles.

- Finalmente, en la *argumentación por definición*, una definición juega el papel de una premisa en una estructura argumentativa. Para Kublikowski, este es el uso más fuerte de una definición.

EJEMPLO DE CONSTRUCCIÓN A POSTERIORI DE UNA DEFINICIÓN

En una clase de Elementos de Geometría en la Universidad Pedagógica Nacional, se construyó la definición de altura de un triángulo a partir de propuestas de los estudiantes. Inicialmente, los estudiantes, a partir de su imagen conceptual (Vinner, 1991), representaron un triángulo y una de sus alturas con dos instrumentos diferentes (Chassapis, 1998): papel y lápiz, y un software de geometría dinámica. Luego, escribieron su definición.

A continuación, se evidencian los argumentos acerca de la definición (Kublikowski, 2009), que tiene un grupo de estudiantes (argumentar para definir).

22.	Estudiante 2:	¿Qué es altura?
23.	Estudiante 3:	Entonces, la altura es (comienza a escribir) es un segmento. ¿Estamos de acuerdo en que es un segmento?
24.	Estudiante 1:	Perpendicular a… a un segmento

Después de una discusión sobre la posición de la altura (horizontal o vertical) siguen escribiendo:

40.	Estudiante 2:	La altura es el segmento…
41.	Estudiante 1:	Perpendicular…
42.	Estudiante 3:	¿Cómo se escribe perpendicular?
43.	Estudiante 1:	[…] Perpendicular a cualquier segmento paralelo (silencio). No. ¿Sí me entiende?
44.	Estudiante 2:	…a cualquier punto paralelo (silencio). Es que suena rarísimo.
45.	Estudiante 1:	Sí. ¿Sí me entiende?
46.	Estudiante 2:	A cualquier punto de referencia. Ya.

Finalmente escriben la siguiente definición: “La altura es el segmento perpendicular a cualquier punto de referencia”.

En la segunda parte de la clase, durante el proceso de socialización de las definiciones propuestas en los grupos, se evidencian argumentos desde la definición (Kublikowski, 2009) (definir para argumentar). Comienza así la determinación de las propiedades relevantes para la definición (Hershkowitz & Vinner, 1982).

68.	Profesora:	[…] tengo dos grupos que dicen lo siguiente (escribe las definiciones en el tablero): La altura de un triángulo es la medida de su base hasta el punto común de los dos lados adyacentes a la base.
		[…]
102.	Profesora:	[…] Bueno. Los demás grupos me dicen que la altura es un segmento […] El grupo E me dice que la altura es un segmento (escribe en el tablero y subraya la palabra segmento). Como digo todos los demás me hablan de un segmento. Primera cosa importante: es un segmento. (Sigue leyendo en voz alta y escribiendo en el tablero)… que se forma a partir de una base.
		[…]
104.	Profesora:	[…] En el grupo B también hablan de un segmento perpendicular.

Pasa un estudiante del grupo B y muestra su construcción en Cabri. Después de arrastrar algunos puntos, ven que este grupo definió altura para un tipo particular de triángulos: los isósceles.

114.	Profesora:	¿Es punto medio? Ajá. O sea que tu definición es: la altura es un segmento que se forma a partir del punto medio de la base (escribe la definición en el tablero). Pero además le pusiste que fuera…
115.	Estudiante 9:	Puse que fuera perpendicular.
		[…]
127.	Profesora:	[…] Varios grupos mencionan que la altura es un segmento perpendicular (escribe en el tablero) ¿Tú hiciste segmento perpendicular? (Pregunta a un estudiante). ¿Sí? Déjame ver (mira el trabajo que hizo su grupo en la calculadora) Perfecto, pasa un minuto.

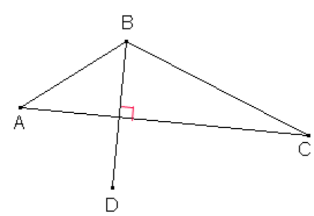
El estudiante muestra su construcción y verifica que el segmento construido como altura sí es perpendicular al otro segmento (lado del triángulo). Pero cuando usa el arrastre para verificar si siempre se cumple esta propiedad, todos los estudiantes descubren que su espacio de ejemplos era reducido (Watson y Mason, 2005).

128.	Profesora:	¿Y qué pasa?

129. Estudiante 11: Cuando el ángulo C es obtuso ya no es perpendicular a ese segmento.

130. Profesora: Se desaparece ese segmento, ¿no? Se desaparece el segmento. Entonces, viene mi primera pregunta. ¿Es que la altura no… en este caso, en esta zona donde se desaparece… no es con vértice en B sino que la tengo que hacer desde otro vértice?

Luego discuten sobre las razones por las cuales desaparece la altura cuando el ángulo es obtuso y se ve la necesidad de referirse, en la definición, a la recta que contiene el lado opuesto. Así surge la siguiente definición: "Dado un vértice de un triángulo y el lado opuesto, la altura es el segmento perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto con extremo en ese vértice". Al representar lo que describe la definición, ven que es una definición incorrecta (Govender y de Villiers, 2002) porque puede ocurrir el siguiente caso, donde el $\overline{BD}$ cumple las condiciones pero no es altura.



Viendo que es necesario agregarle una condición que se refiera al otro extremo del segmento, la definición queda de la siguiente manera: "Dado un vértice de un triángulo y el lado opuesto, la altura es el segmento perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto con un extremo en ese vértice y el otro extremo en un punto de dicha recta".

El proceso anterior dio lugar a la construcción a priori de una definición económica (Calvo, 2001; de Villiers, 1998) porque se fueron añadiendo propiedades relevantes, producto de la argumentación acerca de la definición y sobre los contraejemplos. Lo anterior es un ejemplo de una aproximación a una definición que favorece la articulación entre la imagen conceptual y la definición del concepto a través de la argumentación.

REFERENCIAS

Boero, P., Douek, N. y Ferrari, P.L. (2008). Developing mastery of natural language. En L.D. English (Ed.), *International handbook of research in mathematics education* (pp. 262-295). New York, EUA: Routledge.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona, España.

Chassapis, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(3), 275-293.

Govender, R. y de Villiers, M. (2002). *Constructive evaluation of definitions in a sketchpad context*. Presentado en Associated Mathematics Educators of South Africa AMESA 2002, University of Natal, Durban, South Africa.

Hershkowitz, R. y Vinner, S. (1982). Basic geometric concepts - definitions and images. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 18-23). Anthwerp, Bélgica: Universitaire Instelling Antwerpen.

Kublikowski, R. (2009). Definition within the structure of argumentation. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *16*(29), 229-244.

Leitão, S. (2007). Processos de construção do conhecimento: A argumentação em foco. *Pro-Posições*, *18*(3), 75-92.

Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2011). *Elementos de geometría*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Villiers, M. de (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Villiers, M. de (1998). To teach definitions in geometry or teach to define. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch.

Villiers, M. de (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703-724.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Netherlands, Holanda: Springer.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

TENSIONES Y NEGOCIACIONES DEL PROFESOR CUANDO INSTALA UN TEOREMA: UN EJEMPLO EN GRADO NOVENO

Camilo Sua y **Óscar Molina**
Universidad Pedagógica Nacional
jcsuaf@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

Se presenta un avance del trabajo de grado que desarrollo para optar por el título de maestría en docencia de las matemáticas. El trabajo se enfoca en la reflexión sobre mi práctica profesional vista desde la Teoría de la Racionalidad Práctica. Analizo un episodio de clase a la luz de tal teoría, apoyándome en uno de sus elementos: la situación instruccional que, para el caso, es la instalación de un teorema. Explicito las normas que de suyo surgen en una situación tal y amplío este conjunto de normas desde el análisis realizado.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la última década, la investigación en educación matemática ha mostrado un interés por el estudio de la práctica reflexiva del profesor (Perry, Andrade, Fernández y Perry, 2000). Estos autores señalan que las reformas educativas y los resultados poco favorables, fruto de las mismas, han sugerido considerar elementos dentro del aula –el profesor y sus acciones– dado que es él quien influye de manera más directa en el desarrollo académico de los estudiantes. La práctica reflexiva del profesor de matemáticas se convierte, entonces, en un mecanismo con el cual analizar las acciones del profesor y un medio que le posibilita mejorar su práctica profesional. Con el fin de examinar al profesor inmerso en su práctica, adoptaré la Teoría de la Racionalidad Práctica propuesta por Herbst y Chazan (2011). Según esta teoría, las acciones del profesor se justifican en el marco de situaciones específicas y normas que estas situaciones sugieren (Miyakawa y Herbst, 2007). Debido a que mi asunto de interés se centra en las acciones del profesor que determinan un ambiente de clase que favorece la actividad demostrativa, conviene adoptar esta teoría por cuanto propone la caracterización de una situación similar a la que consideraré en este documento: la instalación de un teorema (Herbst y Nachlieli, 2006).

Aquí destaco una tensión que enfrenta un profesor de matemáticas como consecuencia de las acciones que realiza al momento de instalar un teorema con

Sua, C. y Molina, Ó. (2013). Tensiones y negociaciones del profesor cuando instala un teorema: un ejemplo en grado noveno. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 267-274). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

un grupo de estudiantes que trabajan bajo una aproximación metodológica específica. Expongo las normas que caracterizaron la interacción de los miembros de una clase bajo una secuencia didáctica específica, y la manera en que el profesor resuelve dicha tensión para cumplir con los objetivos que tenía en mente al momento de proponer la actividad.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La *práctica reflexiva* es un mecanismo con el cual puedo mejorar mi práctica profesional de manera significativa (Perry, Andrade, Fernández y Perry, 2000). Un primer paso en el proceso de mejoramiento, fundamental además, es identificar un problema en el aula que surge como producto de mis actos; en tal sentido, cobra significado estudiar las acciones que como profesor realizo en el aula en el marco de una situación y con un objetivo educativo específico. Desarrollar este estudio implica comprender los asuntos que permean mi práctica docente y pueden llegar a ser objetos de reflexión. Es pertinente trabajar sobre una base teórica con la que pueda analizar los componentes que regulan mi ejercicio profesional. Describo a continuación la teoría que usaré.

La Teoría de la Racionalidad Práctica (TRP en adelante) se enmarca en un enfoque teórico que concibe la enseñanza de las matemáticas como una práctica determinada por las relaciones que se crean entre profesor, estudiantes y el conocimiento matemático. Esta teoría considera la enseñanza a la luz de tensiones, problemas y dilemas que permean la labor del profesor. La TRP se apoya en constructos que explican las relaciones que se dan en el aula, entre sus miembros, en relación al contenido matemático y las tensiones que surgen en el profesional en ejercicio de su labor. Propone diversos elementos para describir estos asuntos. Aquí me interesa considerar: las *situaciones instruccionales* y las *normas* asociadas a ellas. Por *normas* entenderé una tendencia o costumbre central, con respecto a la cual todas las acciones desarrolladas en el aula tienen cierta cercanía (Miyakawa y Herbst, 2007). Aunque algunos momentos de la clase tienen un conjunto amplio de normas, orientadas al profesor y a la labor del estudiante, es posible que ellos las incumplan (Moore-Russo y Weiss, 2011) y así, el profesor deba tomar decisiones encaminadas a cumplir sus objetivos institucionales (i.e., agenda y contenido matemático).

Las *situaciones instruccionales* (simplemente situaciones) definen fragmentos de clase como unidades de trabajo con un conjunto de acciones para sus miembros, y con las que se pone en juego cierto conocimiento matemático

(Herbst, 2006). Las situaciones comprenden ciertas normas, por lo tanto, pueden verse como una forma normativa de realizar ciertas acciones (Miyakawa y Herbst, 2007). Así, normas específicas pertenecerán a situaciones específicas, y las normas regularán lo que se espera que hagan profesor y estudiante en el marco de alguna actividad. Esto no significa que las situaciones, vistas como un conjunto de normas, determinen una única forma de actuar en clase. Algunos experimentos (Herbst, 2003) muestran cómo ciertas normas pueden variar, y examinan las razones por las que esto ocurre, justificando así este hecho. Sin embargo, ¿siempre se desarrollan estas situaciones de manera apropiada? o en particular, ¿de qué manera se promueven estas normas entre los miembros? En el desarrollo de las situaciones es posible que surjan eventualidades que el profesor no había considerado al momento de planificar alguna actividad (Herbst, 2003). Estas eventualidades crean *tensiones*[1] en el profesor frente a su práctica profesional, tensiones por la necesidad de cumplir una agenda institucional. Adicionalmente, al plantear una actividad que promueva un significado matemático, el profesor debe establecer normas y condiciones con las se comprometerán los miembros para el desarrollo de la actividad. Las *negociaciones* refieren a la toma de decisiones del profesor en cada uno de los momentos presentados anteriormente (Herbst y Chazan, 2011). Para Herbst (2006), establecer condiciones de trabajo en clase incluye que el profesor negocie con sus estudiantes tanto los significados matemáticos en juego como el contexto instruccional en que estos significados surgirán.

CONTEXTO DEL ESTUDIO

El episodio que discutiré tuvo lugar en un curso de noveno grado (estudiantes de 14 a 16 años) durante el desarrollo de una secuencia didáctica cuyo objetivo era la construcción de un sistema teórico local asociado al objeto par lineal. Aquí informo sobre la instalación de un teorema.

METODOLOGÍA DE ESTUDIO

El desarrollo del estudio se estructuró en tres fases: diseño de una secuencia didáctica –incluidos los problemas para proponer a los estudiantes; gestión de

[1] Herbst (2003) menciona tres tensiones del profesor frente a las diversas formas de solucionar una tarea por parte de los estudiantes. Estas tensiones se relacionan con la forma en que se orienta la actividad de los niños, la representación de los objetos matemáticos en juego y la forma en que la tarea debe provocar unas acciones conceptuales específicas.

la clase con base en la secuencia; análisis de la gestión del profesor frente a la producción de los estudiantes. Se filmó el desarrollo de la clase y se transcribieron los fragmentos de la grabación que interesaba estudiar. Para las dos primeras fases tuve en cuenta la aproximación metodológica[2] para la enseñanza propuesta por el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, Æ.G,* de la Universidad Pedagógica (Colombia): particularmente me apoyé en Samper, Perry, Camargo y Molina (evaluación) para el diseño de tareas, y en Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (2012) para la forma de intervención del profesor al establecer normas de interacción entre los miembros de la clase. Haciendo eco a tal aproximación metodológica, en este estudio investigativo, particularmente, en el trascurso de la interacción, el profesor avanzaba por cada grupo observando las estrategias utilizadas por cada uno sin ofrecer puntos de vista frente a la pertinencia o no del trabajo realizado. Al finalizar la tarea, el profesor escogía un grupo para que socializara su proceso de solución y los demás grupos apoyaban o refutaban las ideas expuestas. Sobre el análisis generado frente a los resultados obtenidos, tuve en cuenta los constructos de la TRP que querían destacarse en los episodios grabados.

ANÁLISIS DE DATOS

La situación propuesta consiste en formular una definición para ángulos par lineal y dos hechos geométricos que se derivan de ella[3]. Para su desarrollo, los estudiantes contaron con ángulos de distinta medida formados en cartón. Este episodio corresponde a la situación: *instalar un teorema* (Miyakawa y Herbst, 2007). El desarrollo de la clase permitió observar cinco momentos de interacción, que describo a continuación.

En torno a…	**Finalidad y logros obtenidos**
Definir ángulos par lineal	Proponer de forma colectiva una definición aceptada por los miembros. Un grupo expone su definición, los otros apoyan o no sus ideas y

[2] El grupo plantea tal aproximación metodológica para la enseñanza de la actividad demostrativa, actividad conformada por dos procesos: el de conjeturación, cuyo producto es una conjetura; y el de justificación, cuyo producto es la explicación, prueba o demostración del enunciado conjeturado (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011).

[3] Los hechos geométricos considerados son: *La suma de las medidas de dos ángulos par lineal es igual a 180* y "*Si un ángulo es recto, el ángulo que forma par lineal con él también es recto.*

	el profesor orienta las ideas que emergen en el diálogo.
Explorar una situación	Se proveen a los grupos varios ángulos, con sus medidas, para que solucionen la tarea: Utilizando los ángulos hechos en cartón, encontrar parejas que formen ángulos par lineal.
Conjeturar una relación	Usando las parejas de ángulos que formaban par lineal, se observa que la suma de sus medidas es 180. Esta conjetura es mediada por el profesor frente al lenguaje y la estructura de la proposición condicional.
Conjeturar una segunda propiedad	El profesor propone la tarea: Si un ángulo es recto, ¿qué podemos decir sobre el ángulo que forma par lineal con él? Justifique su respuesta. Se pretende que los estudiantes tengan un primer acercamiento a la justificación de una conjetura.
Argumentar para apoyar conjetura	Dos grupos exponen sus resultados frente a la tarea. Los grupos plantean distintos argumentos en su producción.

Tabla 1: Momentos identificados en el desarrollo de la clase

Del primer momento se obtienen las condiciones de la definición: *dos ángulos que comparten un lado y los otros dos determinan rayos opuestos*. Con este resultado se pasa a la exploración de una situación y luego a la formulación de una conjetura. Presentamos un fragmento del diálogo entre profesor y estudiantes que ilustra un evento que tuvo lugar en los grupos de trabajo.

1. P: ¿Cómo hacen para saber que sí cumplen la condición? [Refiriéndose a que los dos ángulos forman par lineal]
2. E1: Porque comparten un mismo rayo y dan 180. [Realizan un gesto con los dedos indicando que los otros dos rayos son opuestos].
3. P: Yo no he dicho 180. ¿No?
4. E2: Pero ahí está en las condiciones.
5. P: Pero miren que las condiciones establecidas no incluyen eso.
6. E2: Ah, forman rayos opuestos.
7. E1: Forman dos ángulos.
8. P: son dos ángulos
9. E1: Sí. Son dos ángulos.

En otro grupo surge el siguiente diálogo:

1. P: ¿Cómo hacen para saber que sí cumplen…?
2. E4: Sumando los dos ángulos.
3. P: ¿Sumándolos? Pero…
4. E3: No. Y que formen los rayos opuestos.
5. E4: Como es una recta [hablando de los rayos opuestos], entonces la recta tiene 180 grados. Entonces es un ángulo de 180 grados

Durante la exploración surge una *tensión* en el profesor frente a la forma en que los estudiantes solucionan la tarea. Ellos justifican su desarrollo usando lo que debe concluirse y dejan de lado la definición previamente construida. Se genera una inconsistencia entre lo que el desarrollo de la tarea "debería" promover y lo que los estudiantes realizaron para solucionarla. Las acciones del profesor son *negociaciones* hacia una consideración exclusiva de la definición. Esto se justifica en cuanto la definición de par lineal es el único elemento teórico, útil para este caso, que se ha establecido en la comunidad. Esta forma de actuar, la avalan las *normas* que la *actividad demostrativa* promueve (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011). La conjetura que resulta de este trabajo se enuncia así: *Si dos ángulos son par lineal, la suma de sus medidas es 180.*

La tarea propuesta tiene como finalidad instalar, para la clase, un teorema, esto es, conocer un teorema antes desconocido. Esta situación involucra dos normas (Herbst, 2007): (i) asumir una afirmación como verdadera y (ii) justificarla dentro de una teoría; esta última norma se puede precisar atendiendo la propuesta del grupo *Æ . G* en cuanto que la justificación realizada debe darse en un sistema teórico local aceptado por la comunidad (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011). En el episodio que se consideró, el profesor no recurre a la justificación formal de esta conjetura. En su lugar, se valida que los rayos opuestos de los ángulos par lineal determinan una recta. Este hecho, junto a la idea primitiva de los estudiantes sobre "ángulos llanos" y su medida igual a 180º, permite justificar informalmente la conjetura obtenida. Justificamos esta acción del profesor dado que la definición de ángulos par lineal es el único elemento teórico hasta ahora construido en el curso y por lo tanto no hay elementos conceptuales con los que pueda estructurarse esta conjetura a la luz de otros hechos geométricos aceptados.

La gestión del profesor en relación con este problema permitió ver otras normas, diferentes a las que propone la teoría sobre *instalar un teorema*. A continuación las exponemos:

Según Miyakawa y Herbst (2007)	Los miembros de la clase deben ver la validez de una proposición. La proposición debe ser justificable dentro de una teoría compartida.	
Según el episodio analizado	*Para los estudiantes*	*Para el profesor*
	Interactuar con sus compañeros para promover la discusión de hechos geométricos	Interactuar con grupos desde la observación de las estrategias utilizadas en la solución de una tarea. No brindar soluciones o correcciones a lo desarrollado por los estudiantes.
	Proponer conjeturas y justificación a las mismas apoyados únicamente en lo que se ha asumido como aceptado.	Mediar entre las propuestas de los estudiantes y el uso de un lenguaje adecuado y correcto.
	Discuten frente a lo que los grupos proponen como solución de la tarea.	Favorecer la discusión invitando a distintos grupos a exponer sus ideas.

Tabla 2: Normas relativas a la actividad de instalar teoremas en clase

CONCLUSIONES

Este estudio parcial permite observar dos asuntos interesantes al considerar la TRP. En primer lugar, permitió analizar un episodio de clases bajo el constructo de *situaciones*. Con ello fue posible observar y analizar algunas acciones realizadas por los miembros frente al desarrollo de un problema y explicar tensiones que enfrenta el profesor en el desarrollo de su práctica. En segundo lugar, detectar otras normas no explicitas por la TRP. La Tabla 2 ilustra, para profesor y estudiantes, tres normas adicionales dadas bajo la aproximación del grupo *Æ . G*. Sugiero que estas normas emergentes son producto de tal aproximación. Las acciones desarrolladas para instalar un teorema desde esta aproximación involucran más compromisos para los miembros; estas normas son establecidas por el profesor principalmente. Este resultado sugiere puntos de discusión, a saber: ¿las normas son preestablecidas por la aproximación metodológica o surgen en el desarrollo de ésta?, ¿pueden establecerse previamente las tensiones que emergen en el profesor de manera tal que en las planeaciones de clase éstas sean consideradas? y finalmente, ¿puede el objetivo de la tarea ser desvirtuado en cierto punto de la negociación producto de las tensiones surgidas?

REFERENCIAS

Herbst, P. (2003). Using novel tasks in teaching mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American Educational Research Journal*, *40*(1), 197-238.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 313-347.

Herbst, P. y Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: Studying the justification of actions in mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462. Recuperado de http://www.math.umt.edu/tmme/vol8no3/HerbstChazan_TME2011_article1_pp.405_462.pdf

Herbst, P. y Nachlieli, T. (2006). "*Installing*" *a theorem in high school geometry: How and when can a teacher expect students to use a theorem?* En S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 241-242). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Miyakawa, T., y Herbst, P. (2007). Geometry teachers' perspectives on convincing and proving when installing a theorem in class. En T. Lamberg y L.R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meetings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 366-373). Statelin, EUA: University of Nevada.

Molina, O., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2011). *Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. Revista Integración*, *29*(1), pp. 73-96

Moore-Russo, D. y Weiss, M. (2011). Practical rationality, the disciplinary obligation, and authentic mathematical work: A look at geometry. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 463-483.

Perry, P., Andrade, L., Fernández, F. y Perry, R. (2000). *Elementos para una conceptualización de la reflexión del profesor de matemáticas acerca de su práctica*. Manuscrito no publicado, "una empresa docente", Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L. y Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon*, *29*(3), pp. 41-56.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Molina, Ó. (evaluación). *Innovación en un aula de geometría de nivel universitario*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

PRÁCTICAS DISCURSIVAS Y RECURSOS PEDAGÓGICOS EN CLASES DE GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA: EL CASO DEL ORIGAMI

Ana Valencia
Universidad del Valle; Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio
anny894@hotmail.com

Se presenta una reflexión sobre la enseñanza situada. Se exponen resultados de la identificación y el análisis de las prácticas discursivas de maestros cuando tuvieron la intención de enseñar geometría vinculando la origámica a sus clases, en el nivel de educación básica. A este artículo lo orienta la tesis de maestría realizada en la Universidad del Valle dentro de la línea de investigación en lenguaje, comunicación y razonamiento de saberes matemáticos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La enseñanza de geometría elemental, la práctica discursiva, la geometría origámica, el enfoque comunicacional y el recurso pedagógico son las unidades de análisis que guiaron la investigación de la que se informa en este artículo. El estudio centró su atención en desarrollar y aportar caminos a la siguiente pregunta problema: ¿Cuál es el direccionamiento que, a partir de sus prácticas discursivas, hace el maestro de educación básica a los recursos pedagógicos que pone en juego al proponer en sus clases actividades que involucran geometría origámica?

Se formuló como objetivo general: identificar y analizar las prácticas discursivas de dos maestros de educación básica, cuando dan una orientación particular a los recursos pedagógicos puestos en acto, al trabajar actividades que involucraron geometría origámica. Además, se plantearon conexos tres objetivos específicos: (i) describir la práctica de enseñanza de docentes de educación básica que proponen actividades en sus clases en el marco de la geometría origámica; (ii) caracterizar las prácticas discursivas a través de las cuales el profesor da una orientación particular a los recursos pedagógicos que pone en juego en sus clases de geometría; (iii) identificar a partir de referentes curriculares que orientan su práctica de enseñanza en el marco institucional, las connotaciones, sentidos y usos que se le otorgan a los recursos pedagógicos en lo referente a geometría.

Valencia, A. (2013). Prácticas discursivas y recursos pedagógicos en clases de geometría en la educación básica: el caso del origami. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 275-282). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

BREVE RECORRIDO POR LA GEOMETRÍA ORIGÁMICA

En la literatura relacionada se reconoce el alcance interesante que tiene el origami tanto desde el punto de vista de la lúdica y del arte, aspectos que de entrada llaman la atención de los estudiantes, como de lo psicomotriz (Rodríguez, 2006). Sin embargo, para el interés del estudio se destacó la importancia del origami desde el punto de vista geométrico, pues es un marco constituido como una alternativa teórica en el que se pueden abarcar todas las construcciones y figuras de la geometría elemental, es decir, las involucradas en las bases de la geometría euclidiana.

Klein (1895) reseña el libro *Geometric Exercises in Paper Folding* (Sundara, 1853/1901) señalando que el autor presenta construcciones geométricas con doblado de papel: polígonos regulares, círculos y otras curvas; además, trabaja series aritméticas, geométricas y armónicas; y explica algunos principios generales entre los que se destacan la simetría, la congruencia, la concurrencia de líneas rectas y la colinealidad. En el mencionado libro, Sundara indica que para la solución de los ejercicios propuestos solo se requieren trozos de papel, y que con dobleces pueden llevarse a cabo construcciones geométricas importantes más fácilmente que con regla y compás: por ejemplo, para dividir segmentos de rectas y ángulos en dos o más partes iguales, para dibujar líneas perpendiculares y paralelas a rectas dadas. Para él, el marco del doblado de papel no solo ofrece ocupaciones interesantes a los estudiantes, sino que también prepara la mente para la apreciación de la ciencia y el arte. De igual manera, indica que la enseñanza de geometría plana en las escuelas se puede hacer muy interesante con la vinculación del plegado de papel.

En 1936, la italiana Margherita Beloch Piazzolla analizó el origami en términos de sus construcciones geométricas, de acuerdo con un cierto conjunto de axiomas que ella formuló. En su escrito *Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col método del ripiegamento della carta* demostró que con doblado de papel se pueden resolver ecuaciones de tercer grado y también se pueden obtener numéricamente las raíces reales de ecuaciones de cuarto grado. Beloch fue seguida más tarde por Huzita (1989) quien la reconoció como su inspiración principal y quien propuso seis axiomas para este marco geométrico. En 2001, con la incorporación de un séptimo axioma por parte de Hatori (2001) se hizo más fuerte esta geometría y amplió las construcciones posibles.

DELIMITACIÓN TEÓRICA

La delimitación teórica acoge reflexiones sobre la enseñanza en educación básica, particularmente en lo que tiene que ver con las prácticas discursivas, con fuerte influencia de la perspectiva sociocultural de Lev Vigotski, base del enfoque comunicacional de Anna Sfard. Se buscó articular prácticas discursivas y enfoque comunicacional con teoría relativa a los recursos pedagógicos, predominantemente con trabajos de Luc Trouche y Claire Margolinas, y con la geometría origámica desde los trabajos de Humiaki Huzita y Koshiro Hatori.

En el *enfoque comunicacional* (Sfard, 2008), propuesto en esencia como principio básico para el estudio de la cognición humana, el pensamiento se conceptualiza como un caso de comunicación, es decir, como la comunicación con uno mismo, lo que le da un estatus diferente al lenguaje en relación con los recursos pedagógicos en el marco de la geometría origámica.

Se acogen además aspectos de la perspectiva instrumental para hacer la distinción entre artefacto e instrumento. Según Rabardel y Samurçay (2001), el *artefacto* se entiende como un dispositivo material o simbólico, construido como expresión potencial para la renovación de la cultura. De otra parte, es posible hablar de un *instrumento* cuando hay una relación significativa entre el artefacto –o una parte del artefacto– y el usuario para tratar con cierto tipo de tareas. La *herramienta* se constituye en un *instrumento* a través de un proceso de apropiación que permite a la *herramienta* mediar la actividad.

Trouche (2006) pone de relieve que los artefactos no son más que propuestas, que serán desarrolladas, o no. En términos de Mariotti y Maracci (2010) a partir de un *artefacto*, un *instrumento* puede cumplir una tarea de *mediación*; de aquí se deja ver que todo *instrumento* tiene una parte material y otra psicológica, la material relacionada con el *artefacto* y la psicológica con el desarrollo de *esquemas*[1] por parte del sujeto cuando trabaja con el *instrumento*.

[1] Mariotti y Maracci (2010, citando a Vergnaud, 1990) indican la definición de esquema dada por el psicólogo francés a partir de lo propuesto por Piaget, caracterizándolo como una organización o composición de invariantes, expectativas, normas de actuación para inferir reglas que generan las acciones apropiadas para lograr los objetivos.

METODOLOGÍA

Se inscribe en un marco cualitativo con el estudio de casos como estrategia para narrar e identificar las formas cualitativamente diferentes en que los docentes perciben y conceptualizan a partir de sus prácticas y rol profesional, contextualizadas en el aula de clases. Se adapta el enfoque comunicacional para analizar las prácticas discursivas de los maestros en lo relacionado a la orientación de los recursos pedagógicos en clases donde se vincula la geometría origámica. Para la presentación de los protocolos de clase se incorporó una columna correspondiente a la prosodia y los gestos, aspectos destacados en relación con la geometría origámica.

Entre los criterios de selección de los casos se consideraron: maestros pertenecientes a grados diferentes de educación básica que tuvieran a su cargo un curso de geometría, que vincularan la geometría origámica a sus clases y, por supuesto, que contaran con la disponibilidad para vincularse al proyecto. Se inició la búsqueda con la indagación en las actas de eventos académicos, proyectos relacionados con el Ministerio de Educación Nacional (MEN), y propuestas al Premio Compartir al Maestro. Se lograron contactos con maestros en Valle del Cauca, Cauca, Cundinamarca y Antioquia. De ellos se seleccionaron: una maestra, Lilian, que labora en Caloto (Cauca) y un maestro, Andrés, que labora en Cali (Valle), con los que se llegó a un acuerdo sobre las visitas correspondientes; el acompañamiento se dio durante 11 y 7 semanas respectivamente.

Se usaron estrategias de recolección de datos característicamente descriptivas e interpretativas: datos naturalistas como grabaciones realizadas en aulas de clase por un profesional en el ámbito de la comunicación social y el periodismo; entrevistas formales e informales, y observación no participante. Esas estrategias permiten al investigador ponerse en contacto con el contexto de estudio en relación con la práctica de enseñanza de los maestros. Fue pertinente entonces un trabajo de registro escrito, de audio y fílmico con la intención de observar y escuchar una y otra vez las prácticas discursivas de los maestros vinculadas a los recursos pedagógicos. Del tiempo de filmación se optó por identificar y segmentar los fragmentos (videoclips) de videos que se consideraron pertinentes para el análisis.

El marco metodológico favorece los resultados de esta investigación al considerar la triangulación. Esta, elegida como estrategia para destacar que los análisis se enriquecieron, tanto por la confrontación de las apreciaciones de por lo menos dos investigadores del GEM, como por la comparación de los aportes de las diferentes fuentes de recolección de datos citadas.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

El análisis de las prácticas discursivas del aula se enfocó en el profesor. Para representar la interacción se usaron los diagramas de flujo tal como los maneja Sfard (2008). El facsímil de la Figura 1 muestra qué representan los diagramas y los símbolos con los que se hace la representación: canales personales y tipo de verbalización. Los tipos de verbalización se representan con flechas. La reactiva apunta vertical o diagonalmente, hacia atrás o hacia arriba; este tipo expresa el hecho de que la verbalización de partida (en la que la flecha se origina) es una reacción a la verbalización en cuestión (a la que está apuntando). La flecha proactiva apunta vertical o diagonalmente, hacia adelante o hacia abajo; este tipo de flecha simboliza el hecho de que la verbalización de partida invita a una respuesta, por tanto, se espera que la siguiente verbalización sea una reacción.

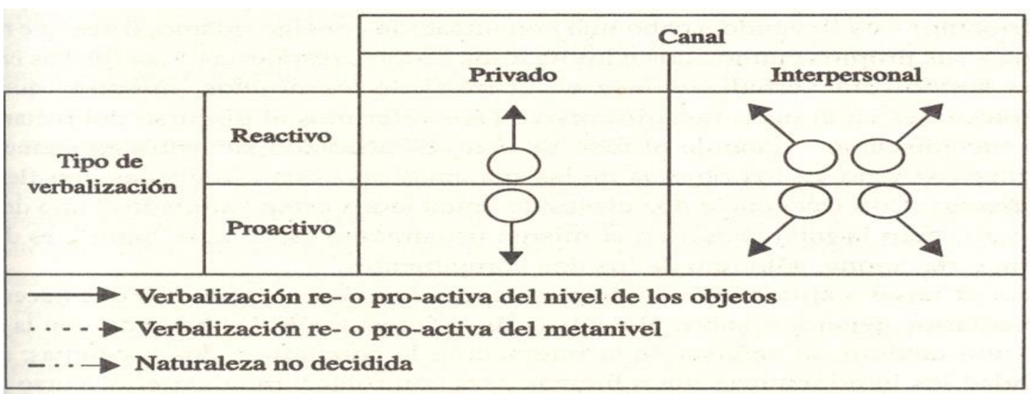


Figura 1: Símbolos de diagrama de flujo de la interactividad (Sfard, 2008, p. 139)

Las flechas pueden conectar verbalizaciones hechas por diferentes interlocutores. Son las oblicuas; las continuas simbolizan verbalizaciones en el nivel de los objetos. Las punteadas simbolizan las interacciones en el nivel metadiscursivo (cuando el foco de una verbalización se centra en elementos discursivos y no en los objetos de las matemáticas).

A continuación, un fragmento de protocolo de clase (Figura 2) de la maestra Lilian y su respectivo diagrama de flujo de la interactividad (Figura 3).

Lo que fue dicho
[11] P.: Bueno, listo, sin utilizar lápiz ni regla en este papel. Oigan, sin utilizar regla ni lápiz. Vamos a ver; me van a hacer un punto

Prosodia-gestos	*Lo que fue dicho*
[14] E2.: 	[14] E2.: ahhh muy fácil, uno coge con el dedo así.

Figura 2: Protocolo de maestra Lilian. Sesión 1. Duración protocolo completo 2:16 min.

La instrucción dada en la intervención [11]: "[…] Sin utilizar regla ni lápiz […]", dejó entrever una decisión didáctica relacionada con la preocupación de la maestra de que los estudiantes usaran solo el doblado de papel, pero dejó abierto un campo de posibilidades por lo que apareció lo del dedo como un punzón.

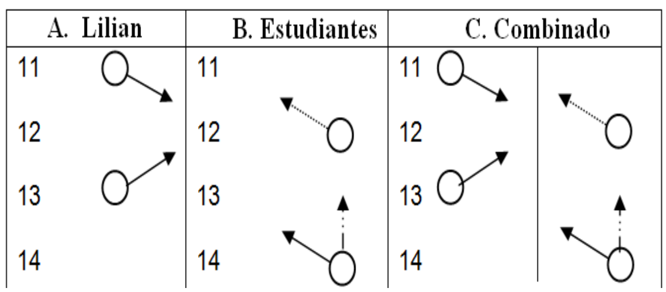


Figura 3: Diagrama de flujo de la interactividad

En la sesión, de acuerdo al diagrama de flujo se pudo notar que la mayoría de las intervenciones de la maestra fueron del tipo proactivas, la maestra promovió la interactividad con sus estudiantes, que además surtió efecto pues se logró verificar con la columna correspondiente a los estudiantes donde la mayoría de las intervenciones fueron reactivas.

Conclusiones

Las conclusiones se expresan en términos de las relaciones entre las unidades de análisis y la triangulación de los datos y los análisis expuestos. De acuerdo a ello se destaca la importancia de las *prácticas discursivas* de los maestros, tanto en su forma escrita y oral como gestual, que usualmente se descuidan en estudios que vinculan el trabajo con *recursos pedagógicos*, cuando de hecho ellas dan sentido y orientan interrelaciones, en aras de promover pensamiento geométrico en los estudiantes.

Dichas *prácticas discursivas* las reorientó la maestra al vincular la *geometría origámica* pues buscó conectar aquello que *dijo* con lo que *hizo* mediante el doblado de papel. Las intervenciones principalmente quedaron en términos de instrucciones sobre por *dónde* se debían realizar los dobleces. Los diagramas de flujo asociados a los protocolos de la maestra dejaron ver mayor interactividad con los estudiantes, sus intervenciones constantemente solicitaban una reacción por parte de sus estudiantes, aspecto presentado en menor nivel en los que arrojó el caso del maestro Andrés. En esta línea de ideas, el *enfoque comunicacional* trabajado en la investigación mostró una funcionalidad en la presentación del *análisis preocupacional* (Sfard, 2008) de los maestros.

De igual manera, las *prácticas discursivas* de los maestros orientaron *los recursos pedagógicos* según sus *intencionalidades* y *decisiones didácticas*. Se observaron situaciones en las cuales sus prácticas discursivas distan del marco geométrico de referencia adoptado, que según ellos mismos reiteraron es el de la *geometría origámica.* Se observaron principalmente la orientación hacia el enfoque artístico del doblado de papel y sus potencialidades desde el punto de vista axiomático, aunque luego solo se muestre como "auxiliar" de la *geometría euclidiana,* por lo cual puede quedar como un marco poco aprovechado en el nivel de *educación básica* desde el punto de vista geométrico.

En lo que atañe a la *enseñanza de geometría* y las disposiciones *curriculares* se concluye que los maestros vinculados de manera autónoma se interesaron por trabajar geometría desde un enfoque diferente, donde la opción de la *geometría origámica* sobresalió; también ellos organizaron los ejes temáticos que se trabajarían teniendo en cuenta las particularidades de sus estudiantes y el contexto en que encontraban. Para la preparación de las clases, los maestros realizaron búsquedas en materiales impresos así como también en Internet. Ya en el acontecer de la clase, en general, vincularon transportador, hojas de papel, videos, doblado y desdoblado de papel, corte y superposición de figuras.

Finalmente, las *prácticas discursivas* de los maestros son sumamente importantes en la orientación y articulación del *recurso pedagógico* pues de no ser así este perdería el sentido y quedaría como un accesorio, además de que se desaprovecharía para el desarrollo de pensamiento geométrico en los estudiantes, particularmente al involucrar *geometría origámica* que permite una manera llamativa y una base teórica fuerte de trabajo, que permite la trisección de ángulos así como abordar otros problemas que no son posibles de solucionar en otros marcos de referencia.

REFERENCIAS

Beloch-Piazzolla, M. (1936). Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col método del ripiegamento della carta. En L. Berzolari (Ed.), *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari* (pp. 93-96). Pavia, Italia: Istituto Matematico della R. Università.

Hatori, K. (2001). *Origami construction*.

Recuperado de http://www.jade.dti.ne.jp/~hatori/library/conste.html

Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. En H. Huzita (Ed.), *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology* (pp.143-158). Ferrara, Italia: Comune di Ferrara and Centro Origami Diffusion.

Klein, F. (1895). Vortrage uber ausgewahlte Fragen der Elementargeometrie. Leipzig, Alemania: Teubner.

Mariotti, M.A. y Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour l'enseignant. En G. Gueudet, L. Trouche y M. Artigue (Eds.), *Ressources vives: le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Rennes, Francia: Edition proposée aux Presses Universitaires de Rennes.

Rabardel, P. y Samurçay, R. (2001, marzo). *From artifact to instrumented-mediated learning. New challenges to research on learning*. International symposium organized by the Center for Activity Theory and Developmental Work Research, Universidad de Helsinki, Finlandia.

Rodríguez, J.A. (2006). Influencia de la práctica del origami sobre el desarrollo de la percepción viso-espacial en un grupo de origamistas bogotanos entre 20 y 30 años de edad (Trabajo de grado). Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia.

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. (Gloria Castrillón, Ed.; Patricia Perry y Luisa Andrade, Trads.). Cali, Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle.

Sundara, T. (1901). *Geometric exercises in paper folding*. Chicago, EUA: The Open Court Publishing Company (edición original, 1853).

Trouche, L. (2006). Instruments du travail mathématique et dispositifs d'enseignement dans les environnements informatisés. En L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas y A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques? Actes des journèes mathèmatiques INRP*. Lyon, Francia: Institut National de Recherche Pédagogique.

LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE PROBLEMAS EN CONTEXTO

Johnny Vanegas, Sara Henao y Jeisson Gustin
Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
yovanegasdiaz@gmail.com, saramarcelahenao@gmail.com, jeissongustin@gmail.com

Investigaciones recientes en educación matemática reconocen las grandes posibilidades que ofrece la introducción de temáticas relacionadas con la *teoría de grafos* en la formación del pensamiento lógicomatemático, la intuición y la resolución ingeniosa de problemas de diversa índole. Este artículo busca ilustrar algunas de estas posibilidades, a través de un problema paradigmático en la historia de las matemáticas: el de "los siete puentes de Königsberg", en el que se reconoce una conexión entre las matemáticas y el mundo real, lo cual desde la perspectiva de las denominadas matemáticas en contexto podría favorecer la integración de los procesos de resolución de problemas y la modelación matemática en las clases de matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La *teoría de grafos* se presenta como uno de los diversos campos matemáticos que investigadores y educadores en didáctica de las matemáticas han empezado a "revisitar", como escenario apropiado para la integración de procesos matemáticos como la *resolución de problemas* y la *modelación matemática*.

En efecto, algunos investigadores (e.g., Braicovich y Cognigni, 2011) consideran que el uso de la teoría de grafos, como herramienta conceptual en la construcción de modelos y resolución de problemas, posibilita la adquisición y el desarrollo de diversas habilidades en los estudiantes; específicamente, las que se relacionan con la construcción de razonamientos alrededor de la matemática discreta, como son: la intuición, la exploración, el descubrimiento y el diseño de hipótesis. Habilidades que aportan considerablemente al desarrollo del pensamiento lógico y a la visión espacial de los estudiantes, así como a la formación del razonamiento abstracto.

De esta visión, los *grafos* pueden considerarse como una abstracción útil para modelar una amplia gama de problemas en contexto: problemas asociados a redes de computadora, redes telefónicas o eléctricas, circuitos eléctricos, sis-

Vanegas, J., Henao, S. y Gustin, J. (2013). La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 283-290). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

temas de carretera, sistemas de transporte, distribución de mercancía y sistemas organizacionales.

Nuestra propuesta ilustra la utilización de los grafos como un recurso didáctico, que favorece la construcción de la actividad modelizadora por parte de los estudiantes cuando resuelven problemas en contexto. Se propone así el estudio de diversas situaciones-problema vinculadas con la solución del problema histórico que marcó los inicios de la teoría de grafos.

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS

La teoría de grafos tiene una interesante conexión con la geometría; de hecho, se la suele considerar como parte de la denominada geometría cualitativa que a su vez se inscribe en el campo de la matemática discreta. Este último es un campo que se considera de especial proyección en las tendencias innovadoras en educación matemática.

Se suelen considerar diferentes elementos que favorecen la introducción de la teoría de grafos en la escuela. Entre ellos, se reconoce el hecho de que no se requieren conocimientos matemáticos previos y que permite el desarrollo de estrategias que apuntan a favorecer un buen desempeño en la resolución de problemas (Nouche, 2008).

También se reconoce que es una herramienta matemática potente en la modelación de problemas matemáticos y no matemáticos, lo que posibilita que los estudiantes establezcan un vínculo entre los conocimientos formales de la matemática y sus conocimientos informales, promoviendo de esta manera mayor disposición para aprender y el mejoramiento del desempeño en matemáticas (Braicovich, Oropeza y Cerda, 2008).

En este sentido, los grafos se pueden utilizar como instrumento de modelización y representación de situaciones-problema. Un claro ejemplo de ello se visualiza en el problema de los puentes de Königsberg, solucionado por Euler en el siglo XVIII, donde se plantea atravesar una ciudad compuesta por siete puentes de tal forma que se puede pasar una sola vez por cada puente para llegar al sitio de partida.

Así pues, los grafos se constituyen en una potente herramienta para generar *significado* de los objetos matemáticos, favoreciendo la comprensión, el aprendizaje y la construcción de nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas y la modelación matemática. El renovado interés por la teoría de grafos se refleja en que desde hace dos décadas el tema es asunto de estudio de importantes publicaciones en didáctica de las matemáticas, como por ejemplo la revista SUMA (e.g., Espinel y Sobrón, 1992; Espinel, 1994; Menéndez, 1998; Novo y Méndez, 2004).

Dimensión matemática

La teoría de grafos no cuenta con una terminología uniforme y aceptada por toda la comunidad matemática. De hecho, para evitar confusiones, la mayoría de obras sobre grafos comienzan definiendo los conceptos que se van a usar.

Las siguientes definiciones y conceptos básicos son los más comunes en teoría de grafos y pueden emplearse para demostrar el Teorema de Euler asociado a la solución del problema de los puentes de Königsberg.

Un *grafo simple* es un par G = (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío de elementos llamados *vértices* y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V, llamados *aristas*.

Si $e = \{u, v\}$ es una arista entonces se dice que los vértices u y v son los extremos de e. Para simplificar la notación se designa la arista $\{u, v\}$ simplemente como uv.

Un vértice y una arista son *incidentes* si el vértice es uno de los extremos de la arista. Dos vértices u y v son adyacentes si uv es una arista.

Por simplicidad, un grafo se representa por medio de puntos o pequeños círculos que designan vértices, y líneas (rectas o curvas) que los unen, que representan las aristas. En un grafo, el *grado de un vértice v* se define como el número $g(v)$ de aristas incidentes con él.

Un ciclo de un grafo se dice *ciclo de Euler*, si pasa por todos los vértices recorriendo cada arista exactamente una vez, empezando y terminando en el mismo vértice.

Lema 1: Si G es un grafo euleriano, entonces todos sus vértices son de grado par.

Demostración: En efecto, supongamos que G es un grafo euleriano, es decir, supongamos que existe un ciclo de Euler β, en G. Sea *v* un vértice cualquiera de G. Veamos que tiene grado par.

− Si *v* no es el primer vértice de β, cada una de las veces que el ciclo pase por *v* entrará y saldrá por dos aristas distintas a las de la vez anterior, luego contribuirá con 2 al grado de *v*.

− Si *v* es el primer vértice de β, el ciclo contribuye con 2 al grado de *v* en cada una de las "visitas" que se realicen a *v*, salvo en la primera y en la última en la que añade 1 cada vez.

Por lo tanto, en cualquier caso, el grado de *v* es par.

Teniendo en cuenta la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca tenemos: Si existe algún vértice de grado impar, entonces G no es euleriano.

Se dice que un camino de un grafo es de Euler, si pasa por todos los vértices, recorriendo cada arista exactamente una vez.

Obsérvese que un camino de Euler en un grafo G, puede entenderse también como una forma de dibujar el grafo sin levantar el lápiz del papel y sin pintar dos veces la misma arista.

Lema 2. Una condición necesaria para que un grafo admita un camino de Euler es que el número de vértices de grado impar sea dos o ninguno.

DISCUSIÓN Y PRÁCTICA DE LA SITUACIÓN PROBLEMA

El problema de los puentes de Königsberg es quizá el mejor ejemplo para ilustrar el potencial de los grafos en la modelación de problemas en contexto. La historia relata que en la ciudad alemana de Königsberg (hoy Kaliningrado, en Lituania), siete puentes atravesaban el río Plegel en su curso sinuoso por la ciudad.

Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible salir de su casa, dar un paseo y regresar al punto de partida, habiendo pasado una y solo una vez por cada puente. Aunque era ampliamente conocido que tal camino no existía, ninguno de los habitantes podía explicar por qué (Figura 1).

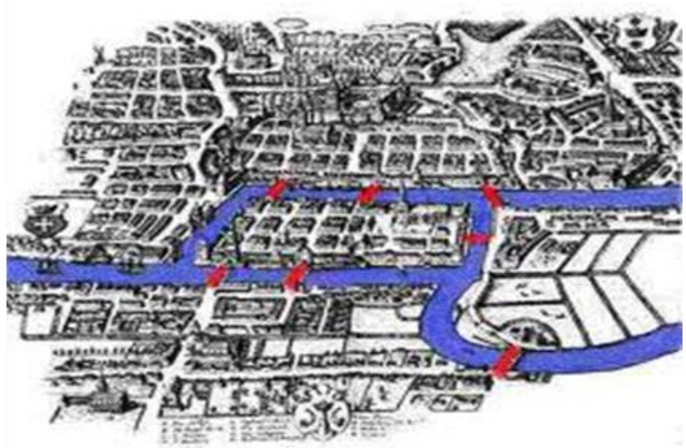


Figura 1: Ciudad de Königsberg en la Prusia oriental del siglo XVIII

En la actualidad, este y otros problemas similares pueden abordarse a través de la teoría de grafos, representando cada una de las zonas de la ciudad por un vértice y cada puente por una arista que une los vértices correspondientes a las zonas conectadas por dicho puente. Un grafo representativo de Königsberg es el siguiente (Figura 2).

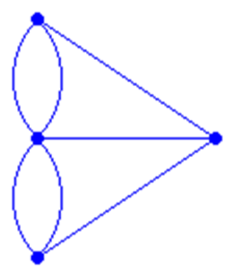
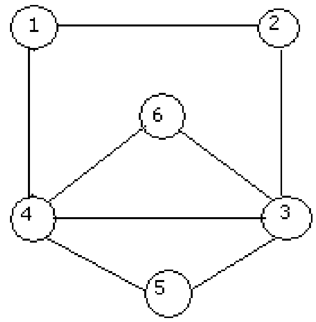


Figura 2: Grafo que representa el conjunto de puentes de la ciudad de Königsberg

Así, el problema inicial se traduce en: ¿es posible realizar el dibujo del gráfico sin levantar el lápiz del papel y pasando solo una vez por cada arista?

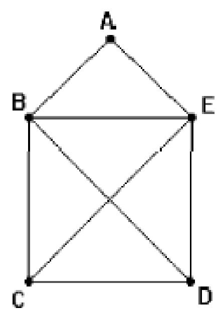
Es importante anotar que el proceso de “reducir un problema a un grafo equivalente” representa un valioso desarrollo de la capacidad de abstracción y visión espacial de los niños de 12 a 14 años. En este sentido, conviene acompañarlo de otras *situaciones problema* como las que se presentan a continuación.

Situación 1. ¿Es posible dibujar la siguiente figura partiendo de un vértice cualquiera y terminando en el mismo, sin levantar el lápiz del papel?



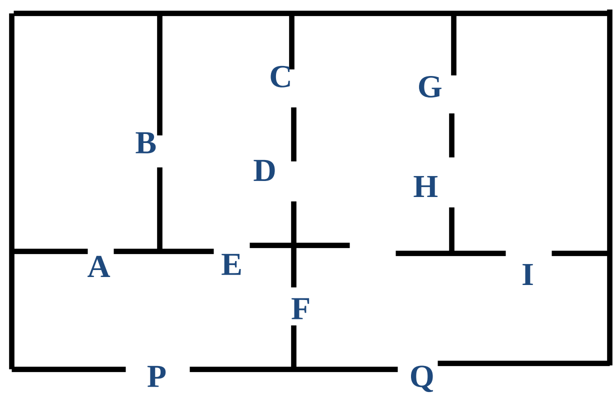
Los docentes y orientadores de la actividad deben reconocer que si un grafo no tiene vértices de orden impar, entonces se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. Además, que se puede dibujar empezando desde cualquier vértice y el dibujo será "cerrado" puesto que termina en el mismo vértice en el que se empezó.

Situación 2. ¿Es posible dibujar esta figura partiendo de un vértice cualquiera y terminando en el mismo, sin levantar el lápiz del papel?



Los docentes deben conocer que si un grafo tiene exactamente dos vértices de orden impar, entonces se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, aunque siempre sea necesario empezar en uno de ellos y terminar en el otro. Además, que si un grafo tiene tres o más vértices de orden impar, entonces hasta ahí se llega, ya que no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista.

Situación 3. En un museo de arte colombiano, un joven ideó una forma de ver todos los salones, entrando por la puerta P y saliendo por la puerta Q, pasando por todas las puertas internas, excepto por una, exactamente una vez.



¿Por cuál puerta interna no pasó?

Finalmente, se discute la solución propuesta por Euler en 1735, en relación al problema de los puentes de Königsberg: es imposible realizar dicho recorrido, pues para la existencia del mismo sería necesario que a lo más dos de las cuatro zonas terrestres fueran el final de un número impar de puentes.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

Situaciones como estas pueden emplearse para incentivar las cualidades de visión espacial, abstracción de problemas, capacidad de deducción y generalización de los estudiantes. Así pues, los grafos representan un recurso didáctico potente para enfocar la enseñanza en el desarrollo significativo de los conceptos matemáticos, al tiempo que brindan la oportunidad de que los estudiantes mismos "reinventen" los objetos de la matemática, lo que se relaciona positivamente con el aumento en los logros e intereses por la ciencia.

De igual manera, este tipo de aproximaciones se ve enriquecido por la integración de las TIC, en particular los ambientes de geometría dinámica, vinculándolos con nuevos campos del conocimiento, como la geometría computacional y con enfoques de especial interés en investigación en didáctica de las matemáticas como las matemáticas en contexto y las *matemáticas experimentales*.

REFERENCIAS

Braicovich y Cognigni, (2011). Coloreando la geografía del plano al toroide. *NÚMEROS,* 76, 135-148.

Braicovich, T., Oropeza, M. y Cerda, V. (2008). Un desafío: incluir grafos en los distintos niveles educativos. *Memorias del II REPEM* (pp. 70-76). La Pampa, Argentina: Editorial de la Universidad Nacional de la Pampa. Recuperado de: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/talleres/T11.pdf

Espinel, M. (1994). El lenguaje de los grafos en los problemas de comunicación. *SUMA*, 18, 32-38.

Espinel, M. y Sobrón, M. (1992). Grafos a través de juegos. *SUMA*, 11-12, 88-94.

González, F. (2004). Grafos. En *Apuntes de matemática discreta* (pp. 395-463), Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, España. Recuperado de http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1711003/Apuntes/Leccion14.pdf

Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. *SUMA*, 27, 11-26.

Nouche, F. (2008). Teoría de grafos: propuesta para escuela secundaria. *Premisa, 10*(39), 17-26. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Nouche.pdf

Novo, E. y Méndez, A. (2004). Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia. *SUMA*, 46, 31-35.

Propuesta para la enseñanza del álgebra geométrica a estudiantes con discapacidad visual, a través de la adaptación de material inclusivo

Ingrid Velasco y Esperanza Montes
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
catherinevelascob@gmail.com, yesmonva@hotmail.com

Se presentan los aspectos pedagógicos y didácticos que se tuvieron en cuenta para el diseño, la gestión y evaluación de una propuesta inclusiva para la enseñanza del álgebra geométrica, específicamente del trinomio cuadrado perfecto, a estudiantes con discapacidad visual.

Contextualización

El artículo que aquí se presenta corresponde a la labor realizada por estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia), quienes realizaron el diseño, la gestión y evaluación de una secuencia didáctica de carácter inclusivo en el área de matemáticas con estudiantes en condición de discapacidad visual. Se exponen los aspectos pedagógicos y didácticos propios del trabajo con estudiantes con discapacidad visual, atendiendo factores de la apropiación conceptual por parte del docente, entre los que se destacan: la adaptación de material, las áreas tiflológicas y la signografía Braille.

Referentes teórico-prácticos

La experiencia de aula, objeto de este documento, tiene implicaciones en cuatro campos teóricos: formación investigativa de estudiantes que se están formando como profesores (EPP) de la LEBEM, concepciones sobre la discapacidad, inclusión educativa y resolución de problemas como metodología.

Con relación a la formación investigativa de los EPP, la LEBEM considera que los estudiantes deben tener, desde el inicio de su formación, encuentros con el mundo de la vida escolar, esto argumentado desde dos aspectos. En primer lugar, la necesidad de especificar los conocimientos pedagógicos y didácticos, en el pleno desarrollo de las disciplinas en las que se realiza el ejer-

Velasco, I. y Montes, E. (2013). Propuesta para la enseñanza del álgebra geométrica a estudiantes con discapacidad visual, a través de la adaptación de material inclusivo. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 291-298). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cicio docente; y, en segundo lugar, la complejidad de dichos conocimientos y su carácter reconstructivo y práctico, a través de la reflexión documentada sobre las propias prácticas. En la LEBEM se entiende la investigación como una indagación disciplinada, en la que un individuo o un grupo se pone(n) en la tarea de ubicar una situación problema o tema de investigación y enfrentarlo; de ahí, que se exija una formulación clara sobre qué se pretende realizar, con qué objetivos y cuáles son los procedimientos, concordantes con el marco conceptual, mediante los cuales es plausible alcanzarlos (Rodríguez, 1999, p. 74).

En cuanto a las concepciones sobre la discapacidad y las necesidades educativas especiales, es necesario precisar qué se entiende por discapacidad y qué características posee la población con discapacidad visual. Esta discapacidad comprende desde baja visión hasta ceguera. Si se tiene en cuenta que la visión constituye una de las fuentes de mayor información para el ser humano, como lo afirman Aguirre y otros (s.f), la existencia de estas diferencias tiene como consecuencia los desfases en el proceso de aprendizaje, originando necesidades específicas relacionadas con: la forma como se percibe la información para el conocimiento del medio físico y social; la identidad y la autonomía personal; la necesidad de conocer y asumir su situación visual, reconociendo potencialidades y limitaciones; finalmente, las necesidades correspondientes al acceso a la información escrita, solventada de alguna manera con el sistema de lecto-escritura Braille y la tiflotecnología –i.e., los recursos que le permiten a la persona con discapacidad visual adaptarse al mundo.

La inclusión, entendida como el proceso de participación en la sociedad en la que se vive, implica "reducir los factores de vulnerabilidad derivados de las limitaciones" (Violo, 2011, p. 195), lo que alude al modo en que se debe dar respuesta a la diversidad. Es por ello que se califica de inclusivo un sistema educativo que tiene como fundamento básico la modificación de diversos aspectos relacionados con la educación para responder a ciertos parámetros que estipulan: la no discriminación, la pertinencia, el máximo acoplamiento con la realidad, la consideración de las características de la población atendida, la equidad y la calidad, con el fin de crear espacios donde la persona discapacitada pueda poner en juego todas sus capacidades.

También al hablar de la inclusión educativa es imprescindible evidenciar la necesidad de la adaptación de material inclusivo como medio de representación y aprendizaje. Esta adaptación para que sea inclusiva debe responder a ciertos criterios como: identificación de las necesidades de aprendizaje –en lo posible, de cada estudiante; disposición de experiencias de manipulación en las que se privilegien las tareas mediadas por la audición, la sensibilidad táctil y las sensaciones cenestésicas; y elaboración de representaciones de los diferentes objetos matemáticos, bajo la consigna de que la matemática se aprende en lo concreto.

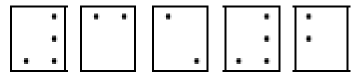
Ahora bien, reconociendo que el trabajo desarrollado con estudiantes en condición de discapacidad visual, frente a la geometría ha sido escaso y que el álgebra escolar ha sido enseñada desde una perspectiva aritmética y de cálculo en la que no existe mayor grado de significación, como lo afirma Agudelo (2000), fue necesario desarrollar una propuesta que involucrara la geometría para la enseñanza del álgebra escolar (álgebra-geométrica), específicamente la factorización. La perspectiva geométrica puede viabilizar la dotación de sentido para algunos conceptos y su aplicación; en ello están de acuerdo Mancera y González (2009, p. 1) quienes señalan que la geometría puede facilitar

> [Un] acercamiento al álgebra de corte más reflexivo, que permita vislumbrar las diferentes formas de tratamiento propuesto en las diferentes culturas y, a partir de allí, posibilitar tanto la resignificación de algunos conocimientos algebraicos como el reconocimiento de limitaciones en el conjunto numérico subyacente.

Por su parte, el lenguaje algebraico contiene sus propias reglas de manipulación, que se deben aprender y manejar con el propósito de convertirlo en un medio potente e ideal para comunicar ideas complejas, abstractas y expresar generalizaciones (Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1985/1999).

Se trabajó con la determinación y construcción del caso de factorización conocido como trinomio cuadrado perfecto, puesto que típicamente presenta dificultad para los estudiantes, dificultad que, según Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985/1999), explica la equivalencia que dan a las expresiones $(a+b)^2$ y (a^2+b^2), y hace evidente la mecanización de procesos sin significación alguna. La construcción geométrica de este caso permite el reconocimiento de áreas y las relaciones entre estas, como lo afirman diferentes estudios (Socas y Martín, 1989; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1985/1999; Mejía y Barrios, 2008) para el fomento de procesos de generalización propios del álgebra.

Por otra parte, el álgebra como lenguaje permite ser conciso en tinta (letra imprenta), lo que no ocurre con la signografía matemática en Braille. Por ejemplo, observemos la signografía utilizada en Braille para expresar:

$3^2 =$ 

Esto permite argumentar el uso de la geometría para posibilitar la resignificación y la comprensión de expresiones algebraicas, tanto para estudiantes con discapacidad visual como para videntes.

Para el diseño metodológico se tuvieron en cuenta dos aspectos. El enfoque de Mejía y Barrios (2008) quienes proponen diferentes enfoques para la enseñanza del álgebra escolar, entre los que está la enseñanza desde un estudio de procedimientos, lo cual alude a la resolución de problemas. Adicionalmente, la LEBEM ha utilizado la metodología de resolución de problemas para la construcción y reconceptualización de saberes en los EPP. Así que, la propuesta se llevó a cabo en un aula inclusiva y fue trabajada a partir de esta metodología, ya que, como lo menciona Miró (2006):

> Esta nos permite desarrollar el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental a la par. El conocimiento conceptual es flexible y no está ligado con un tipo específico de problemas y por consiguiente se puede generalizar. Y por su parte, el conocimiento procedimental es la habilidad de una persona para ejecutar una secuencia de acciones que resuelvan un problema. El conocimiento procedimental está ligado a un tipo específico de problemas y por consiguiente no se puede generalizar (p. 3).

Las actividades que se planearon generan el desarrollo gradual de estos dos tipos de conocimiento (procedimental y conceptual) y de las interacciones entre ambos durante la resolución de un problema.

Lo que se pretende con la propuesta es aportar al cambio del modelo tradicional de enseñanza, que según Miró (2006) consiste en la transmisión de un conocimiento acabado y abstracto que tiende a adoptar un estilo expositivo, por un nuevo modelo, en donde el conocimiento matemático está en plena construcción y el estudiante es participe y reconstructor de su propio aprendizaje. Es por ello, que la incorporación de pequeñas experiencias innovadoras intenta demostrar que sí es posible realizar ciertas acciones para promover un aprendizaje activo del estudiante a pesar de los inconvenientes del contexto educativo en el que se encuentra.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

La propuesta de enseñanza se implementó en tres aulas inclusivas de grado noveno en una institución educativa distrital en Bogotá D.C. La secuencia se diseñó con base en el modelo DECA[1]. La conformaron cuatro bloques de actividades, relativas al desarrollo histórico de la notación algebraica: iniciación e introducción, formulación y comunicación, aplicación y profundización, y finalmente la actividad de evaluación, aunque cada sesión contó con criterios de evaluación propios. A continuación, para cada fase se menciona: tipo de actividad, recursos y, grosso modo, lo que se pretende evaluar:

FASE	TIPO DE ACTIVIDAD	RECURSOS	EVALUACIÓN
INTRODUCCIÓN **Retórico verbal**	Actividad 1 Crear en el estudiante un primer acercamiento, de forma general, a los casos de factorización.	Guía: Instrumento semiótico: recolección de procedimientos y respuestas Pentominó: conservación y congruencias entre áreas.	Comprensión y reconocimiento de las propiedades y relaciones del conjunto numérico racional y producción de representaciones gráficas del área. Por otro lado, observar las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes y el uso de la simbología matemática.
REESTRUCTURACIÓN **Sincopado abreviado**	Actividad 2 Propiciar en los estudiantes la asimilación de la temática de la traducción del lenguaje algebraico al geométrico.	Guía: Instrumento semiótico para recolección de procedimientos y respuestas. Pentominó: determinación de segmentos a partir de áreas y perímetros.	Asimilación y aplicación de la traducción del lenguaje algebraico al geométrico y viceversa; teniendo en cuenta las propiedades del conjunto numérico racional. Además, observar las estrategias utilizadas por los estudiantes y el uso del lenguaje algebraico.

[1] Es un modelo para el diseño de actividades, enmarcado por el enfoque del desarrollo constructivista del conocimiento; consiste en el desarrollo de estrategias globales de pensamiento, en las que el alumno sea el propio artífice de su aprendizaje; de esta manera el saber será usado en el momento presente y en las etapas siguientes de su vida (Grupo DECA, 2011).

PROFUNDIZACIÓN **Período simbólico**	Actividad 3 Introducir al estudiante en la noción del trinomio cuadrado perfecto.	Material manipulativo tangible que constará de 5 figuras (2 cuadrados, 2 rectángulos y patrón del cuadrado) que permitirá determinar el trinomio cuadrado perfecto.	Asimilación y reconocimiento de las características del trinomio cuadrado perfecto. En este momento, los estudiantes ya deberán tener un manejo básico de la simbología y el lenguaje algebraico trabajados.
INSTITUCIONALIZACIÓN **Procesos de generalización**	Evaluación Poner a prueba los conocimientos, y destrezas obtenidas por el estudiante.	Guía: Instrumento semiótico: las situaciones propuestas en la hoja para recolección de procedimientos y respuestas obtenidas por los estudiantes.	Identificación del manejo y comprensión en cuanto a figuras geométricas, relaciones de área, operaciones aritméticas, propiedades del conjunto numérico racional, operaciones entre polinomios, lenguaje algebraico y simbología matemática trabajados durante todo el proceso realizado.

El análisis se realizó a partir de la triangulación de las evidencias recolectadas (guías de recolección, grabaciones y videos), teniendo en cuenta: lo observado durante la implementación y la gestión docente, los niveles de evaluación descritos en cada actividad y la pertinencia o no de los recursos didácticos adaptados.

LOGROS Y DIFICULTADES QUE SE EVIDENCIARON

Los estudiantes en condición de discapacidad visual presentan bajos niveles de apropiación conceptual, respecto a los estudiantes videntes que cursan el mismo grado académico. Niveles bajos que no se deben a sus capacidades sino a la forma visual y no inclusiva en que se ha enseñado.

El proceso de resignificación de un concepto, para un estudiante en condición de discapacidad visual, requiere de una serie de aspectos como: adaptación de material y el tiempo estimado para la explicación.

El uso de un lenguaje verbal incluyente (el que recurre a descripciones, ejemplificaciones que no están determinadas por enunciados meramente visuales) ayuda a minimizar las dificultades de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la escuela. Así, se determina que los actos de habla son un factor que posibilita el equiparamiento de oportunidades, en cuanto se establezcan ciertos criterios como: participación activa, uso de diversos códigos y red de situaciones (Niño, 2008).

La adaptación de material inclusivo viabiliza el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que permite un acercamiento y una representación del objeto matemático que es va a trabajar. Para el desarrollo de las actividades se construyó un material que permitiera la exploración háptica por parte de los estudiantes, por lo tanto, y atendiendo a la adaptación de material inclusivo, su diseño se pensó tanto en letra imprenta como en Braille.

Los procesos evaluativos a los cuales se sometió la propuesta mediante los criterios establecidos para cada actividad, y su posterior análisis, generan un acercamiento reflexivo de los procesos de enseñanza-aprendizaje, ya que, tienen en cuenta aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

La inclusión escolar debe ser integral; en este sentido la parte socio-afectiva también debe tenerse en cuenta y no sólo enfatizar en conocimientos de índole académico.

Reflexión final

Por medio de esta propuesta y el desarrollo de la secuencia de actividades, se reconoce que la labor inclusiva en un aula de matemáticas se da, en gran medida, gracias a la adaptación de material y al reconocimiento de la inclusión como fenómeno social que implica varias dimensiones. Teniendo en cuenta que los mecanismos de apropiación conceptual fueron eficaces, debido a su pertinencia para la enseñanza del caso de factorización trabajado y por su capacidad generadora de participación de los estudiantes en general, es razonable creer en la posibilidad de que los estudiantes con discapacidad visual interioricen los conceptos algebraicos mediante un material inclusivo que facilite su aprendizaje. Reiteramos: los estudiantes con discapacidad visual, sí pueden aprender matemáticas; y hay condiciones diversas que generan un retraso en la adquisición de experiencias lógico matemáticas y sociales, que se pueden subsanar si se trabaja en conjunto con entes gubernamentales para gestionar las garantías para la permanencia de dichos estudiantes en aulas regulares y de la mano de los docentes quienes día a día deben concebir la inclusión educativa como una realidad.

REFERENCIAS

Agudelo, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el álgebra*. Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Aguirre, P. y Hernández, R. (s.f.). Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de discapacidad visual y sordoceguera. Andalucía, España: Consejería de Educación, Junta de Andalucía. Recuperado de http://www.juntadeandalucia.es/educacion/nav/contenido.jsp?pag=/Contenidos/PSE/orientacionyatenciondiversidad/educacionespecial/ManualdeatencionalalumnadoNEAE

Grupo DECA. (2011). *Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación*. *Aula de Innovación Educativa*. Recuperado de: http://www.buenastareas.com/ensayos/Grupo-Deca/1566988.html

Mancera, G. y González, M. (2009). *Sillabus: Programa problemas de álgebra geométrica para la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, eje de problemas y pensamiento matemático avanzado,* Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). *Rutas hacia al álgebra*. *Raíces del álgebra* (Cecilia Agudelo, Tr. y Ed.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Primera edición en inglés, 1985).

Mejía, G. y Barrios, N. (2008). *El álgebra-geométrica como recurso didáctico para iniciar a los estudiantes de octavo en el álgebra escolar* (Tesis de grado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Miró, M. (2006). *Una metodología activa para la resolución de problemas*. Badajoz, España: ASEPUMA.

Niño, V. (2008) *Competencias en la comunicación. Hacia las prácticas del discurso* (2da ed.). Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.

Rodríguez, J. (1999). *Hacia una educación de calidad*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Socas, M. (1996). *Iniciación al álgebra.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Violo, Í. (2011). *Disc-cionario, diccionario de las discapacidades, habilidades y diversidad humana*. Recuperado en https://sites.google.com/site/discapacidadvenezuela/Home/disc-cionario-venezolano

Pósters

ESPINORES Y FÍSICA DE PARTÍCULAS

Yadir Garnica
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
alex_garnica_417@hotmail.com

Presento el concepto de espinores, desde el punto de vista de la solución de la ecuación de Dirac para el electrón. Muestro al espinor desde una perspectiva geométrica para poder analizar sus características básicas, enfatizando en la invariancia de Lorentz, mostrando una alternativa para conceptualizar fenómenos físicos que requieran estar conectados con la teoría de la relatividad especial.

INTRODUCCIÓN

En el marco del análisis del mundo subatómico se tienen diferentes tipos de partículas, clasificadas (actualmente) en un marco conceptual llamado modelo estándar de partículas. Una de las magnitudes físicas que diferencian las distintas partículas elementales es conocida como *espín*. El espín es un grado de libertad asociado con el momento angular intrínseco de las partículas. Para cada tipo de espín se necesita un distinto tipo de entidad matemática para su estudio (Arfken y Weber, 1985; Shiff, 1949). Para las partículas de espín 1/2 como los electrones, el primer análisis coherente fue obtenido por Pauli a través de un conjunto de matrices conocidas actualmente como matrices de Pauli, las cuales complementan el formalismo no relativista dado por la ecuación de Schrödinger, permitiendo una congruencia entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales asociados al espectro del átomo de hidrógeno (Weinberg, 1995).

Con el ánimo de encontrar una teoría que involucrara el espín dentro de la teoría desde el inicio y no como una añadidura, Dirac en 1928 propone un modelo que incluye el espín del electrón desde el inicio de la teoría. La ecuación de Dirac para el electrón tiene la forma:

$$i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} - mc\psi = 0$$

donde los términos γ^{μ} son matrices 4×4. La solución de la ecuación de Dirac con la elección apropiada para las matrices γ^{μ} (cuando se habla de elección apropiada se pretende que todas las componentes de la solución tengan signi-

Garnica, Y. (2013). Espinores y física de partículas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 301-302). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

ficado físico), se puede escribir como un vector columna de 4 componentes (Weinberg, 1995), el cual da información sobre una partícula y su respectiva antipartícula. Esta entidad es conocida como un *espinor*, el cual además de expresar de manera coherente el nuevo grado de libertad asociado con el espín, preserva la invariancia de Lorentz, requisito fundamental para una teoría relativista del electrón. Se define un espinor como “Un objeto que se transforma en su negativo cuando sufre una rotación completa de 2π” (Penrose, 2004/2006). Para representar un objeto espinorial, se puede pensar en un objeto ordinario en el espacio, que posee una atadura flexible a una estructura rígida. Aunque la atadura puede moverse de manera continua, sus extremos deben permanecer fijos: uno en el objeto y otro en la estructura fija, tal que si, por ejemplo, rotamos un ángulo recto alrededor del eje j y después le hacemos seguir una rotación de un ángulo recto alrededor del eje i obtenemos que es equivalente a una rotación alrededor del eje k.

CONCLUSIONES

El formalismo espinorial involucra implícitamente el concepto de espín, por lo cual es una herramienta conceptual poderosa para explicar esta magnitud física desde un punto de vista geométrico (Misner, Thorne y Wheeler, 1973).

Al formalizar un álgebra espinorial dentro de un campo espinorial (campo vectorial complejo), se puede estructurar fácilmente la invariancia relativista dentro de una teoría de campos cuánticos (Torres, 1987).

REFERENCIAS

Arfken, G. y Weber, H.J. (1985). *Mathematical methods for physicists*. San Diego, EUA: Academic Press, Inc.

Misner C., Thorne, K. y Wheeler J. (1973). *Gravitation*. San Francisco, EUA: W.H. Freeman.

Penrose, R. (2006). *El camino a la realidad. Una guía completa a las leyes del universo* (Javier García, Tr.). Barcelona, España: Debate (primera edición en inglés, 2004).

Shiff, L. (1949). *Quantum mechanics*. New York, EUA: McGraw-Hill Book Company.

Torres, G. (1987). De la ecuación de Dirac a los espinores. *Revista Mexicana de Física*, *33*(1), 115-137.

Weinberg, S (1995). *Quantum theory of fields.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

VÍNCULOS ENTRE LA TEORÍA DE GRAFOS Y LA PAPIROFLEXIA PARA ABORDAR EL ESTUDIO DE ALGUNOS POLIEDROS

Jeisson Gustin, Sara Henao y Johnny Vanegas
Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
jeissongustin@gmail.com, s.a.rita@gmail.com, yovanegasdiaz@gmail.com

La construcción de modelos físicos de algunos poliedros puede vincularse al desarrollo del pensamiento espacial y al desarrollo de tres tipos de procesos cognitivos, a saber: visualización, construcción y razonamiento. En este póster presentamos dos posibles aproximaciones a este asunto. La primera se fundamenta en el denominado *enfoque instrumental* y que proponemos trabajar con *origami*. En la segunda aproximación se toman en consideración algunos elementos de la *teoría de grafos.* Con estas aproximaciones se busca que los estudiantes puedan explorar, conjeturar y validar ciertas propiedades geométricas de los poliedros.

BREVE PRESENTACIÓN DE UNA TAREA CON UN ARTEFACTO

El enfoque instrumental (Artigue, 2002) reivindica la importancia de la transformación de artefactos en instrumentos matemáticos. Es en este sentido en el que la didáctica de las matemáticas ha vuelto a otorgarle importancia al trabajo con materiales manipulativos y considera fundamental la integración de nuevos objetos de conocimiento matemático (e.g., papiroflexia) en la escuela.

Guiados por esta visión, proponemos una actividad a partir de la elaboración y el ensamblaje de módulos triangulares como parte de un trabajo exploratorio que vincula algunos elementos de la teoría de grafos y la papiroflexia modular (Figura 1). Así, a partir de la interacción física con el poliedro, se busca la identificación de algunas características e invariantes que permitan la construcción de la fórmula de Euler como resultado de analizar la información recogida en una tabla como la que se muestra a continuación.

Nombre del poliedro	No. de caras (C)	No. de vértices (V)	No. de aristas (A)	Valor $C+V-A$

Gustin, J., Henao, S. y Vanegas, J. (2013). Vínculos entre la teoría de grafos y la papiroflexia para abordar el estudio de algunos poliedros. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 303-304). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

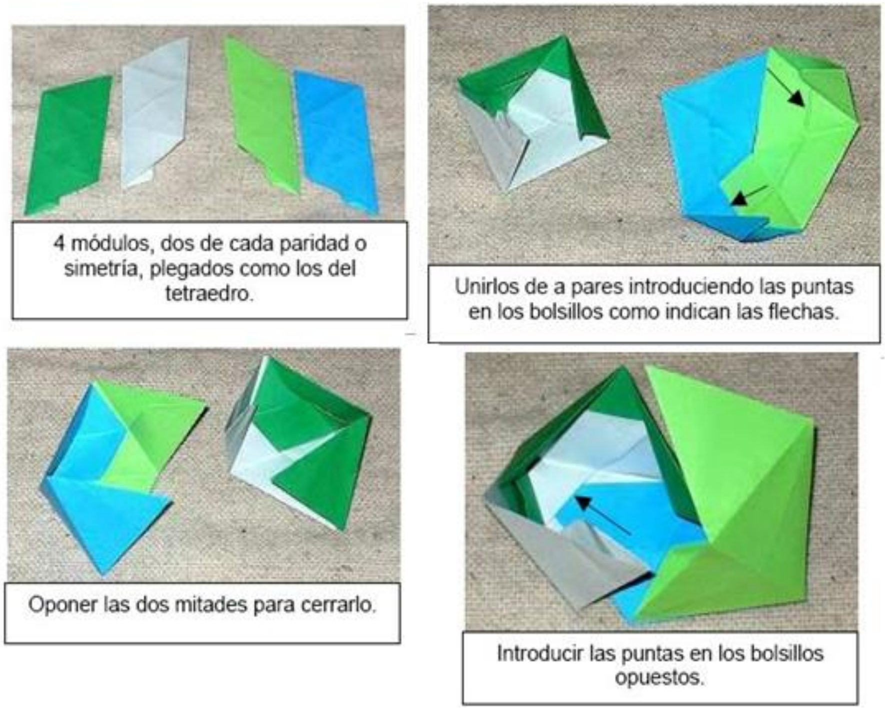


Figura 1: Pasos para formar el poliedro

CONCLUSIONES

Este tipo de trabajo se inscribe en las denominadas *matemáticas experimentales* (Baker, 2008) y se asocia al uso de *contextos* que podrían favorecer la construcción de “sentido” de los objetos matemáticos. También pone en evidencia la conexión que los estudiantes pueden hacer entre sus conocimientos informales y los nuevos conceptos de las matemáticas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Baker, A. (2008). Experimental mathematics. *Erkenntnis*, *68*(3), 331-344.

SOFTWARE EDUCATIVO PARA LA VISUALIZACIÓN DEL ESPACIO 3D

Efraín Hoyos, **Liliana Pérez**, **Julián Rincón y Diego Quintero**
Universidad del Quindío
eahoyos@uniquindio.edu.co, jarinconp@uqvirtual.edu.co,diego372km@hotmail.com

En este póster, los autores ponen a disposición de profesores y estudiantes de básica, cinco materiales educativos computarizados, para temas de geometría y tecnología. Este software educativo, cuya autoría es del profesor Hoyos, es un recurso adicional para la implementación de situaciones didácticas encaminadas a aportar a la comprensión de los conceptos de área y volumen, al reconocimiento de prismas, pirámides, superficies de revolución y cónicas, y a la representación de sólidos por medio de vistas ortogonales.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el desarrollo de la tecnología de los computadores ha permitido mejorar los recursos computacionales para acompañar en el trabajo de aula a los profesores en los procesos didácticos enfocados hacia el desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes.

El software educativo, que se presenta en esta ponencia, fue desarrollado por el profesor Efraín Hoyos de la Universidad del Quindío. Fue evaluado por el doctor Ángel Gutiérrez (comunicación personal, 9/03/2013), de la Universidad de Valencia (España), quien advierte que “es un software de calidad en el contexto de la geometría espacial en donde es muy difícil encontrar software educativo”. A esta carencia de materiales se suma la poca familiarización de los profesores con respecto al manejo de este tipo de herramientas. Como respuesta al estado de cosas descrito, ponemos a consideración una serie de materiales educativos computarizados que cubren los aspectos relacionados con la visualización del espacio 3D.

DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE

Superficies de revolución y cónicas. Los estudiantes construyen en esta aplicación las superficies de revolución y pueden modificar los nodos de la generatriz, con lo cual pueden generalizar el reconocimiento de estas superficies;

Hoyos, E., Pérez, L., Rincón, J. y Quintero, D. (2013). Software educativo para la visualización del espacio 3D. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 305-306). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

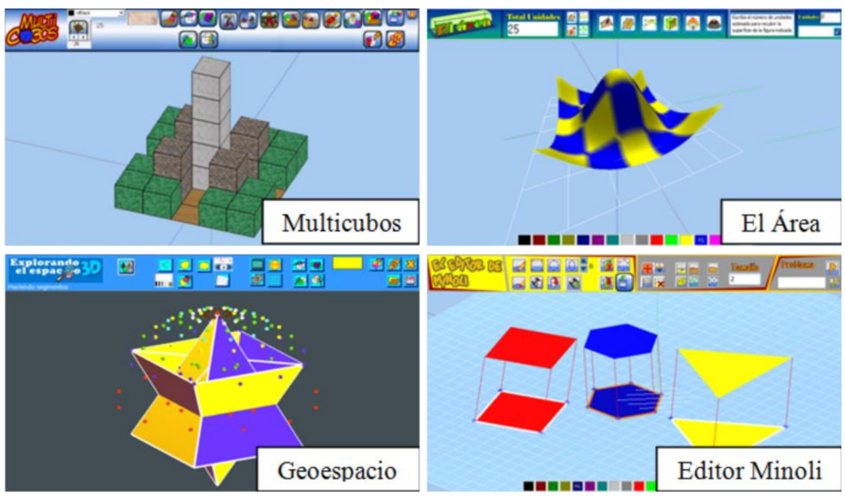
así mismo, pueden visualizar las cónicas que se forman al realizar el corte de un cono con un plano.

El área. Se realizan mediante este software actividades de recubrimiento de figuras en el plano y en el espacio, lo cual permite estimar el área de las figuras recubiertas.

Geoespacio. Este material educativo es la extensión del geoplano, convirtiéndose en un recurso didáctico para la visualización de los poliedros y sus componentes.

Multicubos. Es un ambiente informático en el cual se construyen sólidos de diferentes formas geométricas, que se pueden replicar o representar por medio de vistas ortogonales.

El editor de Minoli (*prismas y pirámides*). Es un software para la identificación de las propiedades de prismas y pirámides.



Software para apoyar la visualización del espacio 3D

En general, se puede decir que este software educativo está diseñado como ambientes de reconocimiento y de construcción utilizando objetos tridimensionales con preguntas y su correspondiente evaluación para las respuestas.

SOBRE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN FORMAS DIFERENCIALES

<u>Juan Quimbayo</u> y John Salas
Grupo Geometría y Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Sebas2707jul@hotmail.com, jfargos@hotmail.com

El cálculo de las formas diferenciales tiene importantes ventajas sobre los métodos tradicionales que utilizan el formalismo vectorial, ya que permite develar los aspectos geométricos de la fenomenología que se va a estudiar. El presente trabajo tiene como finalidad reescribir y analizar la ecuación de continuidad en formas diferenciales para así resaltar la estructura geométrica que subyace a los fenómenos físicos, en particular, a la mecánica de fluidos.

PRESENTACIÓN

En los cursos introductorios al tema de mecánica de fluidos, por lo regular se utilizan las herramientas que brinda el cálculo vectorial para la descripción formal del fenómeno relacionado con la conservación de la masa; pero el uso de tales herramientas hace tediosa la manipulación de las ecuaciones que rigen el fenómeno en cuestión; además las nociones geométricas no son lo suficientemente explícitas. Existen otras opciones de describir los fenómenos relacionados con la mecánica de fluidos, las cuales resaltan su componente geométrico haciendo más intuitiva la correspondiente comprensión.

La expresión fundamental que describe la conservación de la masa es la ecuación de continuidad en forma diferencial, que viene dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Donde ρ es la densidad, t el tiempo y $\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y j + u_z k$ la velocidad del fluido. Infortunadamente estas dependen del sistema de coordenadas elegido.

Ahora bien, la representación tensorial expresada antes está descrita por medio de un tensor covariante de orden 2, que permite compactar la notación y mantener invariante bajo una transformación arbitraria de coordenadas, los fenómenos descritos bajo tal ecuación.

Quimbayo, J. y Salas, J. (2013). Sobre la ecuación de continuidad en formas diferenciales. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 307-308). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Por otro lado, la imagen que brindan las formas diferenciales resaltan características geométricas de estos fenómenos, dando al estudiante la posibilidad de aprender de una manera más intuitiva; aquí la mecánica de fluidos queda descrita a través de una 1-forma, sobre el espacio vectorial dual euclídeo.

CONCLUSIONES

1. La notación tensorial deja invariante los fenómenos de la mecánica de fluidos bajo transformaciones de coordenadas arbitrarias.

2. Las formas diferenciales omiten el uso de índices, es decir, de coordenadas, y así permiten el análisis de los fenómenos en la mecánica de fluidos, sin necesidad de recurrir a las cartas coordenables.

3. El álgebra de las formas diferenciales, remplaza el conjunto de largas y tediosas identidades vectoriales, facilitando los cálculos.

4. Las formas diferenciales proveen de un modelo visual a través de tubos y cajas que representan las integrales de superficie y volumen, permitiendo entender el concepto de flujo y densidad que ayuda a los estudiantes a formalizar e interiorizar los fenómenos relacionados con la mecánica de fluidos de mejor manera.

MATH/RACER: UN VIDEOJUEGO DE CURVAS MATEMÁTICAS

Diego Quintero y Elkinn Calderón
Universidad del Quindío
daquinteroj@uqvirtual.edu.co, elkinn-b@hotmail.com

En este póster se expone la propuesta de diseño y desarrollo de un videojuego educativo llamado Math/Racer, que actualmente se encuentra en su fase final de implementación. Usa tecnologías 3D y aprovecha la interactividad y dinamismo de los juegos: tiene como objetivo didáctico consolidar los conocimientos referentes a la identificación, relación y representación de gráficas de funciones matemáticas (curvas).

PRESENTACIÓN

En el campo educativo es conveniente integrar nuevas tecnologías al aula ya que suelen ser una gran herramienta para apoyar al docente en la enseñanza de conceptos, de manera atractiva, agradable y dinámica. Teniendo en cuenta que en el campo de la educación matemática, lograr que el estudiante tenga interés, curiosidad y gusto por lo que se le enseña es fundamental para el aprendizaje, vemos que el videojuego se puede constituir en una potente herramienta para la educación. Al respecto, Gee (2006) precisa que:

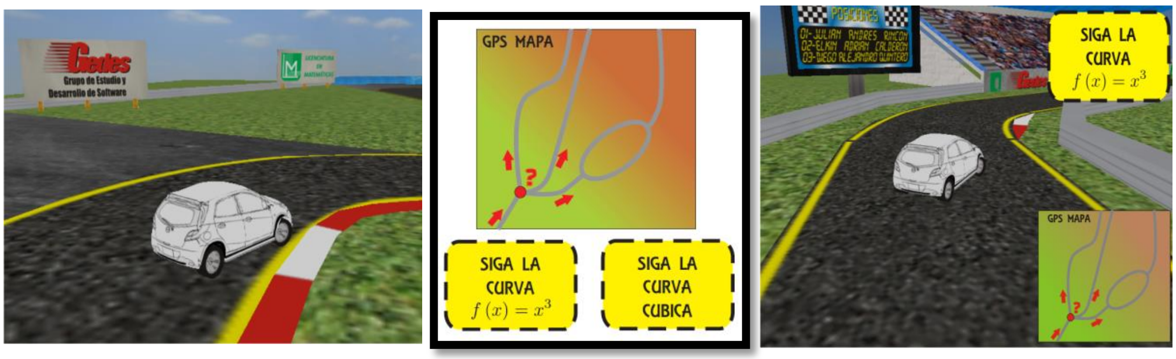
> Los videojuegos son buenos para el aprendizaje y la consolidación de conocimientos, porque, entre otras razones, tienen las siguientes características:
> 1. Pueden crear una profunda empatía con un sistema complejo.
> 2. Preparan para la acción-reacción y simulaciones de experiencias profundas.
> 3. Brindan un aumento en la habilidad intelectual mediante la creación de herramientas que estimulan la inteligencia.
> 4. Crean oportunidades para asociar funciones complejas en la mente.
> 5. Permiten que se tenga la sensación de realidad dentro del juego.
> 6. Pueden ser de composición abierta, que involucran objetivos y proyectos que combinan lo social y lo personal. (p. 20; nuestra traducción)

Teniendo en mente, la posible utilidad de los videojuegos para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, nos propusimos como objetivo diseñar, desarrollar y validar un videojuego educativo que permita consolidar el reconocimiento de la representación gráfica y analítica de algunas curvas matemá-

Quintero, D. y Calderón, E. (2013). Math/Racer: un videojuego de curvas matemáticas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 309-310). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

ticas. Es así como ahora podemos aportar a la comunidad de educación matemática el videojuego Math/Racer, que hace parte de este concepto relativamente nuevo: los videojuegos educativos. Diseñar, desarrollar y validar un videojuego educativo que permita consolidar el reconocimiento de la representación gráfica y analítica de algunas curvas matemáticas.

DESCRIPCIÓN DEL VIDEOJUEGO MATH/RACER



El videojuego se orienta hacia el género de carreras de autos; su ambiente es la región del departamento del Quindío (Colombia) con un sistema de carreteras; las secciones de estas carreteras tienen formas de curvas matemáticas. Para jugar es necesario seguir las indicaciones (orales o escritas) que especifican qué rutas tomar durante el recorrido; estas indicaciones pueden ser los nombres de las curvas, su representación analítica o alguna característica; con estos datos y apoyándose en un mapa de la ruta, el objetivo del juego es identificar y relacionar la curva con sus diferentes representaciones para completar el recorrido en el menor tiempo posible.

REFERENCIA

Gee, J.P. (2006). *Why are video games good for learning?* Department of Curriculum and Instruction, Department of Educational Psychology, University of Wisconsin, Wisconsin, EUA. Recuperado de http://www.academiccolab.org/resources/documents/MacArthur.pdf

COPO: EXPLORAR EL MUNDO DE LAS COORDENADAS POLARES

Julián Rincón y Claudia Vanegas
Universidad del Quindío
julianandresrincon1989@hotmail.com, marcelinda1793@hotmail.com

Al observar las deficiencias en el aprendizaje del concepto de coordenadas polares, en los estudiantes de la carrera de topografía de la Universidad del Quindío que matriculan el curso de cálculo integral, se diseñó y desarrolló un software educativo para vincularlo a una secuencia de actividades cuya intención es propiciar la aprehensión y compresión de los conceptos de coordenadas polares. Se puso a prueba el software con un grupo de estudiantes, y con base en los resultados obtenidos se hicieron ajustes para ofrecerlo a la comunidad educativa.

INTRODUCCIÓN

El tema de las coordenadas polares tiene una presencia limitada en los programas de geometría analítica, materia que se requiere para cursar las asignaturas de cálculo integral, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.

Se nota una serie de dificultades en los estudiantes que cursan las materias antes mencionadas, cuando tienen que usar los conceptos de coordenadas polares, por ejemplo, para abordar el cálculo de áreas y longitudes de arco. Esta necesidad, lleva a pensar en una alternativa para la aprehensión y compresión de estos conceptos desde la geometría analítica, espacio pertinente para estudiar tales conceptos.

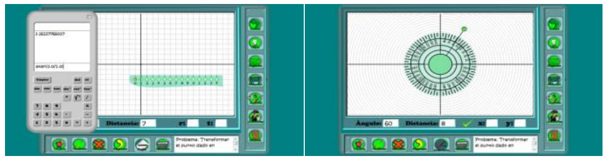
DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE

Copo es un software para el estudio de las coordenadas polares, diseñado y desarrollado por Julián Rincón en el marco del trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Quindío.

El software está compuesto por tres actividades: (i) graficación de siete curvas polares, (ii) transformación de ecuaciones cartesianas a polares y viceversa, (iii) transformación de puntos de coordenadas cartesianas a polares y viceversa. Además, tiene un juego para la consolidación de los conceptos aprendidos.

Rincón, J. y Vanegas, C. (2013). COPO: Explorar el mundo de las coordenadas polares. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 311-312). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

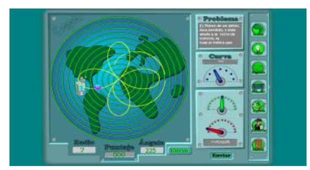
El software lleva un registro único de usuario, el cual permite hacer un análisis tanto cuantitativo como cualitativo, usando una aplicación extra.



Transformación

Graficación

Estadísticas y calificaciones de usuario



Juego para la consolidación

Resultado

Una estrategia para la comprensión y aprehensión de los conceptos de coordenadas polares en estudiantes de geometría analítica mediante una secuencia de actividades que se diseñaron y desarrollaron en un software educativo.

Conclusiones

Se empiezan a reconocer algunos avances en el aprendizaje de los conceptos vinculados a la temática de coordenadas polares, mediante el seguimiento de las actividades propuestas en el software educativo. Los resultados que evidencian este progreso se apoyan en el registro de un archivo que permitió el análisis cuantitativo.