25º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

¿Qué es geometría?

Carlos Luque

22, 23 y 24 de junio de 2022
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia

1. No es geo, ni metría. Es práctica.
2. Geometría es Aritmética.
3. Geometría es lógica; álgebra y teoría de números son geometría.

   Método axiomático: Euclides
   Hilbert
   Birkhoff
   Tarski

   ¿Qué es demostrar?

4. Geometría es algebra: En anillos, semianillos, campos
   En * álgebras
   En espacios vectoriales
   En grupos
5. Geometría es cálculo
6. Geometría métrica
7. ¿Hay una geometría real?

¿Qué es Geometría?

Es la pregunta que elegimos para definir un camino y proponer un currículo para la maestría en docencia de la matemática de la UPN en 1990, de la que fuimos encargados de dirigir Emiliano Palacios, Hernán Díaz y Carlos Luque, pretendimos hilvanar la matemática alrededor de la geometría. Allí nació el Encuentro.

Entre 1981 y 1985 había trabajado en el departamento de Física con los estudiantes Judith Trujillo (Antroplogía), Susana Rojas (College Reino Unido), Fabián Torres (Universidad de Boston), Leonardo Lapeira (Stuttgart), Alexander Cardona (Uniandes), y otros; algunos de ellos se vincularon a la maestría y se inventaron el encuentro y una revista de física. Les gustaba la academia.

De ahí en adelante, los estudiantes fueron los que hicieron el encuentro.

Grupo de álgebra: Lyda Mora, Johana Torres, Leonardo Ángel, Haydee Jiménez, Oscar Molina, Yeison Sánchez, Jaime Fonseca, Juan Carlos Ávila, William Jiménez, Sandra Rojas, …

Tex para las memorias: Carlos Montes y Haydee Jiménez.

Y muchos estudiantes durante 19 años, me perdonarán los que no menciono, no por falta de agradecimiento, sino de memoria, hace 32 años fue el primero y hace 14 años fue el último en el que estuvimos.

Clara Neira, Omar Duque, Clara Rojas, Claudia Orjuela, Marta Corzo, Rafael Angarita, Jael Medina, Carlos Montes, Johana Olarte, Diana Pinilla, Diana Díaz, Diana Domínguez, Diego Rodríguez, Martin Rodríguez, Tania Plazas, Tatiana Ospina, Rodrigo Ruiz, José Salamanca, Yancy Campos, entre tantos. Mucha dedicación y aportes, sugerencias; era un trabajo colectivo.

Tanto el posgrado como el encuentro pretendieron enfatizar en el poder formador de la matemática y su uso como fundamento para la educación; (Arquitas 430 a.C., Pitagórico, Político, amigo de Platón), (Hilbert, gimnasia para el cerebro, la escuela rusa (Fomenko, Efimov, Yaglom), destacando que lo más útil de la matemática es lo que queda después de que se olvida: la curiosidad, la disciplina, el rigor, la búsqueda de soluciones a los problemas, la persistencia, etc.

Lo fundamental no es saber muchos teoremas, es tener ganas de aprender, es una actitud frente a un problema, ensayar con 1, 2, 3, …, jugar billar y vuelve, insiste, insiste, …, persistencia en la memoria. Dudar, ¿puedo cambiar los axiomas? ¿Hay otra solución?

Con ideas como estas, mucho antes de nosotros, fueron educados un buen número de profesores de matemáticas de la UPN, algunos egresados de la UPN fueron nuestros maestros: Mariela Gómez, Laura Adela Gómez, Celly Serrano, Raquel Ardila, Julia Dueñas, Carola Eslava, Margarita Rojas, Cecilia Leguizamón, Gabriel Espinosa, Armando Villamizar, Francisco Rincón, Jaime Gómez, Alberto Vargas, Augusto Rodríguez, Oscar Zarate, y otros. (Margarita).

Ellos educaron a profesores: Alberto Donado, Luis Guayambuco, Luis Espitia, Teresa Aldana, Patricia Perry, Benjamín Sarmiento, Vilma Espejo, Edilberto Ruiz, Mauricio Bautista, Leonor Camargo, Blanca León, Francisco Camelo, Gabriel Mancera, Haydee Jiménez, Camilo Sua, Carlos Pérez, Natalia Morales, Orlando Aya, César Rendón, Tania Plazas, Lorenza Fonseca, Isaac Lima, Berta Jaraba, y muchos más.

Pero también educaron en la UPN a muchos matemáticos: Lucimar Nova, Gustavo Rubiano, Margarita Ospina, Néstor Raúl Pachón, Marcela Rubio, Milton Reyes, Reinaldo Montañez, Clara Neira, Omar Duque, Herbert Dueñas, José Luis Ramírez, Yeison Sánchez, Sonia Sabogal (UIS), Jaime Angulo Universidad de Campiñas (Brasil) y muchos otros.

Menciono todo esto para defender la idea de que la matemática es formativa, que educa el pensamiento en todos los niveles, (Misión UPN), es bella y por tanto es fundamental que aprendamos matemática, tanta como sea posible, para ser buenos maestros de matemáticas.

Los estudiantes son lo importante, no a los mínimos, podemos más.

¿Qué es Geometría?

Es una pregunta amplia, sin respuesta inmediata, cada afirmación debe ser tomada más como una pregunta, cada concepto tiene detrás mucha elaboración y profundidad, mucho detalle.

Mi interés no es presentar un método, ni una verdad, es generar dudas, discutir (Bart).

Si no puede convencerlos, confúndalos (Truman). Y no quiero convencer.

I. Geo-metría es la medida (metría) de la tierra (~ 2000 a.C.)

Lo que aún algunos llaman geometría, nació antes que la escritura (Boyer, *Historia de la matemática*) como consecuencia de actividades prácticas, en Babilonia (tablas), Egipto (fórmulas), India (simetrías), construcción de templos.

En la actualidad ya no hay geometría, hay geometrías y muchas; la diferencia entre ellas está en los objetos que estudian y los conceptos que se usan para hacer el estudio:

En *geometría diferencial* se estudian curvas y superficies y … (variedades diferenciables) se usa el cálculo y el álgebra lineal.

Geometría de la información, los objetos son familias parametrizadas de medidas de probabilidad de espacios muestrales; se usa para formular una geometría diferencial de modelos estadísticos usando una métrica riemanniana conocida como métrica de Fisher (Ay N, Jost J, Le H, Shwachhöfer (2017), Information Geometry, Springer, Switzerland.)

La *geometría algebraica* estudia las geometrías que vienen del álgebra, en particular, de los anillos conmutativos con identidad. La geometría de dicho anillo está determinada por su estructura algebraica, en particular por sus ideales primos.

Geometría Tropical es geometría con el semianillo de los números tropicales; números reales con suma *min* (x, y) y multiplicación $x + y$. Son conmutativas asociativas y distributivas. (Itenberg I, Mikhalkin G, Shustin E. (2007) *Tropical algebraic Geometry*. Birkhäuser, Basel).

La *Geometría simpléctica* es la geometría de las áreas orientadas, usando una aplicación R-bilineal y antisimétrica sobre R^2.

Hay geometrías: hiperbólica, esférica, riemanniana, seudoriemanniana, combinatoria, computacional, convexa, cuántica, descriptiva, diofántica, espectral, estocástica, fractal, integral, proyectiva, vectorial, …etc.

Pero, no hay método geométrico, los mismos objetos se pueden estudiar con lógica, con álgebra, con cálculo, …

Tampoco hay objetos geométricos universales, curvas, rectas, …

Ha cambiado con el tiempo, al principio fue práctica. La tierra supuestamente plana, permite establecer la idea de distancia (Métrica) y con ella, empíricamente, medir y calcular áreas, volúmenes (Medida) y algunos casos del teorema de Pitágoras (triplas pitagóricas). (Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*).

II. Geometría es Aritmética (~ 500 a.C.)

Tales de Mileto (550 a.C.), los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales, ALA de congruencia de triángulos.

Pitágoras (500 a.C.) y su secta, el número es todo, aritmética, teoría de las proporciones, música, cosmología; números figurados: triangulares, cuadrados, cúbicos, piramidales, etc.

μαθημα (Mathema) "aquello que es aprendido, aprendizaje, ciencia, conocimiento".

Μαθηματικός: mathematikós amante del conocimiento. (ARTMANN, B., (1999) *Euclid-the creation of mathematics*, Springer, New York).

Introducen la argumentación en matemáticas.

Amor por la sabiduría, la matemática no es práctica, 1 es la razón y generador de los números, 2 es el primer par, el número de la opinión, de la hembra, 3 es el numero macho, de la armonía, compuesto de la unidad y la diversidad, …,

No es Geo, ni metría, ni medida. Geometría es aritmética.

Platón (la Academia, no matemático, pero sí formador de matemáticos).

Anaxágoras 450 a.C. (Uso de regla y compás, problemas clásicos).

Trisectriz de Hipias 420 a.C., Cuadratriz de Dinostrato 350 a.C., la espiral de Arquímedes, la concoide de Nicomedes (200 a.C.), la cisoide de Diocles (100 a.C.) usadas para resolver los problemas clásicos.

Hipócrates de Chios 450 a.C., primeros Elementos (un siglo antes, se perdió), introdujo el método de *reducción al absurdo*.

Álgebra geométrica, solución de ecuaciones con geometría de regla y compas.

Arquitas, 388 a.C. primer matemático, educador y político: quadrivium aritmética, geometría música, astronomía.

Eudoxo 400 a.C. (discípulo de Platón y Arquitas), teoría de la proporcionalidad y método de exahución (cortadura de Dedekind, propiedad Arquimediana, semilla del cálculo integral).

Buen Maestro: Menecmo (cónicas), Dinostrato, Autolico (el perdurable).

Hipaso de Crotona: los inconmensurables y el colapso la teoría pitagórica.

III. La geometría es lógica y es abstracta. La aritmética (teoría de números) y el álgebra (solución de ecuaciones) son geometría.

En principio es el estudio de las figuras planas y sólidas, (con regla y compás), de puntos y sus relaciones con el espacio (o los espacios) y se hace con el método axiomático: supone postulados, demuestra teoremas.

III.1. El Método axiomático:

1. Conceptos *primitivos* o *no definidos*.
2. *Postulados o axiomas*: relaciones que expresan las propiedades básicas de las nociones primitivas. Se aceptan como verdaderas (No requieren de demostración).
3. *Reglas de inferencia*: (*elección de una lógica*) se usan deducir nuevas proposiciones.
4. *Teoremas*: consecuencias lógicas de los postulados.

Independencia, consistencia y completitud.

III.2. ¿Qué es demostrar?

El razonamiento lógico es una habilidad natural en los humanos. Hay varios tipos inductivo, deductivo, por indicios, etc.

Una lógica se ocupa de estudiar las formas de razonamiento válido.

No hay lógica, hay lógicas.

Aristóteles: lógica bivalente, silogismo.

Megáricos (400-275 a.C.) y estoicos (300- 200 a.C.), lógica de conectivos.

Lull en 1270 fue el primero en buscar un lenguaje completo y automático para el razonamiento, en 1629 Descartes propuso uno como una especie de aritmética, en 1660 Dalgarno y Wilkins y en 1666 Leibniz una matemática de las ideas, las ideas complejas se pueden construir a partir de ideas simples; no discutamos, calculemos.

En 1842 Peacock plantea la necesidad de establecer unas leyes de las operaciones del álgebra (axiomas, como en geometría), surge el álgebra simbólica (abstracta) que influyeron en Boole para que en 1847 formulara una versión algebraica de la lógica, *álgebra de clases* y *álgebra de enunciados* idénticas desde un punto de vista formal; lo que marca el nacimiento de la *lógica matemática*.

En la década de 1890 Schröder y Whitehead propusieron un *álgebra de la lógica* en forma de una ciencia deductiva.

Más detalles en Nidditch P.H, (1983) *El desarrollo de la lógica matemática,* 3 ed, Cátedra, Madrid.

Y la lógica se volvió álgebra, ergo…, pero también el álgebra se volvió lógica (sistemas axiomáticos).

Si deseamos probar que q es consecuencia lógica de p, basta con suponer que p es verdadera y a partir de ahí, haciendo razonamientos válidos, llegar a la conclusión de que q es verdadera.

Aquí aparecen por lo menos dos interpretaciones para la implicación:

i. La proposición $p \to q$ es verdadera cuando el razonamiento es válido: si p es verdadera y q es verdadera y es falsa cuando el razonamiento no es válido o sea cuando p es verdadera y q es falsa. (*Diodoro de Cronos, 300 a. C.*)

ii. La proposición $p \to q$ es falsa cuando el razonamiento no es válido o sea cuando p es verdadera y q es falsa y es verdadera en los demás casos. (*Filón de Megara, hacia el 300 a. C.*).

Leyes de inferencia

1. Doble negación

$$\frac{p}{\neg\neg p}$$

y

$$\frac{\neg\neg p}{p}$$

2. *Modus ponendo ponens*: si la proposición $p \to q$ es verdadera y p es verdadera inferimos que q es verdadera, esquemáticamente:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\quad p \quad} \\ q \end{array}$$

el método (modus), que afirmando (ponendo) el antecedente, afirma (ponens) el consecuente.

3. *Modus tollendo tollens*: negando (*tollendo*) el consecuente, concluimos en la negación (*tollens*) del antecedente.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

4. Una variación del modus tollendo tollens es la *ley de reducción al absurdo*

$$\begin{array}{c} p \rightarrow 0 \\ \hline \neg p \end{array}$$

Usada por Euclides para demostrar que el conjunto de los números primos es infinito (Libro IX, proposición 20).

5. *Modus tollendo ponens*, conocida por los estoicos, *negando* (tollendo) una proposición de una disyunción se *afirma* (ponens) la otra.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ q \end{array}$$

O

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

6. *Ley de contrarrecíproca:*

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \hline \neg q \to \neg p \end{array}$$

Principios lógicos

Además de las reglas de inferencia, en las formas intuitivas de razonamiento correcto se aceptan unos principios (*Parménides de Elea del siglo V a.C.*)

1. *De identidad*: *p es p.*

$$p \leftrightarrow p\text{, que se puede simplificar como } p \rightarrow p.$$

2. *De no contradicción. p* es *p* y *p* no es *p, no pueden ser ambas verdaderas.*

$$\neg (p \wedge \neg p) \text{ es verdadera.}$$

3. *Del tercero excluido, p es p y p no es p, no pueden ser ambas falsas,*

$$p \vee \neg p \textit{ es verdadera.}$$

Más detalles en: Taylor J, Garnier R. (2014) *Understanding mathematical proof.* CRC press. London.

Y como siempre … no me gusta …,

Lógica intuicionista: no aceptamos el principio del tercero excluido: Brower, constructiva, álgebras de Heyting.

Fitting Melvin, *Intuitionistic logic, model theory and forcing*. Amsterdan: North Holland (1969)

Lógicas multivaluadas: con más de dos valores de verdad, finitos o infinitos.

En Malinowski G (1993). *Many valued logics.* Oxford University press. New York.

O, en resumen

Peña, Lorenzo, (2005) *Lógicas multivalentes*. <u>En</u>: Enciclopedia latinoamericana de filosofía, Trotta, Madrid. p. 323-349.

En particular *Lógica Difusa*: Estudia el razonamiento para valores de verdad como probablemente verdadero con valores de verdad en el intervalo real [0, 1].

Tanaka, Kazuo., *An introduction to fuzzy logic for practical applications*. New York: Springer. (1997).

Incluso *Lógica paraconsistente* donde se aceptan contradicciones como *p* y no *p*.

Da costa, Newton., Lewin, Renato., *Lógica paraconsistente*. En: Enciclopedia latinoamericana de filosofía, Madrid: Trotta. (2005). p. 185-204.

Lógica modal es la lógica de la necesidad y de la posibilidad, del poder ser y el deber ser.

Una versión reciente en Hughes G, Cresswell (1968) *Introducción a la lógica modal.* Espasa. Madrid.

Una más resumida en:
Orayen, Raúl., *Lógica modal*. En: Enciclopedia latinoamericana de filosofía, Madrid: Trotta. (2005). p. 289-322.

Hay *lógica abductiva, combinatoria, deóntica, epistémica, intensional, relevante, temporal,* …, etc.

Lógica categórica: una *categoría* está formada por objetos (no importa su naturaleza) y morfismos (que preservan estructuras), no importan las propiedades de los objetos sino sus relaciones, en las construcciones que se pueden hacer entre esos objetos (funtores) y las relaciones entre tales construcciones (transformaciones naturales).

En lógica categórica los conectivos lógicos son morfismos; los cuantificadores son funtores adjuntos, y la relación de consecuencia lógica está determinada por un clasificador de subobjetos en un *Topos*.

Una versión axiomática para la geometría plana afín con lógica intuicionista en Henkin L, Suppes P, Tarski A, (1959), *The axiomatic method with special reference to geometry and physics* North Holland, Amsterdan. p. 160.

Una presentación de la geometría analítica con lógica difusa en: Ghosh D, Chakraborty D. (2019) *An Introduction to Analytical Fuzzy Plane Geometry* Springer Switzerland.

Un ejemplo de Geometría con lógica categórica (Koch Anders (2009), *Synthetic Geometry of Manifolds.* Springer, Switzerland.

III.3. Euclides (el compilador)

Elementos (~ 330 a.C.) un compendio lógicamente estructurado sin relación con la tierra, ni con la medida en sentido físico; por el contrario: evita medir y procura conseguir por los métodos de la razón las verdades últimas sobre la estructura del *espacio.* (Aunque "Euclides trabaja con objetos geométricos, segmentos, triángulos, etc., no con la idea abstracta de espacio" Editorial Gredos).

No solo es un libro de matemáticas, también es didáctico, requiere paciencia y lectura atenta.

No hay original, solo traducciones árabes, griegas, latinas, con muchos comentarios. Heron 100 a.C., Pappus 325 d.C., Proclo 450 d.C. (Biblia Alejandrina 300 a.C., nuevo testamento 125 d.C., todo se perdió).

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Con términos primitivos *punto* y *recta*, que define, pero no usa. Asume verdaderos unos axiomas y postulados y deduce otras verdades, los teoremas.

Son 13 libros (capítulos), los primeros 4 tratan sobre geometría plana elemental, Libros 1 y 2 Pitagóricos, Libros 3 y 4 Hipócrates, Libro 5 y 6 teoría de la proporción Eudoxo.

Los tres siguientes sobre teoría de números, el libro X sobre los inconmensurables y los tres últimos sobre geometría de sólidos.

Establece las bases para las construcciones con regla y compas.

El primer libro comienza con una lista de 23 definiciones.

Axiomas (nociones comunes) (propiedades de la igualdad y del orden)

1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí. (Euclídea, no transitiva)
2. Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si de dos cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales, los totales son desiguales.
5. Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí.
6. Las cosas mitades de una misma cosa son iguales entre sí.
7. Las cosas congruentes entre si son iguales entre sí.
8. El todo es mayor que la parte.
9. Dos rectas no comprenden espacio.

Postulados

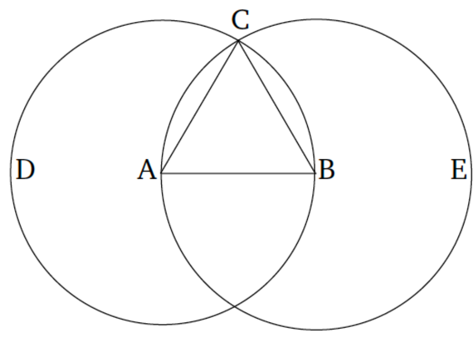
1. Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Prolongar de una manera ilimitada en línea recta una recta limitada.
3. Describir un círculo para cada centro y cada radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.

5'. Por un punto exterior a una recta solo puede pasar una paralela a dicha recta.

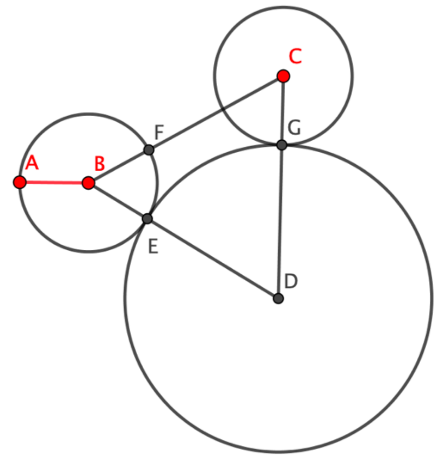
Fue propuesto por Proclo (410-485), aunque se conoce también como Axioma de Playfair del siglo XVIII.

Cada proposición no contenida en los postulados debe demostrarse. (sin intuiciones, ni dibujos).

Proposición E1. *Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado*.



Proposición E2. *Dados un punto y un segmento, construir un segmento igual al segmento dado*.



Es hermoso como hila; en el libro I primero construye un triángulo equilátero, luego lo usa para transportar segmentos, luego triángulos (LAL), ángulos, …, hasta llegar al teorema de Pitágoras. Es un teorema sobre áreas, se usa para determinar longitudes.

La diagonal del cuadrado

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En 1830 Lobachevski publicó *Sobre los elementos de la Geometría,* donde aparece una geometría que no cumple el quinto postulado de Euclides, conocida como *geometría hiperbólica*.

En 1868 Beltrami presentó tres modelos euclidianos de la geometría no-euclidiana, demostrando que la geometría no-euclidiana es tan consistente como la euclidiana y Riemann presentó un enfoque analítico de la geometría no-euclidiana, destacando la importante diferencia entre lo ilimitado y lo infinito.

¡Se acabó la verdad en geometría!

La geometría es axiomática, abstracta y formal.

En 1896 Mario Pieri, un estudiante de Peano, presentó un sistema axiomático para la geometría euclidiana con términos no definidos punto y movimiento.

III.4. David Hilbert

Fundamentos de la geometría (1899). Son siete capítulos:

1: Los axiomas de la geometría clasificados en cinco grupos con sus consecuencias principales.

2: Independencia de los axiomas.

3: Teoría de las proporciones y semejanza a partir de un cálculo de segmentos.

4: Noción de área.

5: El teorema de Desargues. (Arnold, números no desarguesianos X Encuentro)

6: El teorema de Pascal.

7: Construcciones geométricas realizables con base en los axiomas.

Apéndice 6: sobre el concepto de número, axiomática para los números reales.

Términos indefinidos: *punto, recta y plano*

Relaciones indeterminadas: *incidencia* de puntos y rectas y *congruencia* de segmentos y ángulos.

Lógica de proposiciones y de predicados bivalente a la manera de Filón, lógica matemática de proposiciones y de predicados, Frege, Peano, Russell.

Define *interestancia*, *paralelismo*, *continuidad*.

Axiomas

I. *Axiomas de enlace o incidencia*.

I-1 Dados dos puntos A, B existe una recta a, que con cada uno de los puntos, A, B, se corresponden mutuamente. (E1)

I-2 Dados dos puntos A, B no existe más que una recta, la cual con cada uno de los puntos A, B, se corresponde mutuamente. (E1)

I-3 Sobre una recta existen al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos no situados sobre una recta.

I-4 Dados tres puntos A, B, C cualesquiera no situados sobre una misma línea recta, existe siempre un plano α que se corresponde mutuamente con cada uno de los tres puntos. En cada plano existe siempre un punto correspondiéndose mutuamente con él.

I-5 Dados tres puntos cualesquiera A, B, C, no situados en una misma línea recta, no más que un plano que se corresponde mutuamente con cada uno de los tres puntos A, B, C.

I-6 Cuando dos puntos A, B, de una recta a están situados en un plano α, todo punto de a está situado en el plano α.

I-7 Si dos planos α, β, tienen un punto A común, todavía tienen, al menos, otro punto común B.

I-8 Existen, al menos, cuatro puntos no situados en un plano.

II. *Axiomas de ordenación*:

II-1 Cuando un punto *B está situado entre* un punto *A* y un punto *C*; *A*, *B*, *C* son tres puntos distintos de una recta y *B* está situado también entre *C* y *A*.

II-2 Dados dos puntos *A* y *C*, existe siempre al menos un punto *B* sobre la recta *AC* de tal modo que *C* está situado entre *A* y *B*. (E2)

II-3 De tres puntos cualesquiera de una recta no existe más que uno situado entre los otros dos.

II-4 Son *A*, *B*, *C*, tres puntos dados no situados en línea recta y *a* una recta del plano *ABC* que no contiene a ninguno de los puntos *A*, *B*, *C*: cuando la recta *a* pasa por un punto del segmento *AB*, seguramente pasa también o por un punto del segmento *AC* o por uno del segmento *BC*. Pasch 1882

Moritz Pasch en 1882 propone la primera axiomatización moderna de la geometría donde incluye un axioma equivalente a este.

III. *Axiomas de congruencia*: (define movimiento).

III-1 Si A, B son dos puntos de una recta a y además A' otro punto de la misma o distinta recta a', puede encontrarse siempre sobre uno de los lados de a', determinados por A', un solo punto B' tal, que los segmentos AB y $A'B'$ sean congruentes o iguales. Lo que se expresa con signos: $AB \equiv A'B'$. (existen segmentos congruentes con uno dado)

III-2 Si los segmentos $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes con el mismo segmento AB, también el segmento $A'B'$ es congruente con el $A''B''$. Dicho brevemente: si dos segmentos son congruentes con un tercero, son congruentes entre sí. (parece transitiva, pero no)

III-3 Sean AB y BC dos segmentos de la recta a sin puntos comunes y, por otra parte, $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta a o sobre otra distinta a', pero en todo caso, sin puntos comunes: si

$$AB \equiv A'B' \quad \text{y} \qquad BC \equiv B'C'$$

entonces siempre se verifica $AC \equiv A'C'$. (suma de segmentos)

III-4 Dados un ángulo $\angle (h, k)$ en un plano α, una recta a' en un plano α' y una de las regiones de α' determinadas por a'; se representa por h' un semirrayo de a' que parte de O'. Existe, entonces, en el plano α', un solo un semirrayo k' tal, que el ángulo $\angle (h, k)$ es congruente o igual al ángulo $\angle (h', k')$ y, a la vez, todos los puntos interiores del ángulo $\angle (h', k')$ están situados en la región dada con respecto a a'. Simbólicamente: $\angle (h, k) \equiv \angle (h', k')$.

III-5 Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ verifican las congruencias:

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

También se satisface siempre la congruencia: $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. (LAL)

IV. *Axioma de las paralelas*:

Sea a una recta cualquiera y A un punto exterior a a: en el plano determinado por a y A existe a lo más una recta que pasa por A y no corta a a.

V. *Axiomas de continuidad*. Los axiomas de Arquímedes y de completitud.

VI-1 (Axioma de la medida o de Arquímedes). Siendo AB y CD segmentos cualesquiera, existe siempre sobre la recta AB un número de puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, de modo que los segmentos $AA_1, A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots, A_{n-1} A_n$, son congruentes con el CD, y el punto B queda entre A y A_n.

VII-2 (Axioma de la plenitud lineal). Los puntos de una recta forman un sistema el cual no es susceptible de ampliación alguna, bajo la condición de conservar la ordenación lineal.

El Precio: ¡De 5 a 20 postulados! Y ¡el desarrollo! logrado por Henry Forder en 1927.

III.5. Birkhoff (1932)

Términos no definidos: *punto y distancia.* Supone los números reales. Se formalizaron en 1872.

Axiomas

I. **Postulado de la medida de la recta**. Un conjunto de puntos $\{A, B, \ldots\}$ en cualquier recta puede ponerse en una correspondencia uno a uno con los números reales $\{a, b, \ldots\}$ tales que $|b - a| = d(A, B)$ para todos los puntos A y B.

II. **Postulado del punto–recta**. Hay una y solo una recta l, que contiene cualesquiera dos puntos distintos dados P y Q.

III. **Postulado de la medida del ángulo**. Un conjunto de rayos $\{l, m, n...\}$ a través de cualquier punto O puede ponerse en correspondencia uno a uno con los números reales a (mód 2π) tal que si A y B son puntos (no iguales a O) de l y m, respectivamente, la diferencia $a_m - a_l$ (mod 2π) de los números asociados con las rectas l y m es $\angle AOB$.

IV. **Postulado de la semejanza**. Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ y alguna constante $k > 0$, $d(A', B') = kd(A, B)$, $d(A', C') = kd(A, C)$ y $\angle B'A'C' = \pm \angle BAC$, entonces $d(B', C') = kd(B,C)$, $\angle C'B'A' = \pm \angle CBA$, y $\angle A'C'B' = \pm \angle ACB$

Estos postulados fueron adoptados por el School Mathematics Study Group (SMSG) alrededor de 1960 en su reforma de la enseñanza media en los Estados Unidos.

Modelos de geometrías finitas, geometrías de incidencia con axiomas de incidencia, geometría neutral, geometría plana con postulados de Birkhoff en (Lee John, Axiomatic Geometry, AMS, Providence, p. 26-31).

Modelos de geometrías afines, proyectivas, hiperbólicas en (Martin George, (1975) Foundations of Geometry and the Non Euclidean Plane, Springer, New York, p. 52.)

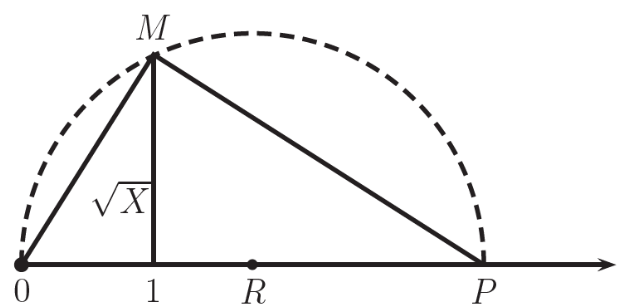
III.6. Tarski (1959)

Usando lógica de primer orden, con conceptos no definidos: punto, "estar entre" y "congruencia de pares de puntos", se desarrolla en Ivorra Carlos, *El álgebra y la geometría elemental*.

IV. La geometría es álgebra

En (1637) en un apéndice al Discurso del Método, Descartes propuso estudiar la geometría con solo “conocer la longitud de algunas líneas rectas” y luego ejecutar cálculos con estas longitudes. (Fermat hizo algo similar, quizá un poco antes, pero lo publicaron después).

Con esto logró reducir muchos problemas geométricos a la solución de ciertas ecuaciones algebraicas. Pues si x es la longitud de un segmento, desde Euclides sabemos sumar, restar, multiplicar y dividir segmentos, la multiplicación da un área, pero Descartes propuso elegir un segmento unidad, para interpretar un producto de segmentos como otro segmento; de paso la división y la raíz cuadrada:



En suma, para cada x podemos construir una ecuación, por ejemplo

$$y = x^2 + 4x + 8$$

y si queremos una representación gráfica, pintamos las x en una semirrecta y las y en otra con el mismo origen.

Notemos que las semirrectas no deben ser perpendiculares y que no tiene sentido la prolongación de los ejes más allá del origen. (Cap 9 Clasificar). Newton en 1704 en un apéndice de su Óptica, fue el primero en usar negativos y perpendiculares. (Martin George, (1975) *Foundations of Geometry and the Non Euclidean Plane*, Springer, New York, p. 52.)

Así, a cada punto del plano corresponde con una pareja de números, sus coordenadas y con ello nacen las *geometrías analíticas*.

IV.1. Geometría a partir de anillos o campos.

1. A cada punto del plano se le asigna un par (x, y) de números.

   Una *recta* es el conjunto:

$$L = \{(x, y) \in R^2 : y = mx + b\}$$

   Una parábola:

$$P = \{(x, y) \in R^2 : y = ax^2 + bx + c\}$$

   Una circunferencia:

$$C = \{(x, y) \in R^2 : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

Esto se puede hacer en cualquier anillo. Por ejemplo, en Z_p construimos geometrías con un numero finito de puntos. (*Geometrías finitas*) o en Z una *Geometría enumerable.*

En Z_5 la suma de dos cuadrados puede dar 0

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 0$$

Un círculo de radio 0, con centro en (0, 0) que tiene al punto (1, 2).

La recta

$$y = 3x + 2$$

es perpendicular a

$$y = -\, 1/3\ x + 2$$

pero – 1/3 = 3, o sea es perpendicular a sí misma.

Si $p = 4s + 1$ entonces en Z_p sucede lo mismo: Z_5, Z_{13}, etc.

Como no hay orden lineal, no hay segmentos.

Si elegimos como (R, +, .) al campo de los números reales obtenemos una representación de la geometría euclidiana plana.

2. El campo C de los números complejos: En R^2 podemos además sumar y restar parejas, multiplicar una pareja por un número y nada que ver con los trucos de Descartes.

Entre los siglos XVIII y XIX, Wessel (1798), Argand (1806) y Gauss propusieron una interpretación de los números complejos C como un par de números reales:

Si $z = (a, b)$, el *conjugado* $z^* = (a, -b)$.

$$i = (0, 1) \text{ es tal que } i^2 = (-1, 0)$$

La *norma de* $|z|$

$$|z|^2 = zz^* = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si $z = (a, b) \neq (0, 0)$ el *argumento principal* de z

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

Si $z = (0, 0)$, entonces $|z| = 0$ y θ es cualquier número real.

La *distancia* d_{z,z_1} entre dos puntos del plano euclidiano correspondientes a los números complejos z y z_1 es

$$d_{z,z_1} = |z_1 - z|$$

El *ángulo* $\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)}$ entre las *rectas* que unen (z_0, z_1) y (z_0, z_2) está dado por

$$\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)} = \arg\,(z_2, z_1; z_0) = \arg\,\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0},$$

donde $(z_2, z_1; z_0) = \dfrac{(z_2 - z_0)}{(z_1 - z_0)}$ es llamada la *razón simple de los tres puntos* z_2, z_1 y z_0.

$$\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)} = \varphi_2 - \varphi_1$$

donde φ_2 y φ_1 son los argumentos de los números complejos $z_2 - z_0$ y $z_1 - z_0$.

Una *recta* que pasa por z_1 y z_2 está formada por los puntos z tales que

$$\operatorname{Im}(z, z_1; z_2) = \operatorname{Im} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = 0$$

donde Im $z = b$ si $z = (a, b)$.

Si el número $(z, z_1; z_2)$ es real

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{z^* - z_2^*}{z_1^* - z_2^*}. \tag{1}$$

una recta (z_1, z_2) está dada por la ecuación (1), o sea

$$(z_1^* - z_2^*)\, z - (z_1 - z_2)\, z^* + (z_1 z_2^* - z_1^* z_2) = 0,$$

o,

$$Bz - B^* z^* + C = 0, \qquad \operatorname{Re} C = 0, \tag{2}$$

donde $B = z_1^* - z_2^*$, y $C = z_1 z_2^* - z_1^* z_2$.

Una *circunferencia* con centro z_0 y radio r es el conjunto de puntos z tales que

$$| z - z_0| = r \quad \text{o} \qquad (z - z_0)(z^* - z_0^*) = r^2$$

o

$$zz^* - z_0^*z - z_0 z^* + (z_0 z_0^* - r^2) = 0,$$

es decir

$$Az z^* + B^* z - B z^* + C = 0, \qquad \mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, C = 0, A \neq 0. \tag{3}$$

Los *movimientos* del plano euclidiano son las transformaciones del plano que aplica a cada número z en z', donde

$$z' = pz + q, \qquad \text{o} \qquad z^{*\prime} = pz^* + q, \text{ con la condición } pp^* = 1.$$

preserva la distancia entre puntos: $d_{z'_1, z'} = d_{z_1, z}$.

En particular, $z' = -z$ es una reflexión con respecto a O.

$z' = z^*$ es una reflexión con respecto a la línea Im $z = 0$.

$z' = pz + q$ representa una rotación sobre O en un ángulo arg p seguido por la traslación determinada por el vector q con comienzo O y fin q.

3. El anillo D de los números Duales.

Podemos cambiar C por D (números de Study o duales), M (números de Minkowski o dobles), H (cuaterniones), etc. Los resultados son geometrías no euclidianas galileana y de Minkowski. (Yaglom I M, *A simple Non Euclidean geometry and its physical basis*, Springer, New York, 1979).

Y "la indecente fertilidad de la razón" hace lo que le da la gana.

D es

$$z = a + bn \text{ con } n^2 = 0, \text{ pero } n \neq 0.$$

Suma componente a componente, la multiplicación de

$$z = a + bn$$
$$w = c + dn$$

está dada por

$$z \times w = ac + (bc + ad)n$$

Si $z = (a, b) \neq (0, 0)$ la *seminorma de* z

$$|z|^2 = z\overline{z} = a^2$$

El *argumento dual* del número es

$$\text{Argg}(z) = \theta = \frac{b}{|a|}$$

es único, para cada a y b números reales con $a \neq 0$.

Si $z = (0, 0)$, entonces θ es cualquier número real.

La *distancia* d_{z,z_1} entre dos puntos del *plano galileano* correspondientes a los números duales z y z_1 es $d_{z,z_1} = |z_1 - z|$. (Es seudométrica).

Una *circunferencia* con centro z_0 y radio r es el conjunto de puntos z tales que

$$| z - z_0| = |a - a_0 | = r$$

que son las dos líneas verticales

$$a = a_0 + r \qquad \text{y} \qquad a = a_0 - r$$

cada circunferencia tiene infinitos centros,

Otra forma es

$$Azz^* + B^* z - B z^* + C = 0, \qquad \mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, C = 0,\ A \neq 0.$$

que son parábolas.

Los *movimientos* del plano galileano son las transformaciones de Galileo.

4. El cuerpo H de los números cuaterniones

$$q = z + wj$$

$$q = a + bi + cj + d\,(ij)$$

$$k = ij = -ji$$

entonces

$$q = a + bi + cj + dk$$

si q es distinto de 0,

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2}\left(a - bi - cj - dk\right)$$

donde

$$q^* = a - bi - cj - dk \quad \text{y} \quad \|q\|^2 = q\,q^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

5. Con los números cuaterniones duales, dobles, semidobles, etc.

6. Con cualquier * álgebra. (Octoniones, sedeniones).

IV.2 Geometría a partir de espacios vectoriales.

En la década de 1840 Hamilton y Grassmann establecieron el *álgebra vectorial* y en la década de 1850 Cayley desarrolló el *álgebra de matrices*, con una multiplicación no conmutativa.

En 1887 Peano presentó una axiomatización para los espacios vectoriales.

En (1918) Hermann Weyl en su libro *Espacio*, *Tiempo, Materia* presentó una axiomatización de la geometría euclidiana basada en los términos indefinidos *punto* y *vector*.

Axiomas

Axioma de la suma de vectores.

Dos vectores a y b cualesquiera se pueden sumar, donde esto significa que en el conjunto V de vectores está definida una aplicación:

$$+: V \times V \to V$$

que satisface:

1.1 Conmutatividad: $a + b = b + a$ para todo a, b en V
1.2 Asociatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo a, b, c en V
1.3 Existencia del idéntico: Existe un vector 0 tal que:
$$0 + a = a + 0 \text{ para todo } a \text{ en } V$$
1.4 Existencia de inversos: Para cada a en V existe su inverso $-a$ tal que:
$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

$(V, +)$ es un grupo abeliano.

Axiomas del producto de vectores por números

Existe un campo algebraico K (usualmente se toman los números reales ***R*** o los números complejos ***C***) cuyos elementos llamados *números* y una aplicación:

$$(\ ): \mathrm{K} \times V \rightarrow V$$

con las siguientes propiedades:

1. Asociatividad: $x(ya) = (xy)a$ para todo x, y en K y a en V. (abuso)

2. Distributividad: $x(a + b) = xa + xb$
$(x + y)\, a = xa + ya$
para todo x, y en K y a, b en V.

3. $1a = a$ para todo a en V, donde 1 es el elemento idéntico de la multiplicación en el campo K.

(V, +, ()) es un *espacio vectorial* sobre el campo K**.**

Axiomas de dimensión para el plano.

1. Para cada a, b, c en V existen x, y, z en K no todos cero, tales que:

$$xa + yb + zc = 0$$

2. Existen a, b en V tales que:

$$xa + yb = 0 \text{ si y solo si } x = y = 0$$

Estos dos axiomas aseguran que la dimensión del plano es 2, en palabras dicen que tres vectores en el plano son linealmente dependientes, pero existen por lo menos dos linealmente independientes.

Naturalmente podemos generalizar estos enunciados para un espacio de dimensión k.

Una *base* es un conjunto B de k vectores de V

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$$

Linealmente independientes que generan el espacio.

A los coeficientes a_i los llamaremos *coordenadas* de a con respecto a B.

Axiomas del producto punto.

Existe una aplicación:

$$<>: V \times V \to R$$

1. Conmutatividad:

$$< a, b > = < b, a > \text{ para todo } a, b \text{ en } V$$

2. Linealidad:

   2.1 $x < a, b > = < xa, b >$ para todo a, b en V y x en R
   2.2 $< a + b, c > = < a, c > + < b, c >$ para todo a, b, c en V

3. Definido positivo:

   3.1 $< a, a \geq 0$ para todo a en V
   3.2 $< a, a > = 0$ si y solo si $a = 0$

Dos vectores a y b son *perpendiculares* u *ortogonales* si $< a, b > = 0$.

La *norma* de un vector a está definida por:

$$|a|^2 = < a, a >$$

cumple

a. $|a|^2 \geq 0$ y $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$.
b. $|xa| = |x||a|$ para todo a, en V y $\boldsymbol{R}$.
c. Cumple la desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$ para todo a, b en V

La demostración de c presupone la *desigualdad de Cauchy*:

$$| < a, b > | \leq |a|\ |b|$$

El ángulo θ entre dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\langle a,b \rangle}{|a||b|}$$

La desigualdad de Cauchy asegura que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, como debe ser.

Axiomas de relación punto vector.

1. Para todo punto A y todo vector a existe un único punto B tal que:

$$AB = a$$

2. Para toda tripla de puntos A, B, C se tiene que:

$$AB + BC = AC$$

Una *recta* AB ($A \neq B$) es el conjunto de puntos M tal que $\overline{AM}$ y $\overline{AB}$ sean linealmente dependientes (es decir, $\overline{AM} = \lambda \ \overline{AB}$ para algún λ).

El vector AB es llamado el *vector dirección* de la recta y determina ésta de manera única.

Las rectas l y l_1 con vectores dirección z y z_1 son *paralelas* si los vectores z y z_1 son linealmente dependientes ($z_1 = \lambda z$ para algún λ).

Si $\overline{AB} = z$, entonces la recta AB puede describirse como el conjunto de puntos M tales que $\overline{AM} = \lambda z$, o, si O es cualquier punto del plano como el conjunto de puntos M tales que

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \lambda z.$$

El punto O es llamado el *origen*.

La *distancia* entre dos puntos A y B como:

$$d(A, B) = |a - b|$$

Una *circunferencia* es el conjunto de puntos P que se encuentren a la misma distancia de un punto fijo escogido como centro.

Análogamente definir Parábola, elipse, etc.

Movimientos en espacios vectoriales

Deben ser funciones f biyectivas, que respeten la estructura de espacio vectorial, es decir

$$f : V \to V$$

tales que:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

Transformaciones lineales. (Isomorfismos lineales). El conjunto de todas las aplicaciones de V en V se nota $L(V, V)$.

Si representamos una transformación lineal mediante:

$$x' = Mx$$

y queremos preservar un *producto punto*, es necesario que:

$$< x', y' > = < Mx, My > = (Mx)^t G(My) = x^t(M^tGM)\, y = < x, y >$$

o sea que:

$$M^tGM = G$$

condición de Ortogonalidad que en el caso $G = 1$ es la ortogonalidad usual.

En el conjunto $L\ (V,\ V)$ se puede definir una manera de sumar aplicaciones lineales:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

y una manera de multiplicar números por funciones:

$$\lambda f(a) = f(\lambda a)$$

$L(V,\ V)$ es espacio vectorial.

El espacio de las 1-*formas lineales* (Espacio dual V^*)

$$f : V \to R$$

Las 2-*formas bilineales* (lineales en cada variable)

$$f : V \times V \to R$$

Si adicionalmente

$$f(x, y) = f(y, x) \text{ para todo } x, y \text{ en } V$$

tenemos *formas bilineales simétricas.*

Ejemplos

1. Si los elementos de R^n son matrices columna, ellos forman un espacio vectorial de dimensión n. Definimos el producto punto:

$$< x, y > = x^t G y$$

G es una matriz $n \times n$, simétrica y $< x, y >$ es definida positiva.

2. Si hacemos $G = 1$ (matriz idéntica) el producto punto es:

$$< x, y > = x_i y_i$$

   y da lugar a la norma

$$|x|^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2$$

una extensión del teorema de Pitágoras para dimensiones superiores.

Geometría en 10 dimensiones, no se puede pintar, pero se puede calcular.

Podemos también modificar los axiomas y no exigir que G sea definida positiva, o que no sea simétrica, o. . . y con ello construir otras geometrías para R^n.

3. En C^n

$$< z, w > = z^{*\,t}H\, w$$

donde * significa conjugación compleja y H es una matriz simétrica.

Si escogemos H antisimétrica ($h_{ij} = - h_{ji}$) con $n = 2$ por ejemplo:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene una geometría llamada de *spinores* de Weyl que se utiliza en la mecánica cuántica relativista. El grupo de movimientos es el de las matrices 2×2 con entradas complejas y determinante 1, abreviado $SL(2, C)$.

Este producto no es conmutativo sino:

$$< x, y > = < y, x >^{*}$$

4. Si en lugar de números complejos usamos *otro tipo de números llamados variables de Grassman* que en lugar de cumplir la ley conmutativa de la multiplicación cumplen una ley anticonmutativa:

$$st = -ts$$

obtenemos un modelo geométrico para la supersimetría donde el producto definido con la matriz *H* es conmutativo.

5. $\aleph_0$-dimensional: Espacios de dimensión infinita numerable, cubo de Hilbert $[0, 1]^{\aleph_0}$ con topología producto.

6. Con curvas como ejes coordenados: análisis de Fourier,

7. $\aleph_1$-dimensional o c-dimensional: Espacios donde cada punto es una curva de otro espacio: espacios de funciones de dimensión infinita contable o no contable.

Y "la indecente fertilidad de la razón" hace lo que le da la gana.

IV.3. Geometría a partir de grupos.

¿Que hay en común en todas estas geometrías?

Un conjunto de puntos X, algunos de sus subconjuntos llamados *figuras* por ejemplo rectas, circunferencias, ángulos, parábolas, etc.

Dos figuras son la misma o *congruentes*, si se obtiene por un *movimiento* en el espacio (una función biyectiva).

Una figura debe ser congruente consigo misma (un movimiento idéntico).

Si una figura es congruente con otra, la segunda debe ser también congruente con la primera (movimiento inverso).

La propiedad transitiva de la congruencia la asegura la composición. Los movimientos forman un grupo.

Se estudian las propiedades de las figuras que no cambian bajo las transformaciones, eso es *la geometría del grupo*.

Con base en los trabajos de Abel (1825) y Galois (1832) se desarrolló *la teoría de grupos de Galois* en una publicación hecha por Liouville en 1846.

Una geometría es una tripla (V, G, I) en la que V es un conjunto no vacío, G es un grupo de transformaciones; I son las propiedades de los elementos de V, invariantes respecto de G.

Ejemplos

1. En el plano euclidiano usual: las transformaciones son rotaciones, simetrías y traslaciones la distancia entre dos puntos no cambia y con ello todo lo que se pueda definir en términos de distancia como colinealidad, paralelismo, circunferencia, ángulos, etc., el resultado es la geometría de Euclides.

2. La geometría afín es invariante por traslaciones.

3. Las *Geometrías proyectivas* para el espacio n-dimensional real son las correspondientes al grupo GL(n, R), la distancia entre dos puntos ya no es invariante, pero hay otras propiedades que sí, por ejemplo la razón doble de cuatro puntos colineales.

4. Con el grupo de Möbius obtenemos la geometría conforme.

5. Para el grupo de Galileo, la geometría galileana.

6. Para el grupo de Lorentz, la geometría minkowskiana.

7. En la física moderna se usan los grupos unitarios SU_n (C) cuyas geometrías sobre espacios fibrados producen las llamadas teorías de calibración (Gauge) que describen las interacciones fundamentales: U_1 para el electromagnetismo, SU_2 para las interacciones débiles, SU_3 para las interacciones fuertes, SU_5 para una teoría de campo unificado, etc.

8. Teorema de Cayley: Todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones. Si el grupo es finito y tiene orden n, entonces es isomorfo a un subgrupo de S_n . *Geometrías finitas sobre conjuntos sin estructura.*

9. La *Topología* es la geometría del grupo de las transformaciones continuas con inversas continuas.

Esta fusión de la geometría con el álgebra moderna (teoría de grupos y otras estructuras), propuesta por Felix Klein en1872 en el programa de Erlangen, como muchas grandes ideas no tuvo impacto hasta que Sophus Lie desarrollara la teoría de representaciones de grupos en la década de 1890.

V. La geometría es cálculo

"El cálculo es geometría mirada con microscopio"

Un producto punto en un EV está definido

$$< x, y > = x^t G\, y$$

En términos de coordenadas esto es

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i G_{ij}\, y_j$$

Inicialmente G_{ij} son números, pero pueden ser funciones de x e y; y si los puntos están muy cerca, podemos escribir un elemento de longitud infinitesimal:

$$ds^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + \ldots$$

agrupamos g_{ij} en una matriz, llamado *tensor métrico*.

Riemann en 1854 generaliza la teoría de las superficies de Gauss, formulando el concepto del "espacio curvo", el espacio de la geometría euclidiana, de las geometrías de Lobachevski y de Bolyai, son casos particulares de espacios de curvatura constante nula o negativa; y en la geometría esférica el espacio tiene curvatura constante positiva. (Jammer Max (1970) *Conceptos de espacio* Grijalbo, Mexico, D.F.)

Su trabajo permitió hacer geometría en vecindades y con ella geometría en variedades diferenciables, definir localmente ángulo, longitud de curvas, áreas, volumen, etc. A partir de estas, pueden obtenerse otras magnitudes por integración de las magnitudes locales.

Una variedad diferenciable es un espacio topológico que localmente es homeomorfo con algún R^n, n es la dimensión de la variedad.

Si la forma cuadrática es definida positiva, son *variedades riemannianas*.

Las *seudoriemannianas* no necesariamente son definidas positivas, un caso particular son las *variedades de Lorentz* los espacios de la relatividad general que localmente son homeomorfos a espacios de Minkowski.

Sobre una variedad se definen *Haces fibrados* (*Fiber bundles*), sobre cada punto de una variedad se pega una estructura, grupo, anillo, espacio vectorial, espacio vectorial topológico, etc. Un ejemplo simple es un cilindro.

Y "la indecente fertilidad de la razón" hace lo que le da la gana.

También se puede hacer cálculo y ecuaciones diferenciales con geometría: *la transformada de Legendre*,

$$\begin{array}{lcl} L:\ F & \to & \Re^2 \\ f(x) = mx + b & \text{a} & L(f) = (m, -b) \end{array}$$

Para la función exponencial $f(x) = e^x$

$m = f'(x) = e^x$ entonces $x = \ln m$

$$b(m) = mx - f(x)$$

$$L(f) = b(m) = m \ln m - m.$$

Es la integral del logaritmo natural.

El truco se puede extender a órdenes superiores, (con parábolas) o a ecuaciones en derivadas parciales (con planos), didácticamente resulta divertido

Es también usado en la transición de la formulación *lagrangiana* a la *hamiltoniana* de la mecánica clásica.

VI. Geometría métrica

Man muss immer generalizieren
Weierstrass

Un *espacio métrico* es una dupla (X, d) con d una *distancia* (o *métrica*) esto es una función X×X → R

a) $d(z_1, z_2) \geq 0$ y $d(z_1, z_2) = 0$ sii $z_1 = z_2$
b) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
c) $d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3)$

Ejemplos

1. Espacios con producto punto: prehilbert y Hilbert.

2. Espacios normados y de Banach: Valor absoluto en R, norma en C o en H, o norma euclídea en R^n.

3. Métrica del Taxista. Círculos cuadrados.

También, como siempre, podemos aflojar.

Espacios seudométricos: en el axioma a) eliminamos la condición de que si $d(x, y) = 0$ se tenga que $x = y$. Espacio galileano.

Ejemplos:

1. Todo espacio métrico es pseudométrico.

2. En un espacio vectorial una seminorma s induce una seudométrica n definida por
$$n(x, y) = s(x - y)$$

3. Todo espacio de medida (Ω, N, μ) puede verse como un espacio pseudométrico definiendo $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ para todo $A, B \in N$.

Espacios ultramétricos

Cambiar la desigualdad triangular por

$$d\,(z_1, z_3) \leq \text{máx}\{d\,(z_1, z_2), d\,(z_2, z_3)\}$$

Cada 3 puntos del espacio forman un triángulo isósceles.

Cada punto dentro de una bola es su centro. Si $d(x, y) < r$ entonces $\mathrm{B}(x, r) = \mathrm{B}(y, r)$.

Espacio cuasimétrico: no simétricos.

Otra vez “la indecente fertilidad de la razón” hace lo que le da la gana.

VII. ¿Hay una geometría real?

Jammer Max (1970), *Conceptos de Espacio,* Grijalbo, Mexico, D.F.

En la tierra media:

VII.1. El espacio físico clásico: Caja que contiene las cosas materiales, sin interactuar con ellas.

Según Kant: el espacio y el tiempo son entes a-priori lo que implica su unicidad e independencia del observador y por tanto no hay otra posibilidad de ser para el espacio y el tiempo.

El espacio real debe ser euclidiano (plano, no curvado), tridimensional (solo se pueden trazar tres perpendiculares mutuas), igual en todos sus puntos (homogéneo) y en todas las direcciones (isótropo), infinito e ilimitado (sin borde), absoluto e independiente del tiempo.

Usado por Kepler (1609), Galileo (1632), Newton (1687)

$$\mathbf{F}\,(\boldsymbol{x},\, t) = \mathrm{d}\mathbf{p}\,(\boldsymbol{x},\, t)\,/\mathrm{dt}$$

Estas son 3 ecuaciones diferenciales en 3 variables, en general muy difíciles de resolver, salvo para $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{F} = \boldsymbol{k}$, para péndulos y la gravitación requiere integrales elípticas.

Lagrange en 1788 mejoró la formulación introduciendo un *espacio de configuración* y una *función lagrangiana* con *coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas*. Son más ecuaciones pero más fáciles de resolver.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q_i(t),\dot{q}_i(t),t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(q_i(t),\dot{q}_i(t),t)}{\partial q_i} = 0$$

Hamilton en 1833 introdujo una geometría no euclidiana (formas simplécticas) en el espacio de fase (coordenadas generalizadas y momentos generalizados) de los sistemas mecánicos.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Con el *principio de mínima acción de Hamilton* y el uso del cálculo de variaciones se formula la versión Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica clásica.

$$S = \int L\, dt$$

Soldovieri T (2011) *Introducción a la mecánica de Lagrange y Hamilton*, Universidad del Zulia.

Casi toda la ingeniería actual la utiliza.

En 1865 Maxwell publico las leyes del electromagnetismo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales lineales acopladas, donde en general se toma como condiciones de contorno que los campos **E** y **B** tienden a cero en el infinito (para sistemas infinitos). Ondas electromagnéticas: radio, luz, microondas y mucha tecnología.

En la formulación de las leyes de la física clásica el modelo matemático para el espacio y el tiempo es R^3 x R.

¡No hay porque despreciarlo!

En 1887 el experimento de Michelson y Morley mostró que no existe el éter (espacio absoluto), que la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones e independiente del movimiento de la fuente.

VII.2. El espacio físico relativista. Einstein (1905): espacio y el tiempo no son absolutos, relativiza la simultaneidad, la distancia entre puntos del espacio y los intervalos de tiempo. Teoría especial de la relatividad.

4-dimensional. Hermann Minkowski (profesor de Einstein): Espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

$$F^{\mu} = dp^{\mu}/ d\tau \qquad \mu = 1, 2, 3, 4$$

la cuarta

$$E = mc^2$$

Masa y energía son una sola cosa.

A gran escala:

Curvo. Einstein (1917): espacio-tiempo curvo. Teoría de la gravitación (Relatividad General) gravedad = curvatura del espacio-tiempo. Experimento!

A nivel global el espacio-tiempo es una variedad seudoriemanniana.

Las rectas ahora son curvas (geodésicas): la elipse que Marte describe en el espacio alrededor del sol es una “recta” en el espacio-tiempo curvo, se puede “doblar” un rayo de luz.

El espacio puede ser infinito pero limitado.

Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no-lineales acopladas de segundo orden, lo que hace que sean muy difíciles de resolver analíticamente.

La forma de las ecuaciones es preciosa, los conceptos subyacentes profundos, pero… (Kepler y los sólidos platónicos)

No hay técnicas conocidas para obtener una solución general. Todas las soluciones conocidas son casos con mucha simetría u obtenidas a través de técnica específicas. Schwarzschild, agujeros negros.

La relatividad especial y la general tienen limitaciones a energías tan altas como la escala de Planck (l_P = 1,616199 x 10 $^{-35}$ m) (el espacio tiempo puede ser cuántico).

Heisenberg propuso abandonar el principio de continuidad de la geometría riemanniana o de la geometría euclidiana introduciendo átomos de espacio *hodón* y de tiempo *cronón*. (Estropea la geometría y el cálculo)

La relatividad especial invariante de De Sitter (Cap 37) es la solución de vacío máximamente simétrica de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica positiva (repulsiva) parece que funciona a esas energías.

La teoría de gravedad teleparalela (Cap 35), es una teoría gauge equivalente a la relatividad general.

Aldrovandi R, Pereira J (2016). *An introduction to geometrical physics*, Second edition, World Scientific, Singapore.

Cuando todo esta acomodándose aparece el demonio y Plop!

La materia oscura

Fritz Zwicky en 1933 propone la materia Oscura (22%). Podían ser MACHOS (Objetos masivos y compactos de Halo) Bariónicos y no bariónicos (neutrinos, axiones y otros).

En 1999 se descubrió que el universo se expandía aceleradamente, no constante, energía oscura (74%) Teoría de cuerdas???

En pequeña escala:

La mecánica cuántica:

No hay posición y velocidad en simultánea, se puede pasar de A a B sin estar entre ellos,

Los electrones no giran alrededor de los núcleos,

Primera versión

Un sistema cuántico es descrito por funciones de variable compleja $\Psi(\boldsymbol{x}, t)$ que cumplen la ecuación de Schrödinger y cuyo cuadrado $\Psi\Psi^* = |\Psi|^2$ da la probabilidad de que la partícula esté en la posición x en el tiempo t.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r},t)\right]\Psi(\mathbf{r},t)$$

El espacio sigue siendo euclidiano, absoluto, clásico.

Otra versión

Dirac (1933) para cada sistema físico existe un espacio de Hilbert H, cada vector $| s >$ corresponde con un estado del sistema y la combinación lineal de estados también es un estado.

A cada magnitud física medible (observable) L se le hace corresponder un operador lineal hermítico L que actúa sobre H. El resultado de la medición de L es un valor propio de L.

Tres operadores esenciales son el operador posición o coordenadas x, impulso p, y el hamiltoniano del sistema H

El valor esperado $< L >$ de una cantidad física L cuando el sistema se encuentra en el estado $| s >$ es el elemento matricial

$$< L >=< s \, | L | \, s >.$$

Los elementos matriciales de los operadores de la posición (coordenadas) x_i y de los momentos p_i, $i = 1, 2, 3$, donde los índices corresponden a las proyecciones en los ejes x, y y z, respectivamente H satisfacen las ecuaciones de Hamilton.

Además, los operadores posición x_i e impulso p_i, i = 1, 2, 3, satisfacen las relaciones de conmutación

$$[x_k, x_j] = 0 = [p_k, p_j], [x_k, p_j] = i \hbar \delta_{k,j} I$$

Donde h barra es una constante e $i = \sqrt{-1}$.

$$dp/dt = -i/\hbar [p, H]$$

De forma análoga,

$$dx/dt = -i/\hbar [x, H]$$

Las ecuaciones anteriores se conocen como ecuaciones dinámicas de la Mecánica cuántica en la representación de Heisenberg.

La ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \ \partial|\Psi\rangle / \partial t = H|\Psi\rangle$$

es la ecuación de evolución de la mecánica cuántica cuando los operadores no dependen del tiempo.

La electrodinámica cuántica relativista. Ecuación de Dirac.

Espinores (bichos raros) su álgebra funciona bien, pero su significado? son como la raíz cuadrada de la geometría. (Atiyah). Predice anti-partículas

Feynmann (1948) Integral de caminos, cada camino aporta. Espacios de funciones, integrales infinito-dimensionales (electrodinámica cuántica). (Diez cifras decimales de exactitud). Microscopios bosónicos.

Cromodinámica cuántica, Teorías de color, quarks, gluones.

Desde Anaxágoras, Einstein buscaron una ecuación que explicara el Mundo. Teorías gauge unifican. SU(2) Electrodebiles, SU(3) Fuertes, SU(5) todas, Modelo Estándar.

No gravedad.

VII.3. En Teorías unificadas: 5-dimensional. Kaluza (1914): espacio-tiempo de cinco dimensiones (Teoría unificada de gravitación y electromagnetismo) pero no supo explicar dónde estaba la quinta dimensión.

Oscar Klein (1932): la quinta dimensión se compactifica en un tamaño menor que el radio atómico. La quinta dimensión cierra al espacio-tiempo en una especie de cilindro de radio muy pequeño y una altura de cuatro dimensiones que son las usuales del espacio-tiempo. Aún hoy se discute la idea. (Teoría de cuerdas).

8-dimensional. Wess-Zumino (1973). Supersimetría?: Espacio de 8 dimensiones. Una teoría en la que se unifican Bosones (no obedecen el principio de exclusión de Pauli) pueden compartir muchos el mismo estado y Fermiones que no comparten su estado con ningún otro (electrones, protones).

10 o 26-dimensional. Supercuerdas: las partículas elementales no son puntuales sino cuerdas que vibran en un espacio de diez ó de veintiséis dimensiones, que incluyen el espacio tiempo.

Teoría M: 11 dimensiones, incluye cuerdas, membranas, objetos tridimensionales, p-branes, que se enroscan, permite varios universos paralelos.

VII.4. Fractal.

Mandelbrot en 1982 publica un trabajo sobre espacios de dimensión *fraccionaria*, llamados *fractales* que no son ni líneas ni superficies, sino un intermedio entre ellas.

1. El conjunto de Cantor está formado por todos los puntos del intervalo [0,1] que se pueden expresar en base 3 sin utilizar el dígito 1.
   Geométricamente se obtiene suprimiendo una sucesión de conjuntos abiertos del intervalo cerrado [0,1].

2. La curva de Koch.

Hawking: el espacio-tiempo tiene dimensión fraccionaria (según la definición de Haussdorf) $4 + e$ donde e es un número pequeño.

Yndurain (1986) y otros han probado que para que los datos experimentales sobre corrimiento Lamb coincidan con esta idea, e debe ser menor que 10^{-7}.

Puede explicar ciertas fluctuaciones cuánticas del vacío y posiblemente tenga que ver con *regularización dimensional.*

No nos preocupemos por poner nombre a lo que hacemos, disfrutémoslo.